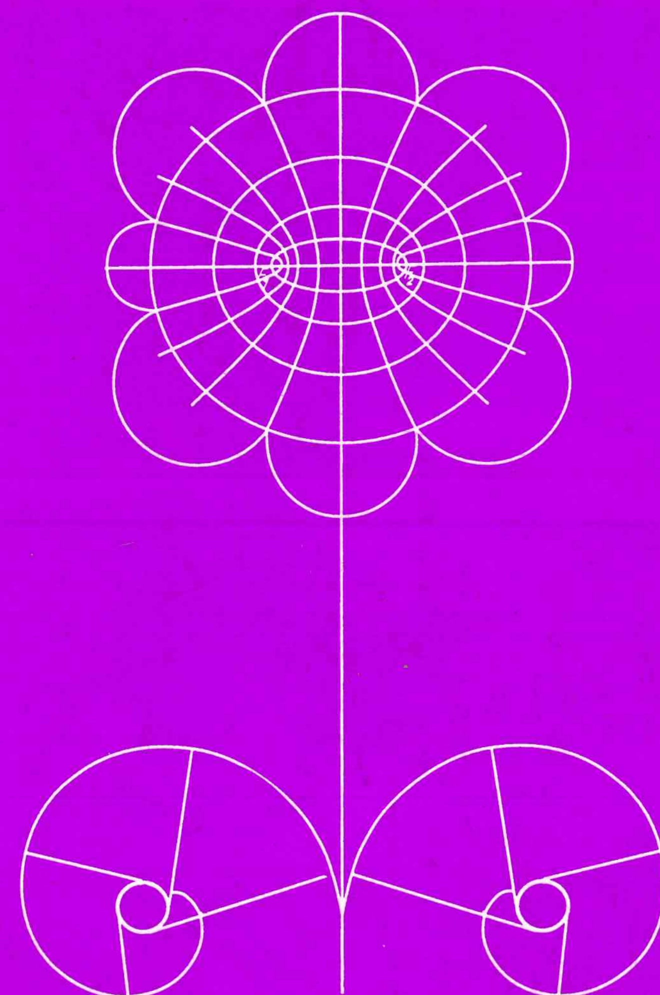
PROBLEMAS PARA LA **11a.**

Olimpiada Mexicana de MATEMATICAS



SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

1997

Problemas para la

11ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

1997

Editado por

María Luisa Pérez Seguí

COMITÉ ORGANIZADOR

Presidente: José Antonio Gómez Ortega

Entrenamientos: Ignacio Barradas Bribiesca

Publicaciones: Alejandro Illanes Mejía

Organización del Concurso Nacional: Ma. del Pilar Morfín Heras

Relaciones Internacionales: Elena de Oteyza y de Oteyza

Exámenes y Problemas: Ma. Luisa Pérez Seguí

Difusión: Concepción Ruíz Ruíz-Funes

Superación Académica: Julieta Verdugo Díaz

CONTENIDO

PRESENTACIÓN

La Sociedad Matemática Mexicana organiza la 11ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los ganadores en ella formarán las selecciones que participarán en la XXXIX Olimpiada Internacional de Matemáticas por celebrarse durante el mes de julio de 1998 en Taiwán y en la XIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas en la República Dominicana.

En la 11ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas pueden participar los jóvenes mexicanos nacidos despues del 1° de agosto de 1978. Los concursantes deberán estar inscritos en el bachillerato durante el primer semestre de 1998 y, para el 22 de julio de ese año, no deberán estar inscritos en ninguna escuela de nivel universitario.

Los problemas que aparecen en este folleto son problemas que aparecieron en concursos de las diferentes etapas de las olimpiadas de matemáticas. La intención del folleto es que sirva como orientación a los alumnos que desean participar en estas olimpiadas. Como se puede ver, los problemas que aparecen aquí, no son problemas rutinarios o problemas en los que se apliquen directamente los conocimientos que se adquieren en la escuela. Más bien son problemas que requieren de una buena dosis de ingenio y de esfuerzo para ser resueltos. Como en todos los aspectos del aprendizaje de las matemáticas, el esfuerzo individual y el enfrentamiento solitario con los problemas son importantes, pero también es muy importante la discusión con los compañeros y los profesores.

Una forma de manifestar creatividad en matemáticas es resolviendo problemas. Otra forma, que a veces requiere de más madurez, es inventando problemas. Invitamos a todos los lectores de este folleto: profesores, estudiantes, olímpicos y exolímpicos a que nos envíen problemas con solución. Estos problemas serán considerados para su inclusión en exámenes o en futuros folletos.

ETAPAS DE LA OLIMPIADA

Como ya es tradición, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas consta de tres etapas:

1. *Exámenes Estatales.* Estos exámenes servirán para formar las selecciones estatales que asistirán al Concurso Nacional.

2. *Concurso Nacional.* Este concurso se llevará a cabo en la ciudad de Monterrey, Nuevo León, del 9 al 15 de noviembre de 1997. De él se elegirá a la preselección mexicana.

3. *Entrenamientos.* A la preselección que surja del Concurso Nacional se le entrenará intensivamente durante el primer semestre de 1998; también se le aplicarán exámenes para determinar los alumnos que representarán a México en las olimpiadas internacionales.

La participación en las tres etapas mencionadas es INDIVIDUAL.

RESUMEN DE RESULTADOS

OLIMPIADAS INTERNACIONALES DE MATEMATICAS

Desde 1987, año en que la Sociedad Matemática Mexicana organizó la 1ª olimpiada, los resultados han sido los siguientes:

Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1988	Australia	49	37
1989	Rep. Fed. De Alemania	50	31
1990	Rep. Popular de China	54	36
1991	Suecia	55	35
1992	Rusia	56	49
1993	Turquía	73	63
1994	Hong Kong	69	65
1995	Canadá	74	59
1996	India	75	53

OLIMPIADAS IBEROAMERICANAS

Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1989	Cuba	13	3
1990	España	15	3
1991	Argentina	16	5
1992	Venezuela	16	6
1993	México	16	9
1994	Brasil	16	6
1995	Chile	18	9
1996	Costa Rica	17	2

En total, en las olimpiadas internacionales se han obtenido seis medallas de bronce y doce menciones honoríficas. En las olimpiadas iberoamericanas se han obtenido dos medallas de oro, doce medallas de plata, trece medallas de bronce y dos menciones honoríficas.

Este folleto incluye problemas de los exámenes estatales de:

Aguascalientes	Jalisco
Chiapas	Michoacán
Chihuahua	Puebla
Coahuila	Quintana Roo
Distrito Federal	Sinaloa
Guanajuato	Sonora
Hidalgo	Yucatán

COMITÉ ORGANIZADOR DE LA OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS

Febrero de 1997

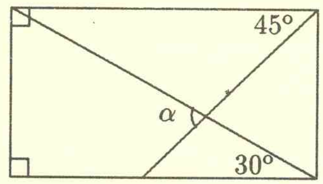
PROBLEMARIO

Presentamos aquí algunos problemas para mostrar el tipo de matemáticas que se manejan en las primeras fases de las Olimpiadas de Matemáticas.

Al final encontrarás las soluciones.

Los siguientes 30 problemas constituyeron la Primera Etapa del Concurso del Distrito Federal de la 10ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los alumnos tuvieron 3:00 horas para resolverlo.

1. Determina el valor del ángulo α.



(a) 45° (b) 75° (c) 90° (d) 105°

2. Una operación binaria $*$ entre números enteros está definida por

$$a * b = 2a + 3b.$$

¿Cuál es el valor de $(((1 * 2) * 3) * 4) * 5$?

(a) 62 (b) 71 (c) 120 (d) 139

3. Una solución de $3^x - 3^{x-1} = 162$ es

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6

4. ¿Cuántos $5'$s se usan al escribir todos los números del 1 al 1996?

(a) 600 (b) 500 (c) 400 (d) 300

5. ¿Cuál de los siguientes números cuando se escribe en base 2 tiene un número par de $1'$s?

(a) 32 (b) 63 (c) 100 (d) 511

6. El promedio aritmético de dos números a y b es 10; el promedio aritmético de b y 10 es $\frac{c}{2}$. ¿Cuál es el promedio aritmético de a y c?

(a) 15 (b) $\frac{a+b+c}{2}$ (c) 10 (d) $\frac{a+b+c}{3}$

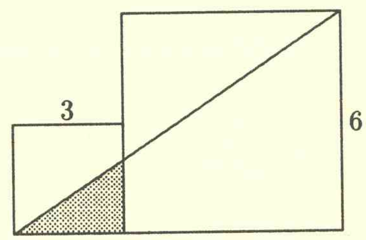
7. La superficie de un cubo expresada en centímetros cuadrados es igual al volumen del cubo expresado en centímetros cúbicos. ¿Cuál es la longitud de la arista del cubo?

(a) 6 (b) 4 (c) 2 (d) 1

8. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con 0,1,1,2,2,2?

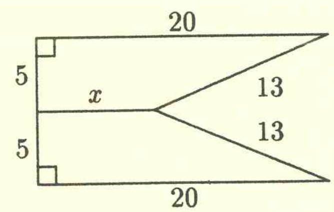
(a) 18 (b) 17 (c) 16 (d) 15

9. ¿Cuál es el área del triángulo sombreado si los lados de los cuadrados son 3 y 6, respectivamente?



(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6

10. En la siguiente figura el valor de x es



(a) 6 (b) 8 (c) 10 (d) 12

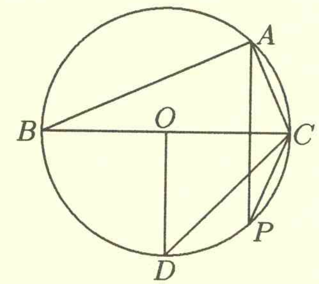
11. Los lados de un triángulo miden 15, 20 y 25. De los siguientes números, ¿cuál de ellos no es la longitud de una altura del triángulo?

(a) 25 (b) 20 (c) 15 (d) 12

12. ¿Cuál es el dígito de las unidades del número $14^{14} + 15^{15} + 16^{16}$?

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7

13. Sea ΔABC un triángulo inscrito en una circunferencia de centro O. Sean D y P las intersecciones de las perpendiculares a BC desde O y A, respectivamente, con la circunferencia. Si $\angle DCP = 15°$, cuánto vale el ángulo $\angle BCA$?

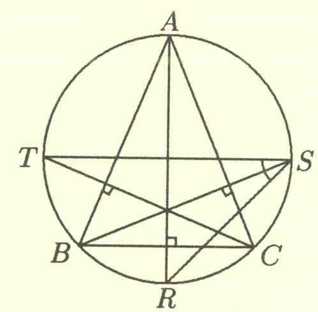


(a) $15°$ (b) $30°$ (c) $45°$ (d) $60°$

14. Sea ΔABC un triángulo isósceles cuyo perímetro es 32 y cuya altura sobre el lado desigual es 8. ¿Cuál es el valor del área del triángulo?

(a) 32 (b) 36 (c) 40 (d) 48

15. Sea ΔABC un triángulo isósceles tal que $AB = AC$; sean R, S y T las intersecciones de las alturas desde A, B y C, respectivamente, con el circuncírculo, como se indica en la figura. ¿Cuál es el valor del ángulo $\angle RST$?



(a) $\frac{\angle A + \angle B}{2}$ (b) $\angle A$ (c) $\angle B$ (d) $2\angle C$

16. Considera la sucesión

$$1, 2, 4, 5, 8, 9, 13, 14, 19, 20, \ldots$$

que se forma sumando 1 al 1, al número obtenido se suma 2, luego al resultado se suma 1, luego se suma 3, luego 1, luego 4, así sucesivamente alternando la suma de 1 y luego la suma de n, luego 1, etc. ¿En qué paso de este proceso se está más cerca de 1996?

(a) 104 (b) 124 (c) 132 (d) 158

17. ¿Cuál es el mínimo entero positivo a para el cual la suma

$$(a+1)^2 + (a+2)^2 + \cdots + (a+1996)^2$$

es divisible entre 5?

(a) 1 (b) 3 (c) 4 (d) 5

18. ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar un número entre 401 y 700 (inclusive) el número tenga sus tres cifras diferentes?

(a) $\frac{18}{25}$ (b) $\frac{81}{100}$ (c) $\frac{10}{81}$ (d) $\frac{27}{50}$

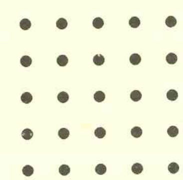
19. ¿En qué base, el número 123 está representado por el símbolo 234?

(a) 3 (b) 5 (c) 7 (d) 11

20. Si $x > 0$ y $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 9$, entonces el valor de $x^3 + \frac{1}{x^3}$ es igual a

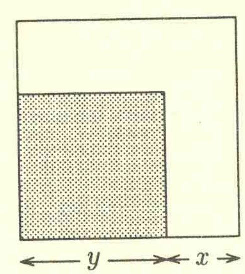
(a) 18 (b) 20 (c) 21 (d) 27

21. ¿Cuántos cuadrados se pueden formar con vértices en los puntos de la siguiente figura?



(a) 20 (b) 30 (c) 40 (d) 50

22. El área del cuadrado sombreado es una tercera parte del área del cuadrado grande. ¿Cuál es la razón $\frac{x}{y}$?

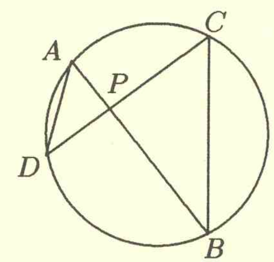


(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\sqrt{3} - 1$

23. Un rectángulo se forma con 252 cuadrados iguales acomodados en 12 filas y 21 columnas. El número de cuadrados que intersectan una diagonal del rectángulo es

(a) 12 (b) 21 (c) 30 (d) 33

24. Las cuerdas AB y CD se cortan en el punto P como se indica en la figura. ¿Cuál es el área del triángulo ΔPCB si el área de ΔPAD es 8 y la razón $\frac{AP}{PC} = \frac{2}{5}$?

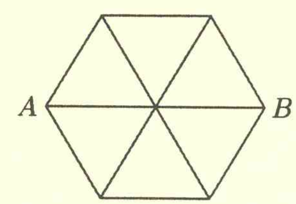


(a) 25 (b) 35 (c) 50 (d) 80

25. El siguiente juego se efectúa entre dos jugadores: Se colocan 13 fichas sobre la mesa y los jugadores tiran en forma alternada; cada tirada consiste en tomar 1, 2, 3 o 4 fichas, y gana el que se quede con la última ficha. ¿Cuántas fichas debe tomar el primer jugador en la primera tirada para asegurar su triunfo?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

26. En la figura siguiente, ¿cuántos caminos hay de A a B sin pasar dos veces por un mismo punto?



(a) 18 (b) 19 (c) 20 (d) 21

27. Si a y b son las raíces de $x^2 - 45x + 25 = 0$, entonces el valor de $a^2 + ab + b^2$ es

(a) 2025 (b) 2000 (c) 1996 (d) 1995

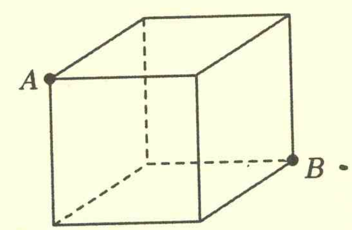
28. Dos partículas se mueven alrededor de una circunferencia en sentidos opuestos; una de ellas tarda 28 segundos en dar una vuelta. Si las partículas salen de un mismo punto y se encuentran por primera vez a los 12 segundos, ¿cuántos segundos tarda en dar un vuelta la otra partícula?

(a) 16 (b) 21 (c) 25 (d) 27

29. ¿Cuál es el número de 10 cifras diferentes tal que el número formado por sus dos primeros dígitos (de izquierda a derecha) es divisible entre 2, el número formado por sus tres primeros dígitos es divisible entre 3, y así sucesivamente hasta el número formado por sus nueve primeros dígitos, que es divisible entre 9, y el número es divisible entre 10?

(a) 3816547290 (b) 1836547290 (c) 1234567890 (d) 9276548130

30. En el cubo siguiente

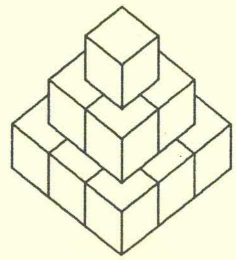


¿de cuántas formas se puede ir de A a B sobre las aristas del cubo, sin pasar dos veces por el mismo vértice, si no se permite subir?

(a) 10 (b) 11 (c) 12 (d) 13

Los siguientes 10 problemas constituyeron la Etapa Eliminatoria del Concurso de Michoacán de la 10ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los alumnos tuvieron una hora y 30 minutos para resolverlo.

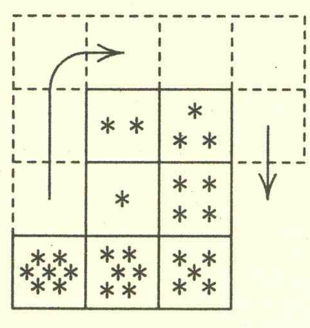
31. Lupita está jugando con cubitos de madera de 1 dm de lado. Pegó los cubitos como en la figura para formar una pirámide (primero pegó 9 cubitos, luego encima pegó 4 y hasta arriba 1 más). Quiere pintar la superficie visible de los cubos (la parte que da al piso no la va a pintar). ¿Cuántos decímetros cuadrados de superficie pintará?



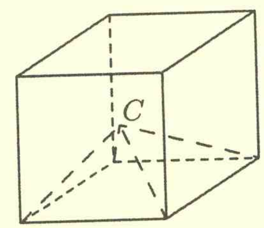
32. ¿Qué dígito puede sustituirse en lugar de $*$ para que sea cierta la igualdad

$$\frac{*1996}{9} = *444?$$

33. Se quiere hacer un adorno **cuadrado** con mosaicos que miden 1 dm de lado cada uno. En el mosaico central habrá una estrella. Después alrededor de éste se irán colocando en forma espiral mosaicos con $2, 3, 4, 5, \ldots$ estrellas, respectivamente, como se muestra en la figura (cada uno con una estrella más que el anterior). ¿Cuántos decímetros de lado deberá medir el cuadrado final, por lo menos, para que un mosaico con 1996 estrellas quede incluido en el adorno?

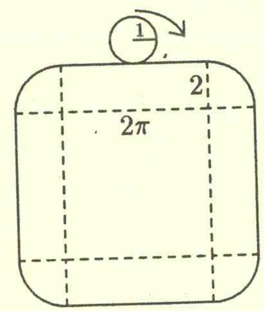


34. En un cubo, llamemos C a su centro y unamos C con una de las caras del cubo para formar una pirámide. Si el volumen de la pirámide es de $15\,\text{cm}^3$, ¿cuántos centímetros cúbicos de volumen tiene el cubo?



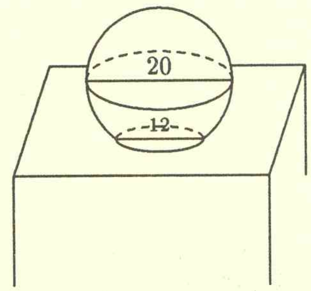
35. Mi edad es dos terceras partes de la edad de Juan; si a la edad de Susana le agrego un 20%, obtengo mi edad. ¿Qué porcentaje debo agregarle a la edad de Susana para que me dé la de Juan?

36. Un cuadrado de lado $2\pi\,\text{cm}$ se ha "redondeado" agregándole un marco de $2\,\text{cm}$ de lado y poniéndole en las esquinas cuartos de círculo de $2\,\text{cm}$ de radio. Alrededor del cuadrado redondeado gira una rueda que mide $1\,\text{cm}$ de radio (la rueda va siempre tocando el cuadrado redondeado). ¿Cuántas vueltas completas da la rueda sobre sí misma al dar una vuelta completa alrededor del cuadrado redondeado?



37. El promedio de 5 números es 40. Al eliminar dos de ellos el nuevo promedio es 36. ¿Cuál es el promedio de los dos números eliminados?

38. Una mesa tiene un hoyo circular de 12 cm de diámetro. Descansando en el hoyo se encuentra una esfera de 20 cm de diámetro. Si la mesa tiene 30 cm de altura, ¿cuántos centímetros de distancia hay desde el punto más alto de la esfera hasta el piso?

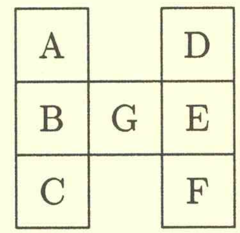


39. ¿Cuántas cifras tiene el número $999\,999\,999\,999^2 - 1$?

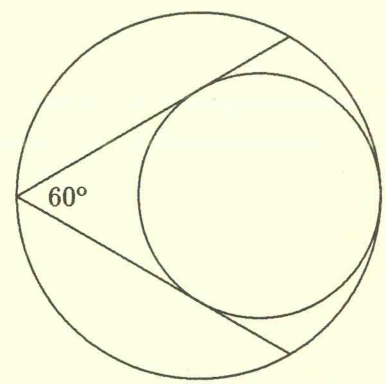
40. El producto de tres enteros positivos es 1500 y su suma es 45. ¿Cuál es el mayor de esos tres números?

Los siguientes problemas fueron seleccionados dentro de algunos exámenes estatales de la 10^{a} *Olimpiada Mexicana de Matemáticas.*

41. Coloca, sin repetir, siete de los diez dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 en lugar de las letras del siguiente cuadro, de manera que los productos de los números que están en A, B, C, en B, G, E y en D, E, F, sean iguales, es decir $ABC = BGE = DEF$. *[Primer Examen de Aguascalientes, 1996.]*



42. En la figura, el área del círculo mayor es $1\,\text{m}^2$, el círculo menor es tangente al otro y a los lados del ángulo inscrito, el cual mide 60°. ¿Cuál es el área del círculo menor? *[Primer Examen de Aguascalientes, 1996.]*



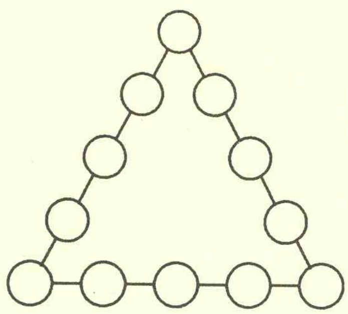
43. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos círculos que se intersectan en dos puntos distintos P y Q. Una recta que pasa por P intersecta a $\mathcal{C}$ en A y a $\mathcal{D}$ en B (ambos distintos de P). Sean Y el punto medio de AB, X la intersección de QY con $\mathcal{C}$ y Z la intersección de QY con $\mathcal{D}$. Prueba que Y también es el punto medio de XZ. *[Problema propuesto por Chiapas.]*

44. El centro de la ciudad Olm tiene forma rectangular y está cuadriculado por 6 calles con sentido oriente-poniente numeradas del 1 al 7, y 6 calles con sentido norte-sur cuyos nombres son $A, B, \ldots, F$. En cada una de las cuatro esquinas que forma la calle A con las calles 1, 3, 5 y 7 había un policía. Cada uno hizo un recorrido de vigilancia hasta llegar a la calle F de tal manera que ninguno de los policías pasó por un lugar donde otro (incluyendose a sí mismo) había pasado y ninguno caminó sobre la calle F (sólo llegaron a ella). Demuestra que alguno de los policías recorrió 8 o menos cuadras. *[Examen de Chihuahua, 1996.]*

45. Encuentra el número de dos dígitos tal que el triple de la suma de sus dígitos sea igual a dicho número. *[Examen Estatal de Coahuila, 1996.]*

46. Supón que una persona inventa un rumor, digamos en un primer día pero no lo cuenta hasta el tercer día a una persona más (por ejemplo, si lo inventa un miércoles, lo transmite por primera vez el viernes). La persona que se entera del rumor lo transmite también por primera vez al tercer día de conocerlo; en general, cada persona que se entera del rumor sigue esta misma regla de transmitirlo por primera vez al tercer día de haberlo conocido. Una vez que una persona ya ha transmitido el rumor por primera vez, lo seguirá haciendo cada día a una persona más. Suponiendo que el rumor sólo se transmite a personas que no lo conocían, ¿cuántas personas conocerán el rumor al vigésimo día? *[Examen Final de Coahuila, 1996.]*

47. Los números del 1 al 12 se colocan (sin repetir) en los círculos del siguiente arreglo triangular:



(i) Demuestra que no existe una forma de acomodarlos que cumpla que las sumas de los números que están en cada uno de los lados del triángulo sea 27.

(ii) Muestra que sí existe un acomodo en que la suma en cada uno de los lados del triángulo sea 28.

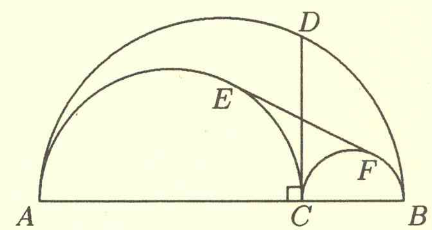
[Segundo Examen del Distrito Federal, 1996.]

48. Sobre una circunferencia se tienen dos puntos fijos A y B de manera que AB no es un diámetro. Para cada diámetro XY considera el punto C de intersección de las rectas AX y BY. ¿Qué lugar geométrico describe C cuando se recorren todos los diámetros de la circunferencia? *[Segundo Examen del Distrito Federal, 1996.]*

49. Sea ΔABC un triángulo y sean E y F puntos sobre el triángulo de manera que BE y CF sean las bisectrices de los ángulos $\angle B$ y $\angle C$, respectivamente. Considera también $\mathcal{L}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{L}'$ y $\mathcal{N}'$ las bisectrices de los ángulos $\angle CBE$, $\angle EBA$, $\angle BCF$ y $\angle FCA$, respectivamente. Sean E' la intersección de $\mathcal{L}$ y CF, F' la intersección de $\mathcal{L}'$ y BE, H de $\mathcal{N}$ y FF'; J de $\mathcal{N}'$ y EE', I de BE y CF. Muestra que H, I y J son colineales. *[Segundo Examen del Distrito Federal, 1996.]*

50. Una hormiga camina sobre las aristas de un dodecaedro.
(i) Muestra que la hormiga puede hacer un recorrido que pase por todos los vértices una y sólo una vez.
(ii) Muestra que en un recorrido de la forma anterior, la hormiga debe recorrer en forma consecutiva cuatro aristas de alguna cara.
[Segundo Examen del Distrito Federal, 1996.]

51. En la figura, los segmentos AC, CB y AB son diámetros de las semicircunferencias, la recta por E y F es tangente a las semicircunferencias (con E y F los puntos de intersección), D es un punto sobre la circunferencia de tal manera que DC y AB son perpendiculares. Demuestra que D, E, C y F están sobre una circunferencia y que ésta tiene área igual a la de la región delimitada por las tres circunferencias. *[Examen Final del Distrito Federal, 1996.]*



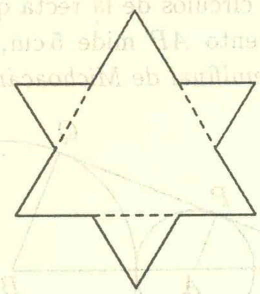
52. El rey de Ranilandia está moribundo y quiere repartir su herencia entre sus dos hijos. La herencia consta de 50 objetos que valen: el primero 1 quack, el segundo 2 quacks, el tercero 3 quacks y así sucesivamente hasta el objeto 50 que vale 50 quacks.

(i) ¿Será posible que los objetos que herede el hijo mayor valgan exactamente el doble de los que herede el hijo menor? En caso afirmativo, di cómo repartir los objetos. (No se pueden vender ni partir los objetos).

(ii) Supongamos ahora que el rey perdió el objeto que vale 50 quacks y que quiere repartir la herencia según las mismas reglas que en (i). ¿Podrá hacerlo? *[Examen de Guanajuato, 1996.]*

53. Considera el triángulo rectángulo ΔABC con el ángulo recto en C. Se construyen sobre los catetos los cuadrados exteriores $ACPQ$ y $BCRS$. Las rectas AS y BQ se cortan en O, las rectas BQ y AC se cortan en T y las rectas AS y BC se cortan en U. Prueba que las áreas del cuadriátero $OTCU$ y del triángulo AOB son iguales. *[Examen de Guanajuato, 1996.]*

54. Considera un triángulo equilátero cuyos lados tienen longitud 1; a partir de él se divide cada lado en tres partes iguales y sobre el tercio medio se construyen nuevos triángulos equiláteros como se muestra en la figura. Si el procedimiento se repite nuevamente sobre cada lado de la estrella resultante dos veces más, calcula el perímetro del la figura resultante. *[Examen de Hidalgo, 1995.]*



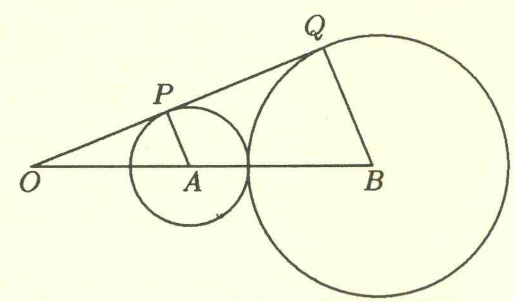
55. Un caminante decidió realizar un experimento: andar durante 1 minuto a una velocidad de 1 kilómetro por hora, luego otro minuto a 2 km/h, otro a 3 km/h y así sucesivamente. ¿Qué velocidad estará desarrollando al llegar a los 1000 metros exactos? *[Examen de Hidalgo, 1995.]*

56. En un pentágono convexo arbitrario numera los lados sucesivamente en el sentido de las manecillas del reloj. Traza el segmento que une los puntos medios de los lados 1 y 3; luego traza el segmento que une los puntos medios de los lados 2 y 4, y por último traza el segmento que une los puntos medios de esos dos últimos segmentos trazados. Si la longitud del lado 5 es k unidades, encuntra la longitud del último segmento que trazaste. *[Examen Estatal de Jalisco, 1996.]*

57. Sean $ABCD$ y $A_1B_1C_1D_1$ dos cuadrados en el plano con el segundo más chico que el primero, con el mismo centro y con los lados respectivamente paralelos. Sean P, Q, R y S puntos uno en cada lado del cuadrado $ABCD$. Prueba que si A_1, B_1, C_1 y D_1 pertenecen cada uno a un lado del cuadrilátero $PQRS$, entonces $PQRS$ es cuadrado. *[Examen Final de Jalisco, 1996.]*

58. Se va a viajar a una isla lejana por avión desde México. Los vuelos de ida y vuelta tienen la misma duración. El vuelo sale de México el lunes a las 6:25 de la mañana (hora de México) y llega a las 2:10 de la tarde del martes (hora local de la isla). Después sale de la isla a la 1:35 de la tarde del jueves (hora local de la isla) y llega el mismo jueves a las 3:20 de la tarde (hora de México). Cuando en México son las 4 de la tarde del sábado, ¿qué hora es en la isla y de qué día? *[Examen Semifinal de Michoacán, 1996.]*

59. En la figura, los dos círculos son tangentes entre sí, A y B son los centros de los círculos, y O es un punto sobre la línea por A y B; los puntos P y Q son los puntos de tangencia en los círculos de la recta que pasa por O. Si el segmento OP mide 12 cm y el segmento AP mide 5 cm, ¿cuántos centímetros mide el segmento PQ? *[Examen Semifinal de Michoacán, 1996.]*



60. Observa que los números 1900 y 1996 comparten la siguiente propiedad: cada uno de ellos es producto de dos números mayores que 1 cuyas cifras son todas cuadrados perfectos: $1900 = 19 \times 100$ y $1996 = 4 \times 499$. Encuentra el próximo año que va a tener esa misma propiedad y también encuentra cuál fue el último año antes de 1996 que tuvo la propiedad. *[Examen Semifinal de Michoacán, 1996.]*

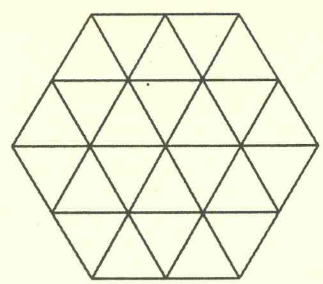
61. Si A es un conjunto de números enteros del 1 al 10, llamemos p_A al producto de todos los elementos de A, y llamemos q_A al producto de todos los enteros del 1 al 10 que no están en A. (Por ejemplo, si A consta de los números 2, 5, 6 y 8, entonces $p_A = 2 \times 5 \times 6 \times 8 = 480$ y $q_A = 1 \times 3 \times 4 \times 7 \times 9 \times 10 = 7560$.) Encuentra el menor entero que puede obtenerse como resultado de dividir p_A entre q_A. *[Examen Semifinal de Michoacán, 1996.]*

62. Encuentra todos los naturales x para los cuales

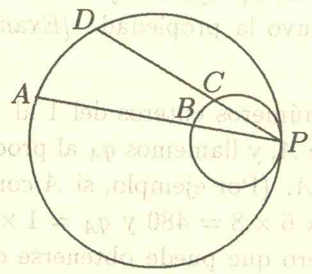
$$2^{x-1} \cdot x - 2^x = 768.$$

[Examen Final de Michoacán, 1996.]

63. En cada una de las casillas triangulares de un tablero como el de la figura hay una ficha. En una *jugada* cada ficha se mueve a un triangulito adyacente o se queda en su lugar (todas al mismo tiempo). ¿Cuántas posibilidades de jugadas hay de tal manera que en cada casilla queden 0 o 3 fichas exactamente? (Nota: La jugada consta del movimiento de todas las fichas, no sólo de la posición final en que queden). *[Examen Final de Michoacán, 1996.]*



64. Los círculos de la figura son tangentes en P y las rectas por P cortan a los círculos en los puntos indicados (A, B, C y D). Prueba que AD y BC son paralelos. *[Examen Final de Michoacán, 1996.]*



65. ¿Cuántas veces habrá que presionar las teclas de una calculadora convencional (no programable) para efectuar la suma

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 1996?$$

[Examen Regional de Puebla, 1996.]

66. Demuestra que de todos los hexágonos $ABCDEF$ que tienen vértices sobre una circunferencia dada y que cumplen que el ángulo en A es recto y $BC = EF$, uno que tenga mayor área debe cumplir que AD es diámetro. *[Examen Regional de Puebla, 1996.]*

67. Sin tomar en cuenta los números 11, 12 y 13, encuentra los enteros positivos consecutivos más pequeños n, $n+1$ y $n+2$ que tienen a 11, 12 y 13 como factores, respectivamente. *[Examen Estatal de Puebla, 1996.]*

68. ¿Es posible envolver un cubo de arista 1 con un papel cuadrado cuyo lado tiene longitud 3? (No se puede cortar el papel; sólo doblar.) *[Examen de Quintana Roo, 1996.]*

69. En la base AB de un triángulo isósceles ΔABC (con lados iguales AC y BC) se escoge un punto E. En cada uno de los triángulos ACE y ECB se inscriben circunferencias que tocan al segmento CE en los puntos K y H, respectivamente. Encuentra la longitud del segmento KH si $AE = a$ y $EB = b$. *[Examen de Quintana Roo, 1996.]*

70. Una persona A pinta una casa en 10 días; una persona B pinta esa misma casa en 12 días. ¿En cuánto tiempo pintan entre las dos personas la casa? *[Examen de Sinaloa, 1996.]*

71. Demuestra la siguiente identidad:

$$\frac{1}{2}\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2.$$

[Examen de Sinaloa, 1996.]

72. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos circunferencias tangentes y de un mismo radio r. Sea $\mathcal{L}$ la tangente común a $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ que las toca en puntos distintos y sea $\mathcal{C}_3$ la circunferencia tangente a la vez a la recta $\mathcal{L}$ y a las circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$. Encuentra el radio de $\mathcal{C}_3$. *[Examen de Sinaloa, 1996.]*

73. A través de cierto punto tomado dentro del triángulo ABC se han trazado tres rectas paralelas a cada uno de sus lados. Estas rectas dividen al área del triángulo en seis partes, tres de las cuales son triángulos de áreas 1, 4 y 9, respectivamente. Encuentra el área de ΔABC. *[Examen de Sonora, 1996.]*

74. (i) Demuestra que el producto de tres enteros positivos consecutivos no puede ser un cubo.
(ii) Demuestra que sólo existe un primo p tal que el número $2p+1$ es un cubo. *[Examen de Yucatán, 1996.]*

75. Sea $\mathcal{C}$ el circuncírculo de un triángulo ΔABC y sea $\mathcal{L}$ la bisectriz del ángulo $\angle BAC$. Sean L el punto de intersección de $\mathcal{L}$ con BC y N el punto de intersección de $\mathcal{L}$ con $\mathcal{C}$. Prueba que si M es el punto de intersección de AC con el círculo que pasa por A, B y L, entonces el área del cuadrilátero $ABNM$ es igual a la del triángulo ΔABC. *[Examen de Yucatán, 1996.]*

76. Sean a, b y c tres enteros positivos tales que $a>b>c$. Prueba que si $a+b$ es múltiplo de c, $b+c$ es múltiplo de a y $a+c$ es múltiplo de b, entonces el cociente $\frac{abc}{a+b+c}$ es un cuadrado. *[Examen de Yucatán, 1996.]*

Los siguientes 6 problemas constituyeron el Examen Nacional de la 10ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4:30 h para resolverlos.

77. Sea $ABCD$ un cuadrilátero y sean P y Q los puntos de trisección de la diagonal BD (es decir, P y Q son los puntos del segmento BD para los cuales las longitudes BP, PQ y QD son todas iguales). Sea E la intersección de la recta que pasa por A y P con el segmento BC y sea F la intersección de la recta que pasa por A y Q con el segmento DC. Demuestra lo siguiente:
(i) Si $ABCD$ es paralelogramo, entonces E y F son los respectivos puntos medios de los segmentos BC y CD.
(ii) Si E y F son los puntos medios de BC y CD, respectivamente, entonces $ABCD$ es un paralelogramo.

78. Bordeando una mesa circular hay dibujadas 64 casillas y en cada una hay una ficha. Las fichas y las casillas están numeradas del 1 al 64 en orden sucesivo (cada ficha está en la casilla que lleva el mismo número). En la parte central de la mesa hay 1996 focos apagados. Cada minuto todas las fichas se desplazan simultáneamente, en forma circular (en el el mismo sentido de la numeración), como sigue: la ficha #1 se desplaza una casilla, la ficha #2 se desplaza dos casillas, la ficha #3 se desplaza tres casillas, etcétera, pudiedo varias fichas ocupar la misma posición. Cada vez que una ficha comparte el lugar en una casilla con la ficha #1, se prende uno de los focos (se prenden tantos focos como fichas estén compartiendo la posición con la ficha #1 en ese momento). ¿En dónde estará la ficha #1 en el primer momento en que ya todos los focos estén prendidos?

79. Demuestra que no es posible cubrir una cuadrícula de $6\,\text{cm} \times 6\,\text{cm}$ con 18 rectángulos de $2\,\text{cm} \times 1\,\text{cm}$, de tal manera que cada una de las rectas de longitud 6 cm que forman la cuadrícula y que están en el interior de la misma pase por el centro de por lo menos uno de los rectángulos. Demuestra también que sí es posible cubrir una cuadrícula de $6\,\text{cm} \times 5\,\text{cm}$ con 15 rectángulos de $2\,\text{cm} \times 1\,\text{cm}$, de tal manera que cada una de las rectas de longitudes 5 cm o 6 cm que forman la cuadrícula y que están en el interior de la misma pase por el centro de por lo menos uno de los rectángulos.

80. ¿Para qué enteros $n \geq 2$ se pueden acomodar los números del 1 al 16 en los cuadros de una cuadrícula de 4×4 (un número en cada cuadro, sin repetir números) de tal manera que las 8 sumas de los números que quedan en cada fila y en cada columna sean múltiplos de n, y que estos 8 múltiplos sean todos distintos entre sí?

81. En una cuadrícula de $n \times n$ se escriben los números del 1 al n^2 en el orden habitual (de izquierda a derecha y de arriba a abajo, como se ilustra en la figura para el caso $n = 3$).

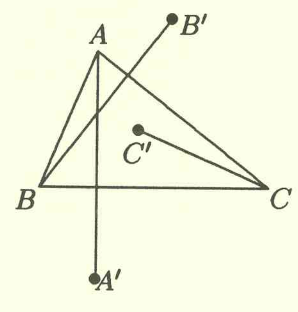
1	2	3
4	5	6
7	8	9

Llamamos *camino* en la cuadrícula a una sucesión de pasos de un cuadro a otro, desde el cuadro que tiene el número 1 hasta el que tiene el número n^2, de tal manera que en cada paso el movimiento sea hacia la derecha o hacia abajo. Si $\mathcal{C}$ es un camino, denotamos por $L(\mathcal{C})$ a la suma de los números por los que pasa el camino $\mathcal{C}$.

(i) Sea M la mayor $L(\mathcal{C})$ que se puede obtener de entre todos los caminos $\mathcal{C}$ en una cuadrícula fija de tamaño $n \times n$ y sea m la menor $L(\mathcal{C})$ (también de entre todos los caminos $\mathcal{C}$ en una cuadrícula fija de tamaño $n \times n$). Prueba que $M - m$ es un cubo perfecto.

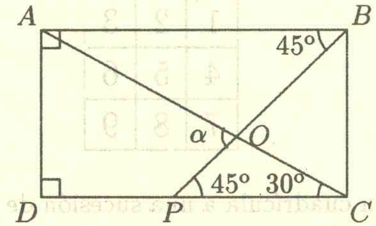
(ii) Prueba que en ninguna cuadrícula hay un camino $\mathcal{C}$ tal que $L(\mathcal{C})$= 1996.

82. En la figura se muestra un triángulo acutángulo ΔABC en el que la longitud de AB es menor que la de BC y la longitud de BC es menor que la de AC. Los puntos A', B', y C' son tales que AA' es perpendicular a BC y la longitud de AA' es igual a la de BC; BB' es perpendicular a AC y la longitud de BB' es igual a la de AC; CC' es perpendicular a AB y la longitud de CC' es igual a la de AB. Además el ángulo $\angle AC'B$ es de 90°. Demuestra que A', B' y C' están alineados.



SOLUCIONES

1. **(b)**. El ángulo en P mide 45^o por ser alterno interno con el ángulo en B
Entonces $\alpha = 45^o + 30^o = 75^o$ por ser externo al triángulo ΔOPC.



2. **(d)**. Tenemos

$$\begin{aligned} 1 * 2 &= 2 + 6 = 8, \\ 8 * 3 &= 16 + 9 = 25, \\ 25 * 4 &= 50 + 12 = 62 \;\; y \\ 62 * 5 &= 124 + 15 = 139. \end{aligned}$$

3. **(c)**. Observemos que

$$3^x - 3^{x-1} = 3^{x-1}(3-1) = 3^{x-1} \cdot 2,$$

así que queremos x tal que $81 = 3^{x-1}$, de donde $x = 5$.

4. **(a)**. Contemos cuántos $5'$s se usan por grupos de números. Del 1 al 9 se us un 5 y lo mismo ocurre en cada decena excepto en la de los $50'$s en que se usan 1 más, así que del 1 al 99 se usan $10 \times 1 + 10 = 20$. Entonces en cada centena se usa 20 excepto en la de los $500's$ en que se usan 100 más, de manera que del 1 al 999 s usan $10 \times 20 + 100 = 300$. También del 1000 al 1999 (o al 1996) se usan 300, así qu la respuesta es 600.

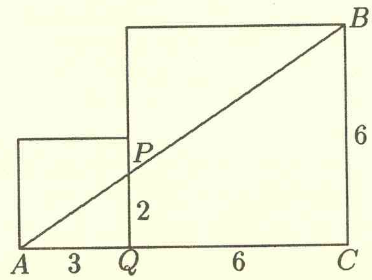
5. **(b)**. Observemos que 63 y 511 una potencia de 2 menos 1: $63 = 2^6 - 1$ $511 = 2^9 - 1$, así que 63 consta de seis $1'$s en su expansión binaria y 511 de nuev Además 32 es potencia de 2 ($32 = 2^5$) así que sólo tiene un 1 en base 2 (seguido d cinco $0'$s) y $100 = 64 + 32 + 4$, así que 100 tiene tres $1'$s (su expansión en base 2 e 1100100).

6. **(a)**. Tenemos que $\frac{a+b}{2} = 10$ y $\frac{b+10}{2} = \frac{c}{2}$. Queremos determinar $\frac{a+c}{2}$ así qu sumemos $\frac{a}{2}$ a ambos miembros de la segunda ecuación: $\frac{a+b+10}{2} = \frac{a+c}{2}$ y, sustituyend la primera ecuación, tenemos $10 + \frac{10}{2} = \frac{a+c}{2}$, de donde $\frac{a+c}{2} = 15$.

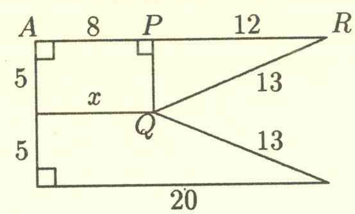
7. **(a)**. Sea x la arista del cubo; entonces $x^3 = 6x^2$, así que $x = 6$.

8. **(d)**. Contemos los números según los dígitos que tienen: Con 0,1,2 hay 4 números; con 0,1,1 hay 2; con 0,2,2 hay 2; con 1,1,2 hay 3; con 1,2,2 hay 3, y con 2,2,2 hay 1. En total son 15.

9. **(a)**. Los triángulos ΔABC y ΔAPQ son semejantes y la razón de semejanza es $\frac{AC}{AQ} = \frac{9}{3} = 3$, de aquí que PQ mide $\frac{6}{3} = 2$. Entonces es área de ΔAPQ es $\frac{3\times 2}{2} = 3$.



10. **(b)**. En el ΔPQR tenemos que $PQ = 5$ y $QR = 13$, así que, por Pitágoras, $PR = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ y $x = AP = 20 - 12 = 8$.

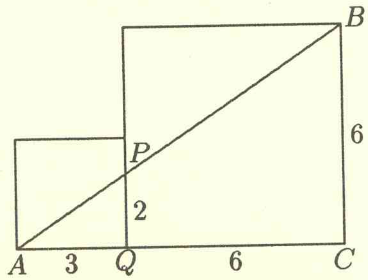


11. **(a)**. Observemos primero que el triángulo es un triángulo rectángulo pues es semejante el triángulo cuyos lados miden la quinta parte de éstos: 3, 4 y 5 (y estos números satisfacen la relación de Pitágoras: $3^2 + 4^2 = 5^2$). Para simplificar operaciones trabajemos con el triángulo de lados 3, 4 y 5 (después, para obtener las alturas del triángulo grande bastará multiplicar por 5 las alturas de este triángulo). El doble del área de este es $3 \times 4 = 12$; pero el doble del área del mismo triángulo puede calcularse multiplicando cada lado por la altura correspondiente a ese lado, así que $5h = 12$, donde h es la altura sobre el lado que mide 5 (las otras alturas son los mismos catetos), de donde $h = \frac{12}{5}$. Entonces en el triángulo original las alturas miden 12, 15 y 20.

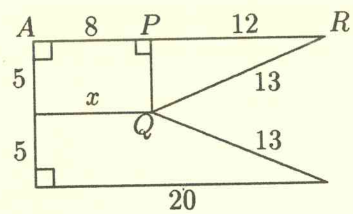
7. **(a)**. Sea x la arista del cubo; entonces $x^3 = 6x^2$, así que $x = 6$.

8. **(d)**. Contemos los números según los dígitos que tienen: Con 0,1,2 hay 4 números; con 0,1,1 hay 2; con 0,2,2 hay 2; con 1,1,2 hay 3; con 1,2,2 hay 3, y con 2,2,2 hay 1. En total son 15.

9. **(a)**. Los triángulos ΔABC y ΔAPQ son semejantes y la razón de semejanza es $\frac{AC}{AQ} = \frac{9}{3} = 3$, de aquí que PQ mide $\frac{6}{3} = 2$. Entonces es área de ΔAPQ es $\frac{3\times 2}{2} = 3$.



10. **(b)**. En el ΔPQR tenemos que $PQ = 5$ y $QR = 13$, así que, por Pitágoras, $PR = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ y $x = AP = 20 - 12 = 8$.



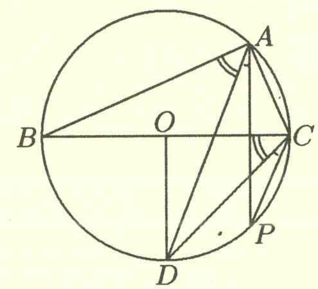
11. **(a)**. Observemos primero que el triángulo es un triángulo rectángulo pues es semejante el triángulo cuyos lados miden la quinta parte de éstos: 3, 4 y 5 (y estos números satisfacen la relación de Pitágoras: $3^2 + 4^2 = 5^2$). Para simplificar operaciones trabajemos con el triángulo de lados 3, 4 y 5 (después, para obtener las alturas del triángulo grande bastará multiplicar por 5 las alturas de este triángulo). El doble del área de este es $3 \times 4 = 12$; pero el doble del área del mismo triángulo puede calcularse multiplicando cada lado por la altura correspondiente a ese lado, así que $5h = 12$, donde h es la altura sobre el lado que mide 5 (las otras alturas son los mismos catetos), de donde $h = \frac{12}{5}$. Entonces en el triángulo original las alturas miden 12, 15 y 20.

12. **(d)**. Observemos que para encontrar la cifra de las unidades de un número que se obtiene después de hacer sumas y multiplicaciones, basta hacer las operaciones con las cifras de las unidades de los sumandos y los factores, e incluso, en cada paso de la operación, irse quedando sólo con la cifra de las unidades. Hagamos esto y para simplificar la escritura, escribamos $a \equiv b$ si a y b son dos enteros que tienen la misma cifra de unidades (por ejemplo $38 \equiv 18$ y $20 \equiv 100$). Entonces

$$14^2 \equiv 4^2 \equiv 6,\ 14^3 \equiv 6 \times 4 \equiv 4,\ 14^4 \equiv 4 \times 4 \equiv 6, \text{ etc.};$$
$$15^2 \equiv 5,\ 15^3 \equiv 5 \times 5 \equiv 5,\ 15^4 \equiv 5, \text{ etc. y}$$
$$16^2 \equiv 6^2 \equiv 6,\ 16^3 \equiv 6 \times 6 \equiv 6,\ 16^4 \equiv 6, \text{ etc.}$$

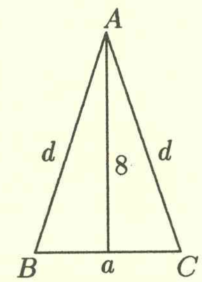
Así $14^{14} + 15^{15} + 16^{16} \equiv 6 + 5 + 6 \equiv 7$.

13. **(d)**. Tenemos que $\angle BCA = \angle BCP$, por simetría. Además $\angle BCD = \angle BAD$ (por abarcar el mismo arco). Entonces $\angle BCP = \angle BCD + \angle DCP = \angle BAD + 15°$. Pero $\angle BAD$ es la mitad de su ángulo central $\angle BOD$, o sea que $\angle BAD = 45°$. Entonces, combinando, $\angle BCA = 45° + 15° = 60°$.



14. **(d)**. Llamemos a y d a los lados del triángulo como se indica en la figura. Tenemos

$$2d + a = 32 \quad (*)$$
$$8^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = d^2 \quad (**)$$

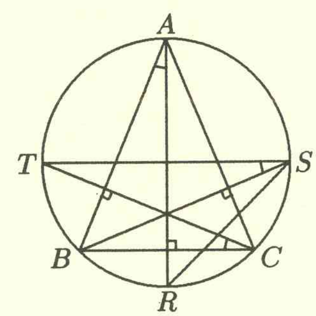


De $(*)$, $d = \frac{32-a}{2}$; sustituyendo en $(**)$,

$$\begin{aligned} 64 + \frac{a^2}{4} &= \frac{(32-a)^2}{4}, \\ 64 + \frac{a^2}{4} &= \frac{32^2 - 64a + a^2}{4}, \\ 64 &= 32 \times 8 - 16a, \\ 4 &= 16 - a \\ a &= 12. \end{aligned}$$

Entonces el área es $\frac{8a}{2} = 48$.

15. **(b)**. Observemos que los ángulos $\angle TSB$ y $\angle TCB$ son iguales por abarcar el mismo arco. También tenemos que $\angle TCB = \angle BAR$ pues ambos son complementarios de $\angle ABC$ puesto que con él se forman triángulos rectángulos. Por otro lado, $\angle BSR = \angle BAR = \frac{1}{2}\angle BAC$, de donde $\angle RST = \angle A$.



16. **(b)**. Llamemos a_n al término de la sucesión que se encuentra en la posición n, de manera que $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 5$, $a_5 = 8$, etc. Podemos observar que si n es par, $n = 2k$, entonces $a_n = k + (1 + 2 + 3 + \cdots + k) = k + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(k+3)}{2}$ y $a_{n+1} = \frac{k(k+3)}{2} + 1$. Entonces, queremos que $\frac{k(k+3)}{2}$ o $\frac{k(k+3)}{2} + 1$ esté lo mas cerca posible de 1996, lo cual se logra con la primera expresión, poniendo $k = 62$. Entonces $n = 124$.

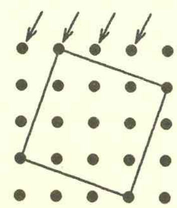
17. **(c)**. Observemos que para ver si un número es divisible entre 5, basta ver si su residuo al dividirlo entre 5 es 0; además las operaciones (sumar y multiplicar) se pueden realizar con los residuos (es decir, el residuo de una suma de dos números es igual al residuo de la suma de los residuos de los números y lo mismo ocurre con el producto). Ahora observemos que $1^2 + 2^2$ y $3^2 + 4^2$ son ambos divisibles entre 5 y lo mismo ocurrirá con las parejas cuyos residuos respectivos sean 1 y 2 (por ejemplo $(6,7)$, $(11,12)$, etc) y con las parejas cuyos residuos respectivos sean 3 y 4 (por ejemplo $(8,9)$, $(13,14)$, etc.). Entonces, agrupando según se formen estas parejas, es fácil encontrar los residuos de las sumas que queremos considerar:
Para $a = 1 : 2^2 + (3^2 + 4^2) + 5^2 + (6^2 + 7^2) + \cdots + (1996^2 + 1997^2)$ deja residuo 4;
para $a = 2 : (3^2 + 4^2) + 5^2 + (6^2 + 7^2) + \cdots + (1996^2 + 1997^2) + 1998^2$ deja residuo 4;
para $a = 3 : 4^2 + 5^2 + (6^2 + 7^2) + \cdots + (1998^2 + 1999^2)$ deja residuo 1;
para $a = 4 : 5^2 + (6^2 + 7^2) + \cdots + (1998^2 + 1999^2) + 2000^2$ deja residuo 0.

18. **(a)**. Son 300 números entre 401 y 700. Veamos de cuántas maneras se puede construir un número en el rango dado con sus cifras distintas: La primera cifra tiene tres posibilidades (4, 5 o 6), la segunda tiene 9 (cualquier dígito excepto el que se haya usado en el primer lugar) y la tercera tiene 8 (cualquiera excepto los dos primeros). Entonces la cantidad de números con las tres cifras distintas es $3 \times 9 \times 8$ y la probabilidad es $\frac{3 \times 9 \times 8}{300} = \frac{18}{25}$.

19. **(c)**. Llamemos b a la base buscada. Entonces $4 + 3b + 2b^2 = 123$, de donde $b(3 + 2b) = 119 = 7 \times 17$. Observamos entonces que $b = 7$ es la solución de la ecuación.

20. **(a)**. Tenemos que $x+\frac{1}{x}=3$, así que $27=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}=(x^3+\frac{1}{x^3})+3(x+\frac{1}{x})=(x^3+\frac{1}{x^3})+9$. Entonces $x^3+\frac{1}{x^3}=27-9=18$.

21. **(d)**. Observemos primero que en un cuadrado de lado a que tenga sus lados horizontales y verticales se pueden inscribir a cuadrados, puesto que cada elección de uno de los a vértices indicados en la figura nos da un cuadrado (por ejemplo el cuadrado dibujado en la figura está dado por la elección del segundo vértice).



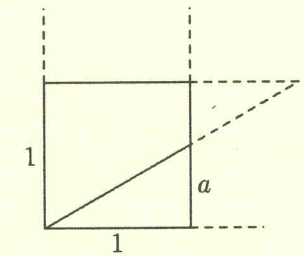
Ahora contemos cuántos cuadrados de cada tamaño hay con lados horizontales y verticales.

De tamaño 1×1 hay 16,
de tamaño 2×2 hay 9,
de tamaño 3×3 hay 4 y
de tamaño 4×4 hay 1.

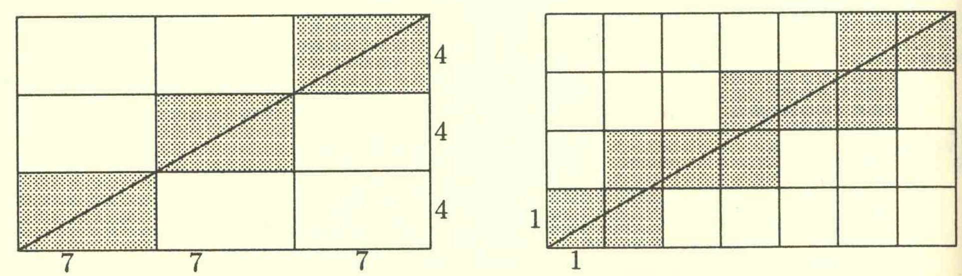
Entonces el número total de cuadrados es $16+9\times 2+4\times 3+1\times 4=50$.

22. **(d)**. Tenemos que $3y^2=(x+y)^2$, de donde $\frac{x+y}{y}=\sqrt{3}$, así que $\frac{x}{y}=\sqrt{3}-1$.

23. **(c)**. Suponiendo que los cuadrados miden 1, veamos cuál es la distancia a de la intersección de la diagonal con el primer cuadrado: $\frac{12}{21} = \frac{a}{1}$, de donde $a = \frac{4}{7}$.

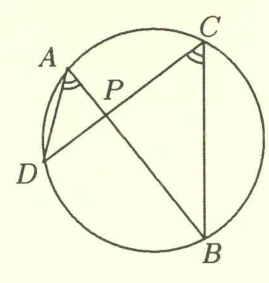


Entonces las distancias en las que la diagonal va intersectando cada vertical son: $\frac{4}{7}$, $1+\frac{1}{7}$, $1+\frac{5}{7}$, $2+\frac{2}{7}$, $2+\frac{6}{7}$, $3+\frac{3}{7}$, 4 y de aquí en adelante la situación se repetirá otras dos veces más en rectángulos de 4×7.



En cada uno de los rectángulos de 4×7 contamos 10 cuadrados intersectados así que en total hay 30.

24. **(c)**. Los triángulos ΔAPD y ΔCPB son semejantes por tener sus ángulos iguales (por ejemplo $\angle DAB = \angle DCB$ porque abarcan el mismo arco). Además en esta semejanza AP corresponde a CP, así que la razón de semejanza es $\frac{2}{5}$; entonces la razón entre las áreas es $\left(\frac{2}{5}\right)^2$, así que el área de ΔPCB es $8\left(\frac{5}{2}\right)^2 = 50$.



25. **(c)**. Para asegurar el gane deben quedar 5 fichas en el antepenúltimo tiro (así, cualquier cantidad que el otro tome en el penúltimo tiro, uno la puede completar para llevarse todas). De la misma manera, deben dejarse 10 fichas dos tiros antes, así que uno deberá tomar 3 fichas al inicio.

26. **(d)**. Consideremos los siguientes casos:

Los caminos que no pasan por el centro son 2.

Los caminos que pasan a la primera por el centro (es decir, que de A se van directo al centro) son 5 (uno por cada una de las otras líneas que salen del centro).

Los caminos que pasan a la segunda por el centro (o sea, después de recorrer dos segmentos) son 8 (hay 2 posibilidades para llegar al centro y luego hay 4 posibilidades para salir de él).

Los caminos que pasan a la tercera por el centro son 6 (hay 2 posibilidades para llegar al centro y luego hay 3 posibilidades para salir de él).

Entonces en total son 21.

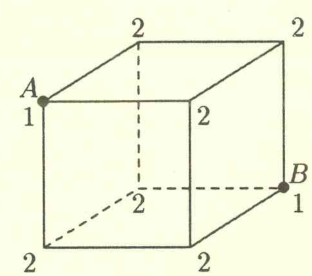
27. **(b)**. Tenemos que $x^2 - 45x + 25 = (x - a)(x - b)$, de donde $ab = 25$ y $a + b = 45$. Elevando al cuadrado la segunda ecuación y restándole la primera obtenemos $a^2 + ab + b^2 = 45^2 - 25 = 25(9^2 - 1) = 25 \cdot 80 = 2000$.

28. **(b)**. A los 12 segundos, la primera partícula habrá recorrido una $\frac{12}{28} = \frac{3}{7}$ parte de la circunferencia, así que la otra deberá haber recorrido el complemento, es decir, $\frac{4}{7}$. Entonces la otra partícula recorre una séptima parte de la circunferencia en 3 segundos, así que le tomará 21 segundos recorrerla toda.

29. **(a)**. Recordemos los criterios de división: Un entero a es divisible:
entre 2 si y sólo si a termina en 0, 2, 4, 6 u 8;
entre 3 si y sólo si la suma de las cifras de a es divisible por 3;
entre 4 si y sólo si el número formado por las dos últimas cifras de a lo es;
entre 5 si y sólo si termina en 0 o 5;
entre 6 si y sólo a es divisible por 2 y por 3;
entre 8 si y sólo si el número formado por las últimas tres cifras de a lo es;
entre 9 si y sólo si la suma de las cifras de a es divisible por 9;
entre 10 si y sólo si a termina en 0.

Podemos observar entonces que el número formado por las primeras 8 cifras en e inciso (d) no es divisible entre 8; en el inciso (c) no se cumple la divisibilidad entre 4 y en el inciso (b) no se cumple la divisibilidad entre 7. Se puede comprobar fácilment que el número del inciso (a) cumple todas las condiciones.

30. **(c)**. En cada extremo de las aristas verticales del cubo pongamos el siguient número: en el extremo superior pongamos el número de formas que hay para llega de A a él; en el extremo inferior escribamos el número de formas que hay par llegar de él a B. Entonces el número de caminos que bajan por una arista vertica determinada es el producto de los números que se pusieron en sus extremos, así qu el número total de caminos es $2 \times 2 + 2 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 2 = 12$.



31. **33**. En la parte de arriba hay 9 pues los cubitos que quedan encima tapa lo mismo que lo que tienen ellos mismos de superficie arriba. Cada lado tien $3 + 2 + 1 = 6$. Entonces la respuesta es $9 + 4 \times 6 = 33$.

32. **2**. Para ver esto, basta hacer la multiplicación $*444 \times 9$.

33. **45**. En un cuadrado de lado 1, hay una estrella. En un cuadrado d lado 2 hay $2^2 = 4$ mosaicos y por lo tanto, se llega hasta el mosaico que tiene 4 estrellas; si el lado es 3, se llega hasta el mosaico que tiene $3^2 = 9$ estrellas, y as sucesivamente. Entonces buscamos el menor entero d para el cual $d^2 \geq 1996$. Com $44^2 = 1936 < 1996$ y $45^2 = 2025 > 1996$, la respuesta es 45.

34. **90**. Poniendo una pirámide como la de la figura en cada cara, completamos el cubo, así que el volumen del cubo es 6 veces el de la pirámide.

35. **80**. Llamemos M a mi edad, J a la de Juan y S a la de Susana. Entonces $M = \frac{2}{3}J$, de donde $J = \frac{3}{2}M = 1.5M$ $(*)$. También $1.2S = M$ (pues mi edad es 20% más que la de Susana). Sustituyendo M en $(*)$ tenemos $J = 1.5(1.2S) = 1.8S$.

36. **6**. La rueda da tantas vueltas como veces sea mayor el perímetro del cuadrado redondeado que el de la rueda. El del cuadrado redondeado es $4 \times 2\pi + 4 \times \frac{1}{4} \times 2\pi \times 2 = 12\pi$ y el de la rueda es 2π.

37. **46**. Llamemos a, b, c, d y e a los cinco números y supongamos que los números que se eliminan son a y b. Tenemos entonces que $\frac{a+b+c+d+e}{5} = 40$ y que $\frac{c+d+e}{3} = 36$. Entonces

$$\frac{a+b}{2} = \frac{40 \times 5 - (c+d+e)}{2} = \frac{200 - 36 \times 3}{2} = 46.$$

38. **48**. Tenemos un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es un radio de la esfera y uno de cuyos catetos es radio del agujero. Entonces el otro cateto de ese triángulo mide $\sqrt{10^2 - 6^2} = 8$. A este número hay que sumarle la altura de la mesa y otro radio de la esfera para obtener la distancia buscada: $8 + 10 + 30 = 48$.

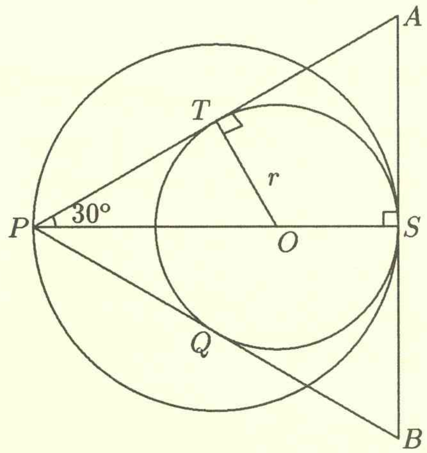
39. **24**. Recordemos que para cualquier número x se tiene que $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Entonces $999\,999\,999\,999^2 - 1 = (999\,999\,999\,999 - 1)(999\,999\,999\,999 + 1) = (999\,999\,999\,998)10^{12}$.

40. **30**. $1500 = 2^2 \times 5^3 \times 3$. Tenemos que repartir los tres $5'$s que aparecen en la factorización de 1500 entre los tres números que buscamos. Es claro que los tres no pueden quedar en un sólo número pues $5^3 = 125 > 45$. Entonces, por lo menos, dos de los números son múltiplos de 5. Pero el tercero es la diferencia de 45, que es múltiplo de 5, y la suma de los otros dos números, también múltiplo de 5. De esta manera, también ese número debe ser múltiplo de 5. Ahora ya sólo tenemos que repartir los dos $2'$s y el 3, buscando que la suma nos dé 45. Probando todas las posibilidades vemos que la única es cuando los números son 30, 10 y 5.

41. Observemos que si ponemos alguna letra igual a 7, entonces el 7 aparece en uno o dos productos, así que no puede aparecer en el tercer producto y, por ser primo, tampoco puede formarse como producto de otros números; por lo tanto ninguna letra puede sustituirse por 7; de la misma manera no se pueden poner ni el 5 ni el 0. Si ponemos $A = 9$, entonces en el producto ABC aparece por lo menos un 3^2; para que en DEF aparezca también, deberemos colocar el 3 y el 6, pero lo mismo tendremos que hacer con BGE, lo cual es imposible; entonces $A \neq 9$. Análogamente no pueden ser 9 las letras C, D, F y G, así que $B = 9$ (o $E = 9$, que es la misma situación). Por lo tanto ya no podemos poner $E = 3$ o $E = 6$, porque si lo pusiéramos, entonces el producto BGE tendría mas $3'$s que los otros productos. Por la misma razón no se puede poner 3 ni 6 en ninguna de las posiciones A, C o G, de modo que tenemos que poner $D = 3$ y $F = 6$ (o viceversa). Con esto ya es fácil poner 1, 8, 2 y 4, como se muestra en la figura.

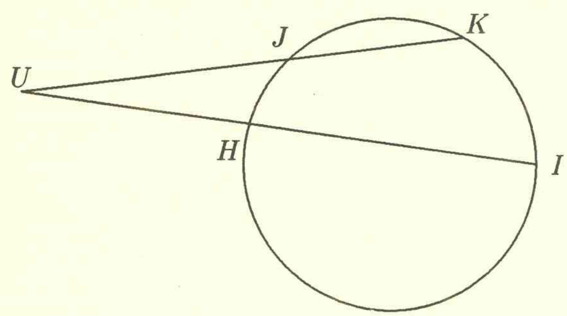
1		3
9	2	4
8		6

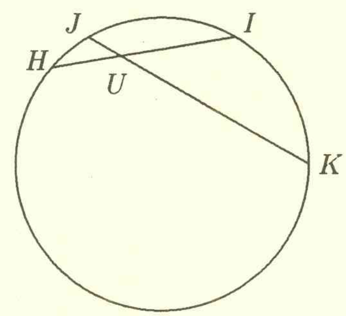
42. Llamemos R al radio del círculo mayor y r al del menor y tracemos la tangente a ambos círculos. Sean A, B y S los puntos indicados en la figura.



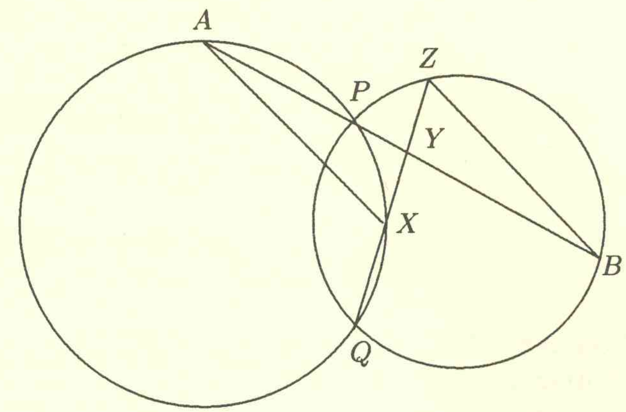
Por simetría, el segmento PS pasa por los centros de ambos círculos y el ángulo $\angle TPS$ mide 30°. Además los ángulos en T y en S son rectos, como se indica en la figura. Sea O el centro del círculo menor. Tenemos que el triángulo ΔAPB es equilátero (por tener todos sus ángulos iguales a 60°), así que $2AS = AP$. Además ΔPTO es semejante a ΔPSA, de donde $\frac{OT}{AS} = \frac{OP}{AP}$. Sustituyendo en esta ecuación AP por $2AS$, OP por $2R - r$ y OT por r, tenemos $\frac{r}{AS} = \frac{2R-r}{2AS}$, y de aquí que $2r = 2R - r$, de donde $r = \frac{2}{3}R$. Por otro lado sabemos que $\pi R^2 = 1$, de donde el área del círculo menor es $\pi r^2 = \pi \frac{4}{9}\frac{1}{\pi} = \frac{4}{9}$.

43. Usaremos el siguiente resultado cuya demostración es sencilla utilizando semejanza de triángulos: *Si U es un punto no sobre una circunferencia y H, I y J y K son puntos sobre la circunferencia de tal manera que las rectas HI y JK pasan por U, entonces $UH \cdot UI = UJ \cdot UK$; a este valor constante se le llama potencia de U a la circunferencia.*





La potencia de Y a $\mathcal{C}$ nos da $YX \cdot YQ = YP \cdot YA$, y la potencia de Y a $\mathcal{D}$ nos da $YZ \cdot YQ = YP \cdot YB$. Combinando las dos ecuaciones tenemos $\frac{YZ}{YB} = \frac{YX}{YA}$; entonces ΔYZB y ΔYXA son dos triángulos con un ángulo igual y los lados que lo forman, proporcionales, así que son semejantes; además los triángulos tienen iguales dos lados que corresponden a la semejanza ($AY = YB$), así que los dos triángulos son iguales y $XY = YZ$.



44. Suponiendo que todos recorrieron 9 cuadras por lo menos, tenemos que cada uno pasó por 10 esquinas o más; pero como no caminaron sobre la calle F, entonces cada uno pasó por 9 esquinas por lo menos hasta la calle E, así que entre todos cubrieron la vigilancia de 36 esquinas (al menos). Sin embargo, entre la calle A y la calle E hay sólo 35 esquinas en total, así que no es posible que todos hubieran recorrido 9 cuadras por lo menos.

45. Llamemos a y b a los dígitos y N al número, de manera que $N = 10a + b$ y $N = 3(a+b)$. Igualando tenemos $10a + b = 3a + 3b$, de donde $7a = 2b$. Entonces $2b$ es múltiplo de 7, así que b mismo debe serlo; pero b es dígito, así que $b = 7$ y entonces $a = 2$, de donde $N = 27$.

46. Sea D_n el número de personas que conocen el rumor el día n. Como cada día se duplica el número de personas que conocen el rumor, excepto por las que llevan un solo día de conocerlo, tenemos que D_n es la diferencia entre el doble de las personas que conocían el rumor el día anterior ($2D_{n-1}$) y las que se enteraron del rumor el día anterior ($D_{n-1} - D_{n-2}$). Entonces $D_n = 2D_{n-1} - (D_{n-1} - D_{n-2}) = D_{n-1} + D_{n-2}$. Sabemos que $D_1 = 1$ y $D_2 = 1$, y los demás D_n se pueden conocer usando la relación que acabamos de obtener, es decir, sumando siempre los dos anteriores. Entonces los primeros 20 D_n son:

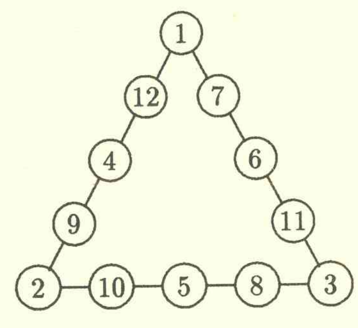
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765.$$

Entonces $D_{20} = 6765$.

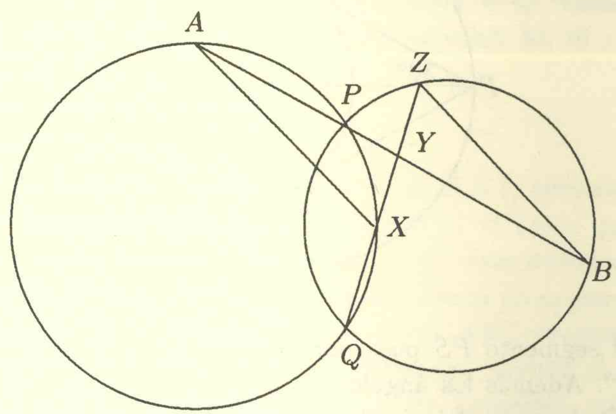
47. Observemos que $1 + 2 + \cdots + 12 = \frac{13 \times 12}{2} = 78$.

(i) Supongamos que sí es posible lograr que las sumas sean 27, y sean a, b y c los números que quedan colocados en los vértices del triángulo. Entonces en los lados del triángulo sin contar los extremos las sumas son $27 - a - b$, $27 - b - c$ y $27 - c - a$. Entonces $a + b + c + (27 - a - b) + (27 - b - c) + (27 - c - a) = 78$, por tanto $3 \times 27 - (a + b + c) = 78$, de donde $a + b + c = 3$, lo cual es imposible.

(ii) Para ver que sí es posible con 28 consideremos la suma como arriba; en este caso $3 \times 28 - (a + b + c) = 78$, por lo que $a + b + c = 6$. Pongamos $a = 1$, $b = 2$ y $c = 3$. Entonces las sumas en los lados sin considerar los extremos deben ser 25, 24 y 23. Pongamos 12 en el lado con suma 25, 11 en el que tiene suma 24 y 10 en el de suma 23; entonces en las casillas que sobran en cada lado la suma debe ser 13, lo cual se logra como $4 + 9$, $5 + 8$ y $6 + 7$ como se muestra en el esquema.



La potencia de Y a $\mathcal{C}$ nos da $YX \cdot YQ = YP \cdot YA$, y la potencia de Y a $\mathcal{D}$ nos da $YZ \cdot YQ = YP \cdot YB$. Combinando las dos ecuaciones tenemos $\frac{YZ}{YB} = \frac{YX}{YA}$; entonces ΔYZB y ΔYXA son dos triángulos con un ángulo igual y los lados que lo forman, proporcionales, así que son semejantes; además los triángulos tienen iguales dos lados que corresponden a la semejanza ($AY = YB$), así que los dos triángulos son iguales y $XY = YZ$.



44. Suponiendo que todos recorrieron 9 cuadras por lo menos, tenemos que cada uno pasó por 10 esquinas o más; pero como no caminaron sobre la calle F, entonces cada uno pasó por 9 esquinas por lo menos hasta la calle E, así que entre todos cubrieron la vigilancia de 36 esquinas (al menos). Sin embargo, entre la calle A y la calle E hay sólo 35 esquinas en total, así que no es posible que todos hubieran recorrido 9 cuadras por lo menos.

45. Llamemos a y b a los dígitos y N al número, de manera que $N = 10a + b$ y $N = 3(a+b)$. Igualando tenemos $10a + b = 3a + 3b$, de donde $7a = 2b$. Entonces $2b$ es múltiplo de 7, así que b mismo debe serlo; pero b es dígito, así que $b = 7$ y entonces $a = 2$, de donde $N = 27$.

46. Sea D_n el número de personas que conocen el rumor el día n. Como cada día se duplica el número de personas que conocen el rumor, excepto por las que llevan un solo día de conocerlo, tenemos que D_n es la diferencia entre el doble de las personas que conocían el rumor el día anterior ($2D_{n-1}$) y las que se enteraron del rumor el día anterior ($D_{n-1} - D_{n-2}$). Entonces $D_n = 2D_{n-1} - (D_{n-1} - D_{n-2}) = D_{n-1} + D_{n-2}$. Sabemos que $D_1 = 1$ y $D_2 = 1$, y los demás D_n se pueden conocer usando la relación que acabamos de obtener, es decir, sumando siempre los dos anteriores. Entonces los primeros 20 D_n son:

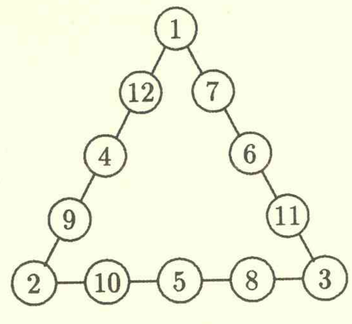
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765.$$

Entonces $D_{20} = 6765$.

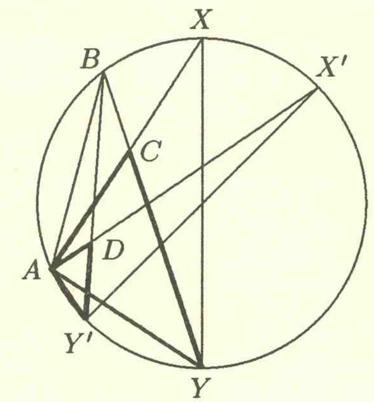
47. Observemos que $1 + 2 + \cdots + 12 = \frac{13 \times 12}{2} = 78$.

(i) Supongamos que sí es posible lograr que las sumas sean 27, y sean a, b y c los números que quedan colocados en los vértices del triángulo. Entonces en los lados del triángulo sin contar los extremos las sumas son $27 - a - b$, $27 - b - c$ y $27 - c - a$. Entonces $a + b + c + (27 - a - b) + (27 - b - c) + (27 - c - a) = 78$, por tanto $3 \times 27 - (a + b + c) = 78$, de donde $a + b + c = 3$, lo cual es imposible.

(ii) Para ver que sí es posible con 28 consideremos la suma como arriba; en este caso $3 \times 28 - (a + b + c) = 78$, por lo que $a + b + c = 6$. Pongamos $a = 1$, $b = 2$ y $c = 3$. Entonces las sumas en los lados sin considerar los extremos deben ser 25, 24 y 23. Pongamos 12 en el lado con suma 25, 11 en el que tiene suma 24 y 10 en el de suma 23; entonces en las casillas que sobran en cada lado la suma debe ser 13, lo cual se logra como $4 + 9$, $5 + 8$ y $6 + 7$ como se muestra en el esquema.

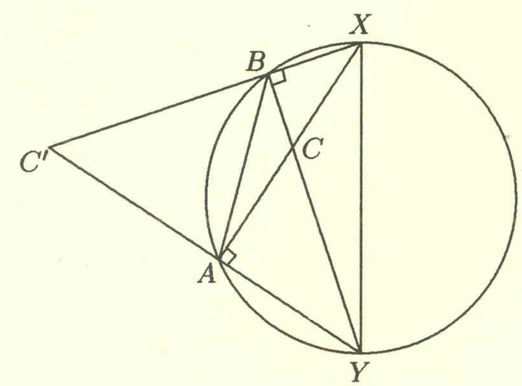


48. Consideremos un punto C construido de esta manera, pero en el interior del círculo.

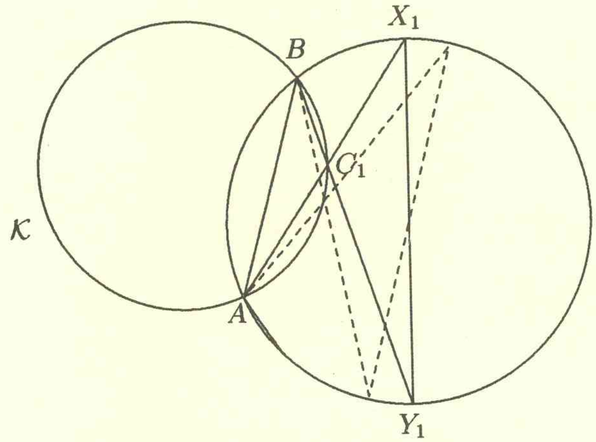


Observemos que ΔABC es semejante a ΔYXC por tener ángulos iguales (según el teorema de ángulos en círculos). Por tanto $\frac{AB}{XY} = \frac{AC}{YC}$. Pero $\frac{AB}{XY}$ es constante, así que si $X'Y'$ es otro diámetro que produce el punto interior al círculo D, tendremos $\frac{AC}{YC} = \frac{AD}{Y'D}$. Ahora, ΔACY y $\Delta ADY'$ son triángulos rectángulos en A (ya que XY y $X'Y'$ son diámetros y C pertenece al segmento XY y D pertenece a $X'Y'$); pero estos triángulos tienen proporcionales un cateto y la hipotenusa, así que son semejantes (es inmediato usando Pitágoras que los otros catetos guardan la misma proporción). Pero entonces $\angle ACB = 180^\circ - \angle ACY = 180^\circ - \angle ADY' = \angle ADB$, de donde C y D están sobre un mismo arco de círculo que pasa por A y B.

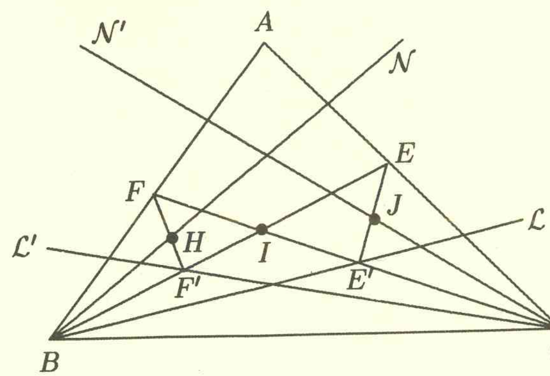
Ahora, dado C interior al círculo obtenido a partir del diámetro XY consideremos el punto (exterior al círculo) que se obtiene intercambiando los papeles de X y Y. Entonces el cuadrilátero $ACBC'$ es cíclico porque los ángulos en A y en B son rectos.



Afirmamos entonces que el círculo $\mathcal{K}$ que pasa por A, B y el punto C obtenido como la intersección de AX y BY cuando XY es el diámetro paralelo a AB es el lugar geométrico buscado. Ya sabemos por lo de arriba que el lugar geométrico está contenido en $\mathcal{K}$ y nos falta analizar la otra contención. Sea C_1 sobre $\mathcal{K}$ y sea X_1 la intersección de la recta AC_1 con la circunferencia original; ahora consideremos el diámetro X_1Y_1. Este diámetro determina un punto C_1' que está sobre AX_1 y, como vimos arriba, sobre $\mathcal{K}$, pero entonces $C_1 = C_1'$, de donde C_1 es un punto en el lugar geométrico.

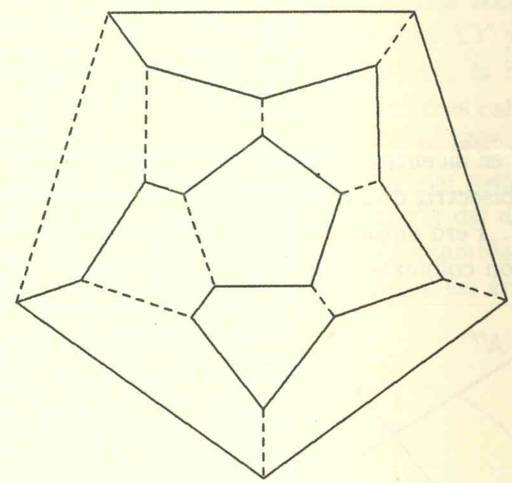


49. Notemos que E' es incentro de ΔEBC (pues el la intersección de dos bisectrices); entonces EE' es bisectriz de $\angle BEC$ y J es incentro de ΔEIC. Análogamente H es incentro de ΔFBI. Pero entonces HI es bisectriz de $\angle FIB$ y también JI lo es, por tanto H, I y J son colineales.

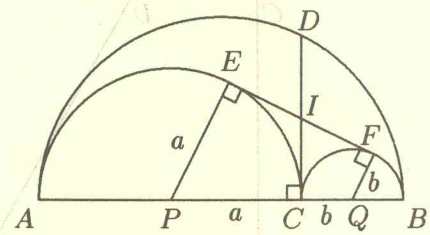


50. Recordemos que un dodecaedro tiene 12 caras, cada una de las cuales es un pentágono; además a cada vértice llegan exactamente tres aristas. Entonces el número de vértices es $\frac{12\times 5}{3} = 20$. Un camino que pase por todos los vértices exactamente una vez debe usar 20 aristas (una por cada vértice). Supongamos que en cada cara se utilizan a lo más tres aristas; pero entonces, puesto que son 12 caras y cada arista pertenece a 2 caras exactamente, el número total de aristas usadas será a lo más $\frac{12\times 3}{2} = 18$, lo cual contradice el hecho de que deben usarse 20 aristas; con esto hemos probado que el camino utiliza por lo menos 4 aristas de alguna cara; pero entonces es claro que deben ser consecutivas por lo siguiente: Cada vez que el camino llega a un vértice, debe salir, y como a cada vértice llegan 3 aristas, una queda sin usar, de manera que si 4 aristas de una cara se usaron, esto debe haber sido en forma consecutiva (porque una vez que se sale de un vértice ya no se puede volver a entrar).

Para construir el camino nos podemos apoyar en el resultado recién obtenido. Indicamos un camino en el esquema en el que se ha aplanado el dodecágono (una cara es el pentágono más grande (quedaría por atrás al desaplanarlo).



51. Llamemos I al punto de intersección de EF con DC. Como IC e IE son tangentes, entonces estos segmentos tienen la misma longitud. Por la misma razón, $IC = IF$. Entonces I es el centro del círculo que pasa por E, C y F, así que sólo tenemos que probar que $DC = EF$. Tracemos los radios EP y FQ y sean $a = EP = PC$ y $b = FQ = QC$. Como los ángulos en E y en F son rectos, tenemos que $EF^2 + (a-b)^2 = (a+b)^2$ (para ver esto, basta trazar una paralela a EF por Q y aplicar Pitágoras al triángulo formado con P y Q). Entonces $EF = \sqrt{4ab}$. Por otra parte, como AB es diámetro, los triángulos ΔABD y ΔADC y ΔDBC, son semejantes, de aquí que $\frac{AC}{DC} = \frac{DC}{BC}$, de manera que $DC = \sqrt{AC \cdot BC} = \sqrt{4ab}$. Comparando con lo que habíamos obtenido tenemos que $DC = EF$, como queríamos.

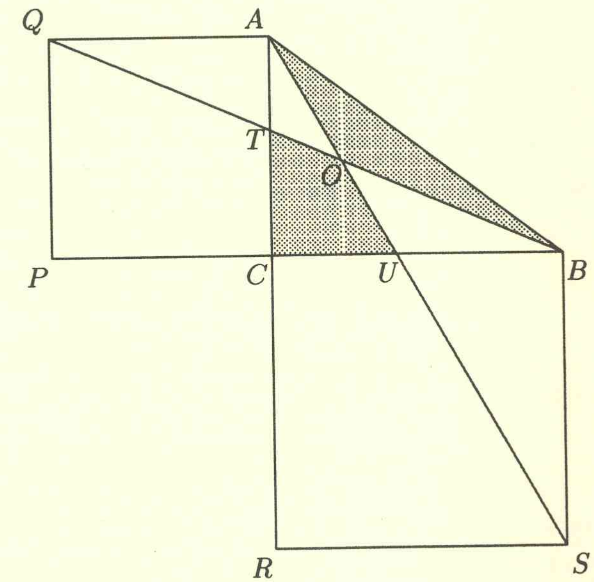


Hemos demostrado entonces que C, D, E, y F están en una circunferencia de radio $\sqrt{ab}$, en consecuencia su área es igual a πab. Por otra parte, el área de la región comprendida entre los círculos es la diferencia entre el área de la semicircunferencia mayor y la suma de las áreas de las dos pequeñas, esto es, $\frac{\pi(a+b)^2}{2} - (\frac{\pi(a^2+b^2)}{2}) = \pi ab$.

52. (i) Observemos que $1 + 2 + 3 + \cdots + 50 = \frac{50 \times 51}{2} = 25 \times 51$. Supongamos que sí es posible repartir la herencia y llamemos a al valor total que recibiría el hijo menor. Entonces $a + 2a = 25 \times 51$, de donde $a = 425$. Queremos ver si es posible que la suma de ciertos números del 1 al 50 nos dé 425. Observemos que $50 + 49 + \cdots + 42 = 414$, así que es fácil lograr 425 usando los objetos que valen de 42 a 50 quacks y el que vale 11.

(ii) En el caso que se elimine el objeto que vale 50 quacks, el razonamiento de arriba nos llevaría a la ecuación $3a = 1 + 2 + 3 + \cdots + 49 = \frac{49 \times 50}{2} = 49 \times 25$; pero 49×25 no es múltiplo de 3, así que no puede ser igual a $3a$ (pues a debe ser entero). Entonces en este caso no es posible.

53. Observemos que para probar que el área del cuadrilátero $OTCU$ es igual a la del triángulo ΔOAB, basta probar que son iguales las áreas de los triángulos ΔTCB y ΔAUB, (pues a ambas se les suma el área de ΔOUB). Calculemos estas áreas: área $(TCB) = \frac{CB\cdot TC}{2}$ y área $(AUB) = \frac{UB\cdot CA}{2} = \frac{(BC-CU)\cdot CA}{2}$.



Por otro lado, de la semejanza de ΔACU con ΔARS, tenemos que $\frac{RS}{CU} = \frac{AR}{AC} = \frac{AC+CR}{AC} = \frac{AC+CB}{AC}$, así que $CU = \frac{AC\cdot RS}{AC+CB} = \frac{AC\cdot CB}{AC+CB}$. Similarmente, de la semejanza de ΔBTC con ΔBQP, tenemos que $TC = \frac{AC\cdot CB}{AC+CB}$. Sustituyendo estos valores arriba tenemos: área $(TCB) = \frac{CB^2\cdot AC}{2(AC+CB)}$ y área $(AUB) = \frac{AC\cdot CB}{2} - \frac{AC^2\cdot CB}{AC+CB} = \frac{CB^2\cdot AC}{2(AC+CB)}$.

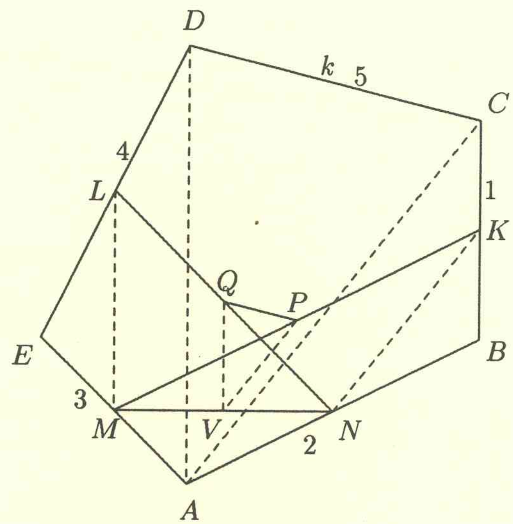
54. Observemos que en cada paso, cada segmento mide una tercera parte del anterior. Así en el primer paso los segmentos miden 1, en el segundo miden $\frac{1}{3}$, en el tercero $\frac{1}{9}$ y en el cuarto $\frac{1}{27}$. Además, el número de segmentos se multiplica por 4 con respecto al del paso anterior. Entonces, en el segundo paso hay 12 segmentos, en el tercero hay 48 y en el cuarto hay 192. Entonces el perímetro es $\frac{192}{27}$.

55. Observemos que en el primer minuto el caminante recorre $\frac{1}{60}$ km; el segundo minuto recorre $\frac{2}{60}$ km, etc. Buscamos el minuto n en el que llega al kilómetro exacto, es decir, n es máxima tal que

$$\frac{1}{60} + \frac{2}{60} + \cdots + \frac{n}{60} \leq 1.$$

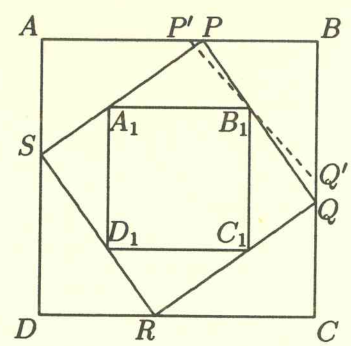
Entonces $\frac{n(n+1)}{2} \leq 60$. Como $10 \times 11 = 110$ y $11 \times 12 = 132$, la n buscada es 10.

56. Le ponemos nombres a los puntos como se indica en la figura y sea V el punto medio de MN.



Como K y N son puntos medios, los triángulos ΔABC y ΔNBK son semejantes en proporción 2:1, de donde $AC \parallel NK$ y $NK = \frac{1}{2}AC$. Puesto que P y V también son puntos medios, los triángulos ΔKMN y ΔPMV también son semejantes en proporción 2:1, de manera que $PV \parallel KN$ y $PV = \frac{1}{2}KN$, y así $PV \parallel CA$ y $PV = \frac{1}{4}CA$. Similarmente $QV \parallel DA$ y $QV = \frac{1}{4}DA$; esto implica que los triángulos ΔDAC y ΔQVP son semejantes en proporción 4:1; por tanto $QP = \frac{1}{4}DC = \frac{k}{4}$.

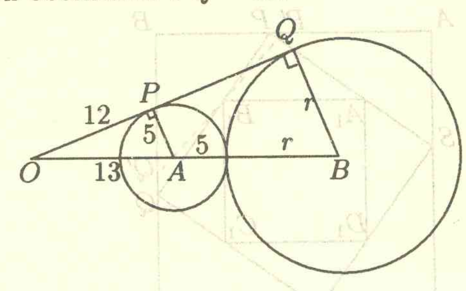
57. Primero probaremos que $AS = PB$. Supongamos que esto no ocurre; por ejemplo, que $AS > PB$. Dibujemos un punto P' en AB de tal forma que $AS = P'B$. Localicemos un punto Q' sobre BC de tal manera que los triángulos $\Delta P'BQ'$ y ΔSAP sean congruentes.



Por la simetría de los cuadrados, el punto B_1 está en el segmento $P'Q'$. Puesto que $PB < P'B$, entonces $BQ' < BQ$, así que $CQ' > CQ$. Por otro lado, la congruencia de los triángulos nos dice que $AP = BQ'$ y, como $AB = BC$, así que $CQ' = PB$; combinando tenemos que $PB > CQ$. Por argumentos similares, $QC > DR$ y $DR > AS$. Entonces $AS > PB > QC > DR > AS$, lo cual es un absurdo que surgió de suponer que $AS \neq PB$, por tanto $AS = PB$. Similarmente $PB = QC = DR$. De aquí también tenemos que $AP = BQ = CR = DS$. Entonces los cuatro triángulos de las esquinas son rectángulos y tienen sus respectivos catetos iguales, por tanto son todos triángulos congruentes; en particular $SP = PQ = QR = RS$. Además $\angle APS + \angle QPB = 90^o$, así que $\angle SPQ = 90^o$. Análogamente, $\angle PQR = \angle QRS = \angle RSP = 90^o$. Concluimos entonces que $PQRS$ es un cuadrado.

58. Primero determinemos el tiempo de vuelo. Como lo mismo que se pierde en un viaje se gana en el otro, el tiempo de vuelo será el promedio entre las diferencias que en un principio parece que hay. En el vuelo de ida, de las 6:25 de la mañana de un día a las 2:10 de la tarde del siguiente hay 31:45 horas. De la 1:35 de la tarde de un día a las 3:20 de la tarde del mismo día hay 1:45 horas. El promedio entre 1:45 y 31:45 es de 16:45, que es el tiempo real de vuelo. Entonces, el vuelo que sale a las 6:25 de México llega 16:45 horas más tarde, es decir, a las 11:10 de la noche del mismo día (hora de México) que, según el enunciado del problema, corresponde a las 2:10 de la tarde del día siguiente, lo cual representa un adelanto de 15 horas del horario de la isla con respecto al de México. Entonces, cuando aquí son las 4 de la tarde del sábado, en la isla son las 7 de la mañana del domingo.

59. Usando Pitágoras en ΔOAP (sabemos que la tangente a un círculo en un punto es perpendicular al radio en ese punto), tenemos que $OA = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$. Pero los triángulos OPA y OQB son semejantes, así que $\frac{13+5+r}{r} = \frac{13}{5}$, donde r es el radio del círculo mayor. Despejando r de esta ecuación obtenemos $r = \frac{45}{4}$. Otra vez usemos que los triángulos son semejantes para obtener $\frac{12+PQ}{\frac{45}{4}} = \frac{12}{5}$. Despejando PQ de esta ecuación obtenemos $PQ = 15$.



60. Observemos primero que $44 \times 49 = 2156$, así que los números que buscamos están entre 1900 y 2156. Hagamos una tabla fijando uno de los números y viendo el rango que debe tener el otro número para que el producto se encuentre entre 1900 y 2156.

primer no.	rango segundo no.	posibilidades	producto
4	$475-539$	–	–
9	$212-239$	–	–
10	$190-215$	$190, 191, 194, 199$	$1900, 1910, 1940, 1990$

A partir de aquí podremos continuar la tabla con rango 1990-2156:

primer no.	rango segundo no.	posibilidades	producto
11	$181-196$	$190, 191, 194$	$2090, -$(mayores)
14	$143-154$	$144, 149$	$2016, -$(mayores)

A partir de aquí continuemos la tabla con rango 1990-2016:

primer no.	rango segundo no.	posibilidades	producto
19	$105-106$	–	–
40	50	–	–
41	49	49	2009

A partir de aquí continuemos la tabla con rango 1990-2009:

primer no.	rango segundo no.	posibilidades	producto
44	–	–	–

Los números a partir del 49 ya se habían considerado pues aparecían como segundos números, así que aquí termina nuestra tabla y los números buscados son 1990 y 2009.

61. Escribamos cada número del 2 al 10 como producto de números primos: 2, 3, $4 = 2^2$, 5, $6 = 2 \times 3$, 7, $8 = 2^3$, $9 = 3^2$, $10 = 2 \times 5$. Entonces el producto de todos los enteros del 1 al 10 es $2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$. Los cocientes enteros $\frac{p_A}{q_A}$ son divisores de este número y el menor cociente entero sería si $p_A = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 5040$ (y $q_A = 2^4 \times 3^2 \times 5$); esto sí es posible tomando por ejemplo (entre muchos) A como el conjunto formado por los números 2, 5, 8, 7 y 9. Entonces el cociente es 7.

62. Tenemos que $2^{x-1} \cdot x - 2^x = 2^{x-1} \cdot (x-2)$. Considerando las posibles descomposiciones en dos factores de 768: $768 = 2^8 \cdot 3 = 2^7 \cdot 6 = 2^5 \cdot 12 = \cdots$, tenemos que $x - 1 \leq 8$. Pero, si $x - 1 = 8$, entonces $x - 2 = 7 \neq 3$; si $x - 1 = 7$, entonces $x - 2 = 6$ y aquí tenemos una solución: $x = 8$. Si $x - 1 \leq 6$, entonces $x - 2 \leq 5$ que no puede ser el otro factor de 768. Entonces la única solución es $x = 8$.

60. Observemos primero que $44 \times 49 = 2156$, así que los números que buscamos están entre 1900 y 2156. Hagamos una tabla fijando uno de los números y viendo el rango que debe tener el otro número para que el producto se encuentre entre 1900 y 2156.

primer no.	rango segundo no.	posibilidades	producto
4	$475 - 539$	–	–
9	$212 - 239$	–	–
10	$190 - 215$	$190, 191, 194, 199$	$1900, 1910, 1940, 1990$

A partir de aquí podremos continuar la tabla con rango 1990-2156:

primer no.	rango segundo no.	posibilidades	producto
11	$181 - 196$	$190, 191, 194$	$2090, -$(mayores)
14	$143 - 154$	$144, 149$	$2016, -$(mayores)

A partir de aquí continuemos la tabla con rango 1990-2016:

primer no.	rango segundo no.	posibilidades	producto
19	$105 - 106$	–	–
40	50	–	–
41	49	49	2009

A partir de aquí continuemos la tabla con rango 1990-2009:

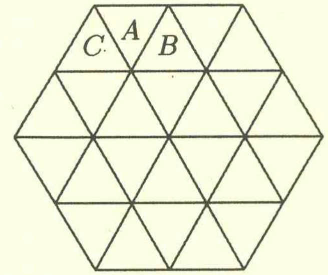
primer no.	rango segundo no.	posibilidades	producto
44	–	–	–

Los números a partir del 49 ya se habían considerado pues aparecían como segundos números, así que aquí termina nuestra tabla y los números buscados son 1990 y 2009.

61. Escribamos cada número del 2 al 10 como producto de números primos: 2, 3, $4 = 2^2$, 5, $6 = 2 \times 3$, 7, $8 = 2^3$, $9 = 3^2$, $10 = 2 \times 5$. Entonces el producto de todos los enteros del 1 al 10 es $2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$. Los cocientes enteros $\frac{p_A}{q_A}$ son divisores de este número y el menor cociente entero sería si $p_A = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 5040$ (y $q_A = 2^4 \times 3^2 \times 5$); esto sí es posible tomando por ejemplo (entre muchos) A como el conjunto formado por los números 2, 5, 8, 7 y 9. Entonces el cociente es 7.

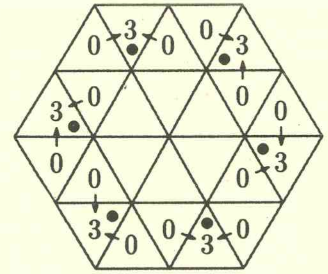
62. Tenemos que $2^{x-1} \cdot x - 2^x = 2^{x-1} \cdot (x - 2)$. Considerando las posibles descomposiciones en dos factores de 768: $768 = 2^8 \cdot 3 = 2^7 \cdot 6 = 2^5 \cdot 12 = \cdots$, tenemos que $x - 1 \leq 8$. Pero, si $x - 1 = 8$, entonces $x - 2 = 7 \neq 3$; si $x - 1 = 7$, entonces $x - 2 = 6$ y aquí tenemos una solución: $x = 8$. Si $x - 1 \leq 6$, entonces $x - 2 \leq 5$ que no puede ser el otro factor de 768. Entonces la única solución es $x = 8$.

63. Contaremos primero cuáles son las posibilidades de distribución de 0 y 3 fichas en las casillas y, según el caso, cuántas formas hubo para producir esa distribución.

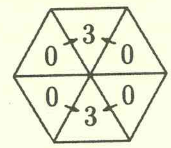


Consideremos las casillas A, B y C que se muestran en la figura y observemos que, como A sólo tiene adyacentes a B y a C y las fichas se mueven a casillas adyacentes, entonces tenemos tres casos:

(i) *En la casilla A quedan 3 fichas.* La única forma que puede quedar esta distribución es con los movimientos que se marcan con flechas en la figura, indicando con • el que la ficha correspondiente no se mueva. (Estos movimientos se deducen fácilmente determinando en orden según, por ejemplo, el sentido de las manecillas del reloj, el movimiento en cada casilla.)

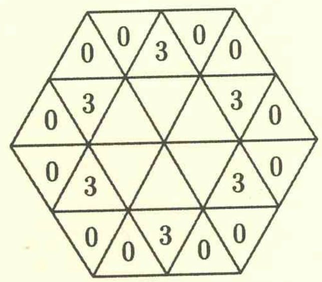


Entonces en las casillas de la orilla los movimientos quedan determinados y en el hexágono central las fichas se mueven sobre el mismo hexágono. También aquí hay varios casos, según dónde quedan 3 fichas; por ejemplo, si quedan 3 fichas en el triángulo superior, los demás están determinados como se muestra en la figura.



Observamos entonces que las casillas con 3 fichas quedan opuestas, así que tenemos 3 posibilidades en total en este primer caso.

(ii) *En la casilla A quedan 0 fichas y en la B quedan 3.* Como en el caso (i), la distribución de fichas en la orilla forzosamente queda como se muestra en la figura.

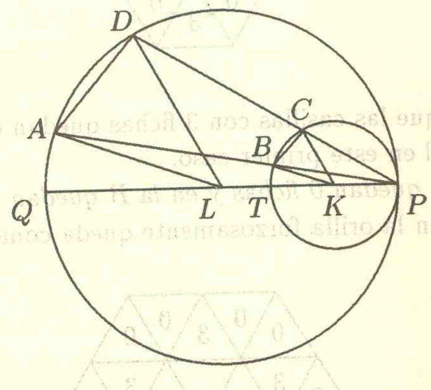


Sin embargo, en cada casilla donde quedaron 3 fichas hay 2 posibilidades: que la ficha que estaba en esa casilla se haya movido hacia el centro o que no. Como en el caso (i), en el hexágono central en algún lugar quedan 3 fichas. Entonces el número total de posibilidades en este caso es $3 \times 2 \times 2 = 12$ (el 3 es por la elección de los triángulos centrales donde quedan las 3 fichas y cada uno de los 2's es porque, como se dijo arriba, las fichas en esa casillas pueden haberse quedado o provenir de la casilla adyacente de la orilla).

(iii) *En las casillas A y B quedan 0 fichas y en la casilla C quedan 3 fichas.* Claramente éste es como (i) así que el número de posibilidades es 3.

El número total de posibilidades es $3 + 12 + 3 = 18$.

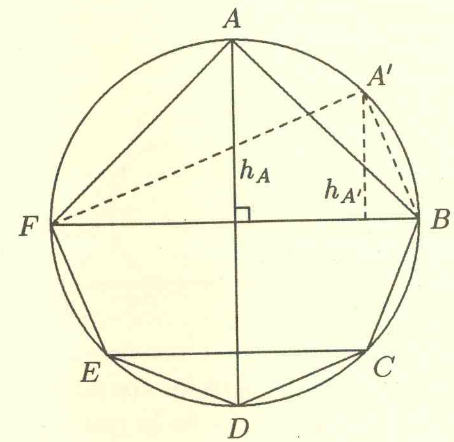
64. Sean K y L los centros de los círculos. Tenemos que P, K y L son colineales. Sean PQ y PT diámetros (como se muestra en la figura).



Entonces $\angle QLA = 2\angle QPA = 2\angle TPB = \angle TKB$. Por tanto, LA y KB son paralelos. Análogamente, $\angle QLD = \angle TKC$, de donde LD y KC son paralelos. Entonces los triángulos isósceles ALD y BKC tienen los lados iguales paralelos, de donde el tercer lado también lo tienen paralelo, esto es, $AD||BC$.

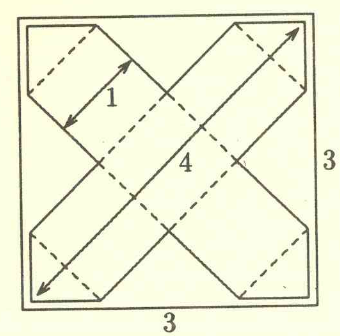
65. Habrá que presionar 1995 veces el signo +. Además, hay 9 números de una cifra (del 1 al 9), lo cual hace que se presionen 9 teclas, hay 90 números de dos cifras (del 10 al 99), lo cual hace que se presionen 180 teclas, hay 900 números de tres cifras (del 100 al 999), lo cual hace que se presionen 2700 teclas, hay 997 números de cuatro cifras (del 1000 al 1996), lo cual hace que se presionen 3988 teclas. Entonces el total de teclas que se deben presionar es 8852.

66. Si $\angle A$ es recto, entonces FB es diámetro y el área de ΔFBA es $\frac{BF \cdot h_A}{2}$, donde h_A es la altura del triángulo en A; entonces el área del triángulo es máxima cuando el triángulo es isósceles, esto es, cuando h_A es radio. Como $BC = EF$, tenemos que $EC \parallel BF$; así que para que el área del hexágono sea lo máximo posible, igual que arriba, ΔDEC debe ser isósceles. Entonces, por simetría, AD debe ser diámetro.

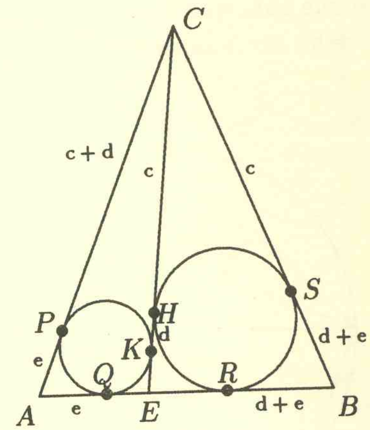


67. Sea n un entero tal que n es múltiplo de 11, $n+1$ es múltiplo de 12 y $n+2$ es múltiplo de 13. Entonces 11 es factor de $n-1$, 12 es factor de $(n+1)-(11+1)$ y 13 es factor de $(n+2)-(11+2)$, de donde $n-11$ es múltiplo de 11, 12 y 13; entonces el mínimo común múltiplo de 11, 12 y 13 (que es $11 \times 12 \times 13$) es divisor de $n-11$, lo cual implica que $n = 11 + 11 \times 12 \times 13t$ para algun entero t. Como queremos el menor n posible, debemos tomar $t = 1$. Así $n = 1727$.

68. Observemos que, por Pitágoras, la diagonal del papel mide $\sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18} > 4$, de tal manera que si el cubo se coloca diagonalmente en el centro del papel, sí será posible envolverlo como se indica con el esquema.



69. Sin pérdida de generalidad, $b \geq a$. Consideremos la siguiente figura en que P, Q, R y S son los puntos de intersección de las circunferencias con los lados del triángulo.



Recordemos que si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan las tangentes a ella, entonces las distancias del punto a los dos puntos de tangencia son iguales. Aplicaremos este resultado repetidas veces en lo que sigue. Sean $c = CH = CS$, $d = HK$ y $e = AP = AQ$. Entonces $PC = CK = c{+}d$. Pero el triángulo es isósceles, así que $SB = d + e$. Entonces $RB = SB = d + e$. Por otro lado, $KE = EQ = a - e$ y, como $EH = ER = b - (d + e)$, entonces $d + (a - e) = b - (d + e)$. Despejando d de esta última ecuación, tenemos $d = \frac{b-a}{2}$.

70. Tenemos que en x días A pinta $\frac{x}{10}$ de casa y B pinta $\frac{x}{12}$ de casa. Queremos encontrar x tal que $\frac{x}{10} + \frac{x}{12} = 1$. Entonces $6x + 5x = 60$, de donde $x = \frac{60}{11} = 5 + \frac{5}{11}$ y ésta es la respuesta.

71. Las siguientes igualdades son equivalentes:

$$\frac{1}{2}\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2,$$

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=4-\sqrt{7-4\sqrt{3}},$$

$$7+4\sqrt{3}=16-8\sqrt{7-4\sqrt{3}}+(7-4\sqrt{3}),$$

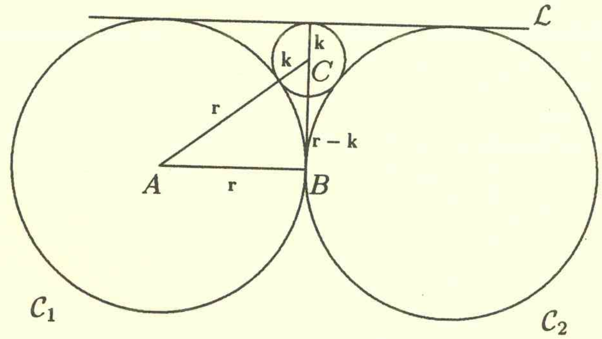
$$8\sqrt{7-4\sqrt{3}}=16-8\sqrt{3},$$

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2-\sqrt{3},$$

$$7-4\sqrt{3}=4-4\sqrt{3}+3.$$

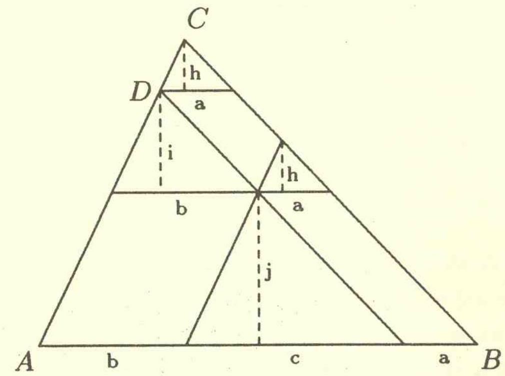
Como la última igualdad es claramente cierta, entonces también lo es la primera. (*Nota:* Es necesario aquí aclarar lo siguiente: En general, la igualdad $x^2 = y^2$ no es equivalente a la igualdad $x = y$ sino más bien a la igualdad $|x| = |y|$; sin embargo, observemos que en la segunda y en la quinta igualdad de arriba, en donde elevamos al cuadrado, los términos son positivos, así que las igualdades obtenidas son equivalentes, respectivamente.)

72. Sean A y C los centros de las circunferencias y sea B el punto de tangencia de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, como se indica en la figura.



Entonces ΔABC es un triángulo rectángulo y si k es el radio buscado, entonces $AC = r+k$, $AB = r$ y $BC = r-k$. Entonces, por Pitágoras, $(r+k)^2 = r^2+(r-k)^2$, de donde $r^2+2rk+k^2 = r^2+r^2-2rk+k^2$, así que $4rk = r^2$ y $k = \frac{r}{4}$.

73. Sean a, b y c las bases de los triángulos de áreas 1, 4 y 9, como se indica en la figura de manera que a y b sean colineales; sin pérdida de generalidad supongamos que $a \,||\, AB$, y sean h, i y j las respectivas alturas. Sea D el vértice del triángulo de área 4 opuesto a la base b; sin pérdida de generalidad, D está sobre AC.



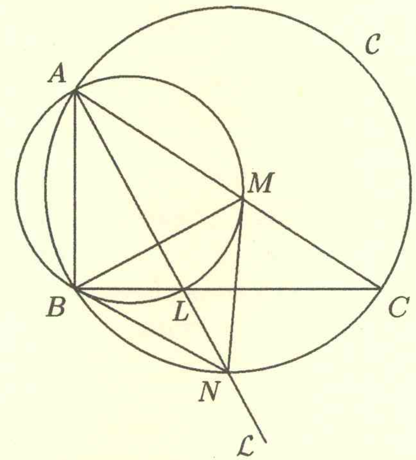
Por D tracemos una paralela a AB. Entonces el nuevo triángulo formado con esta recta y C es igual al triángulo de área 1 (pues se forma un paralelogramo). Entonces su altura en el vértice C también es h. Así la altura de ΔABC es $h+i+j$ y la base que le corresponde es $a+b+c$. Ahora, los triángulos son todos semejantes y la razón de proporción entre sus lados (y entre sus alturas) es la raíz cuadrada de la razón entre sus áreas (en general, si ΔPQR y $\Delta P'Q'R'$ y son dos triángulos semejantes con razón de semejanza r entre sus lados y si k y k' son las respectivas alturas por P y P', entonces $r \cdot k' = k$ y $r \cdot Q'R' = QR$, de donde el área de ΔPQR es r^2 veces el área de $\Delta P'Q'R'$). Entonces $b = 2a$, $c = 3a$, $i = 2h$ y $j = 3h$, de donde el área de ΔABC es

$$\frac{(a+b+c)(h+i+j)}{2} = \frac{6a \cdot 6h}{2} = 36 \cdot \frac{ah}{2} = 36.$$

74. (i) Tomemos tres enteros positivos consecutivos $n-1$, n y $n+1$. Entonces su producto es $n^3 - n$. Ahora observemos que $(n-1)^3 < n^3 - n < n^3$ (la segunda desigualdad es clara; para ver la primera, notemos que $(n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1$, así que basta probar que $-3n^2 + 3n - 1 < -n$, esto es, $3n^2 - 4n + 1 > 0$, es decir, $(n-1)(3n-1) > 0$; pero ésta última es clara pues ambos factores son positivos ya que $n \geq 2$). Entonces $n^3 - n$ no puede ser el cubo de un entero pues se encuentra entre dos cubos consecutivos que son $(n-1)^3$ y n^3.

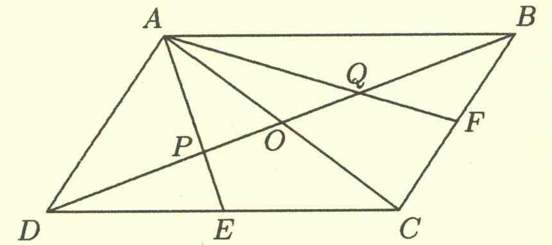
(ii) Supongamos que $2p + 1 = A^3$, con A entero. Notemos que entonces A es impar. Despejando p tenemos $p = \frac{A^3-1}{2} = \left(\frac{a-1}{2}\right)(A^2 + A + 1)$. Pero p es primo y $\frac{A-1}{2}$ es entero (pues A es impar), así $\frac{A-1}{2} = 1$ o $A^2 + A + 1 = 1$; como la segunda ecuación es imposible ($A > 0$), entonces $A - 1 = 2$, así $2p + 1 = 27$ y $p = 13$.

75. Observemos que área$(ABNM)$ = área(ABM)+ área(BMN), y también que área(ABC) = área(ABM)+ área(BMC), así que basta probar que ΔBMN y ΔBMC tienen la misma área. Estos dos triángulos tienen una base común BM, por lo que basta probar que la distancia de N a BM es la misma que la de C a BM, esto es, que $NC \parallel BM$. Por hipótesis, $\angle BAN = \angle NAC = \angle LAC$. Pero $\angle LAC = \angle LAM = \angle LBM$ (por abarcar los mismos arcos) y también $\angle BAN = \angle BCN$, de donde, comparando tenemos $\angle MBC = \angle BCN$, y de aquí, por el teorema de Tales, $CN \parallel BM$, como queríamos probar.

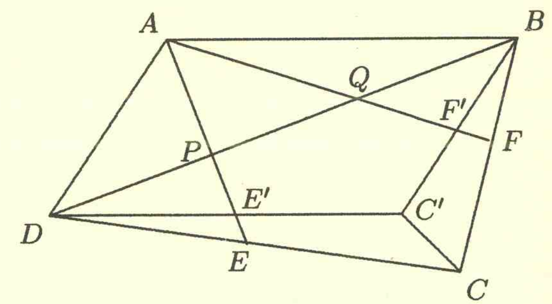


76. Observemos que la única manera en que se pueden cumplir simultáneamente las dos condiciones $a > b > c$ y que a sea factor de $b + c$ es que $b + c = a$. Entonces $a + c = b + 2c$ y, como b es divisor de $a + c$, entonces b debe ser divisor también de $2c$; otra vez, ésta última condición junto con la hipótesis $b > c$ nos dice que $b = 2c$. Por tanto $a = b + c = 3c$. Entonces $\frac{abc}{a+b+c} = \frac{6c^3}{6c} = c^2$.

77. Supongamos primero que $ABCD$ es paralelogramo y sea O la intersección de las diagonales; entonces O es punto medio de AC y de BD (pues los triángulos ΔAOD y ΔCOB son iguales por tener sus ángulos iguales y puesto que $AD = BC$). Entonces BO es mediana del triángulo ABC. Pero P divide a esta mediana en proporción 2:1, así que P es baricentro del triángulo, de donde AP es mediana y E es punto medio de BC. Por la misma razón F es punto medio de CD.



Ahora supongamos que E y F son los puntos medios de BC y CD, respectivamente, pero que $ABCD$ no es paralelogramo. Sea C' el punto tal que $ABC'D$ es paralelogramo y sean E' y F' los respectivos puntos de intersección de AP con BC' y de AQ con DC', como se muestra en la figura.



Por el inciso anterior, E' es punto medio de BC', así que los triángulos $\Delta BC'C$ y $\Delta BE'E$ son semejantes en proporción 2:1 (tienen dos lados en esta razón y el ángulo comprendido entre ellos es el mismo); entonces tenemos que $E'E$ y $C'C$ son paralelas. Análogamente, $F'F$ y $C'C$ son paralelas. Combinando tenemos que $E'E \,||\, F'F$; pero estas dos rectas se intersectan en A así que no pueden ser paralelas, contradiciendo la suposición que hicimos de que $ABCD$ no era paralelogramo.

78. Hagamos un ejemplo pensando que fueran $2^4 = 16$ casillas, en lugar de $2^6 = 64$ casillas, para analizar qué pasa con una potencia 2^n de 2 cualquiera. Tenemos la siguiente tabla en la que indicamos con • cuando una ficha ocupa el mismo lugar que la ficha #1.

ficha — posición en los primeros 16 minutos — coincidencias

ficha																	coincidencias
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
2	2	4	6	8	10	12	14	16	2	4	6	8	10	12	14	•	1
3	3	6	9	12	15	2	5	•	11	14	1	4	7	10	13	•	2
4	4	8	12	16	4	8	12	16	4	8	12	16	4	8	12	•	1
5	5	10	15	•				•				•				•	4
6																•	1
7								•								•	2
8																•	1
9		•		•		•		•		•		•		•		•	8
10																•	1
11								•								•	2
12																•	1
13				•				•				•				•	4
14																•	1
15								•								•	2
16																•	1

Observamos que 8 (2^{n-1}) números tienen 1 coincidencia; 4 (2^{n-2}) números tienen 2 coincidencias; 2 (2^{n-3}) números tienen 4 coincidencias, y 1 (2^{n-4}) números tienen 8 coincidencias. En general, en el minuto 2^n habrá habido $n \cdot 2^{n-1}$ coincidencias. (Formalmente: La ficha $\#k$ comparte la casilla r con la ficha #1 si y sólo si $2^n \mid rk - r = r(k-1)$. Si 2^h es la máxima potencia de 2 que divide a $k-1$, entonces la menor r para la cual $2^n \mid r(k-1)$ es 2^{n-h}, así que en el minuto 2^n hay $\frac{2^n}{2^{n-h}} = 2^h$ coincidencias de la ficha $\#k$ con la ficha #1.) Aplicando lo anterior a $n = 6$, tenemos que en 64 minutos habrá $6 \cdot 2^5 = 192$ coincidencias. Después de 10 periodos de estos tendremos 1920 coincidencias, así que faltarán 76. Ahora, para ver en qué momento se completan las 76 que faltan, debemos sumar por columnas las coincidencias; observando que sólo puede haber coincidencias en casillas pares tenemos que los números de coincidencias por columnas son:

posic. ficha #1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
coincidencias	1	3	1	7	1	3	1	15	1	3	1	7	1	3	1	31

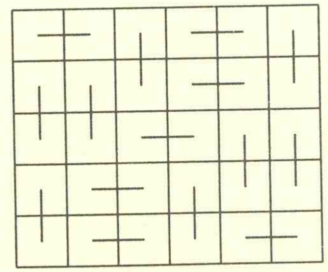
Hasta aquí se juntan 80, así que la ficha #1 estará en la casilla 32 cuando todos los focos queden prendidos. (Para ver las coincidencias por columnas formalmente, consideremos lo siguiente: Cuando la ficha #1 está en el lugar $2^a b$, con b impar, el número de coincidencias es el número de elementos del conjunto

$$\{x \mid 1 < x \leq 64,\ 2^a b x \equiv 2^a b \ (mod\ 2^{6-a})\}.$$

Como la congruencia es equivalente a $x \equiv 1$ $(mod\ 2^{6-a}$, el número de coincidencias en esa casilla es de $2^a - 1$.)

79. Supongamos que sí es posible cubrir la cuadrícula de 6×6 con la propiedad mencionada. Primero observemos que, en este caso, cada línea interior vertical deberá estar atravesada por un número par de rectangulitos horizontales; para ver esto observemos que cada rectangulito vertical abarca dos cuadritos verticales y 6 es un número par, de tal suerte que entonces en la primera columna vertical habrá un numero par de rectángulos horizontales; pero entonces, en la segunda columna pasará lo mismo puesto que los rectángulos horizontales que cubren cuadritos en la primera columna abarcan un número par en esta segunda, así que los cuadritos que quedan en esta columna también son un número par, y así sucesivamente. Por la condición pedida en el problema, cada línea interior vertical estará atravesada entonces por al menos dos rectangulitos horizontales. Por la misma razón, cada línea interior horizontal estará atravesada por dos rectangulitos verticales. Sin embargo, el número total de líneas interiores es 10 (5 verticales y 5 horizontales) y cada uno de los 18 rectangulitos sólo puede atravesar una de ellas, así que no puede haber las 20 intersecciones que se dice arriba que debe haber. Entonces no es posible cubrir la cuadrícula como se estaba suponiendo.

Una forma para cubrir la cuadrícula de 6×5 con la condición pedida se muestra en la siguiente figura.



80. Supongamos que para cierta $n \geq 2$ sí es posible llenar la cuadrícula como se pide y veamos cómo debe ser n. La mínima suma posible por renglones o columnas es $10(= 1+2+3+4)$ y la máxima suma posible es $58(= 13+14+15+16)$. Se necesitan 8 múltiplos distintos de n pues hay 4 filas y 4 columnas, pero $\frac{58-10}{8} = 6$, así que $n \leq 6$ (por ejemplo, entre 10 y 58 no podemos encontrar 8 múltiplos distintos de 7 ya que entre 10 y 58 sólo hay 7 múltiplos de 7 que son: 14, 21, 28, 34, 42, 49 y 56). Ahora observemos que la suma de todos los números del 1 al 16 es 136, así que este número también se obtiene sumando los 4 múltiplos de n que aparezcan por filas, de donde n no puede ser 3, 5 o 6 pues estos no son divisores de 136. Para ver que los casos $n = 2$ y $n = 4$ sí son posibles, consideremos, por ejemplo, los acomodos de las figuras, en donde el caso $n = 4$ se obtuvo del caso $n = 2$ intercambiando las posiciones de 4 y 6 y las de 12, 16 y 14 (estos últimos tres en forma cíclica).

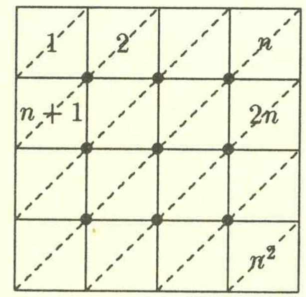
					sumas
	1	2	3	4	10
	5	6	7	8	26
	9	10	11	12	42
	13	14	15	16	58
sumas	28	32	36	40	

$n = 2$

					sumas
	1	2	3	6	12
	5	4	7	8	24
	9	10	11	14	44
	13	16	15	12	56
sumas	28	32	36	40	

$n = 4$

81. Observemos primero que cada camino C cruza exactamente una vez cada una de las diagonales que se muestran en la figura.



El mínimo valor de un número en cada diagonal está arriba a la derecha y el máximo está abajo a la izquierda, así que m se logra con el camino que va todo a la derecha hasta terminar el primer renglón y después hacia abajo por la última columna, y M se logra con el camino que primero va hacia abajo recorriendo toda la primera columna y después hacia la derecha por el último renglón. Así

$$m = 1 + 2 + \cdots + n + 2n + 3n + \cdots + n^2, \quad \text{y}$$

$$M = [1 + (n+1) + (2n+1) \cdots + ((n-1)n + 1)] + [((n-1)n + 2) + \cdots + n^2].$$

Además observemos que sobre las diagonales en cuadritos juntos, la diferencia es de $n-1$. Entonces $M - m = (n-1)^2(n-1) = (n-1)^3$ (pues en cada $\bullet$ en la cuadrícula hay una diferencia de $n-1$ y hay $(n-1)^2$ $\bullet$'s.

Ahora, si buscamos una n y un camino C en una cuadrícula de $n \times n$ que cumpla $L(C) = 1996$, debemos tener $m \leq 1996 \leq M$. Pero $m = [1 + 2 + \cdots + (n-1)] + [n + 2n + 3n + \cdots + n^2] = \frac{n(n-1)}{2} + n\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) + n^2 = \frac{(n-1)n(n+1)}{2} + n^2$, y $M = m + (n-1)^3$, como vimos arriba; entonces de $m \leq 1996$ obtenemos $n \leq 15$ y de $M \geq 1996$ obtenemos $n \geq 12$ (pues
para $n = 15$ tenemos $m = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{2} + 15^2 = 1905 < 1996$,
para $n = 16$ tenemos $m = \frac{17 \cdot 16 \cdot 15}{2} + 16^2 = 2296 > 1996$,
para $n = 11$ tenemos $M = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{2} + 11^2 + 10^3 = 1781 < 1996$ y
para $n = 12$ tenemos $M = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{2} + 12^2 + 11^3 = 2333 > 1996$).

Entonces los posibles valores para n son 12, 13, 14 y 15. Ahora recordemos que cualquier camino tiene diferencia un múltiplo de $n-1$ con el mínimo, así que debemos tener que $1996 - m$ debe ser múltiplo de $n-1$. Calculemos entonces en cada caso $1996 - m$:

Si $n = 12$, entonces $m = 1002$ y $1996 - m = 994$ que no es múltiplo de 11.

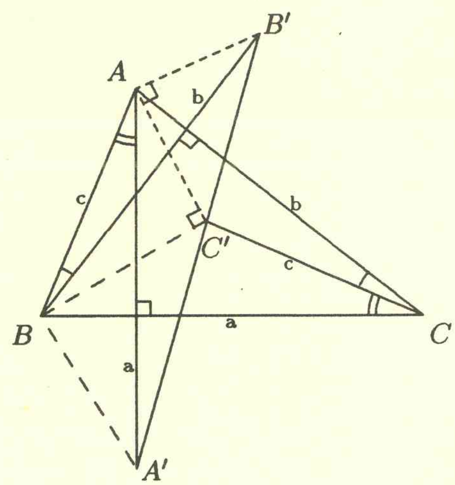
Si $n = 13$, entonces $m = 1261$ y $1996 - m = 735$ que no es múltiplo de 12.

Si $n = 14$, entonces $m = 1561$ y $1996 - m = 435$ que no es múltiplo de 13.

Si $n = 15$, entonces $m = 1905$ y $1996 - m = 91$ que no es múltiplo de 14.

De los cálculos anteriores concluimos que no es posible encontrar un camino $\mathcal{C}$ con $L(\mathcal{C}) = 1996$.

82. Observemos primero que $\angle ABB' = \angle C'CA$ puesto que ambos son complementarios de $\angle BAC$ (ya que CC' es perpendicular a AB y BB' es perpendicular a AC). Entonces los triángulos $\Delta ABB'$ y $\Delta C'CA$ son iguales (por tener iguales dos lados y el ángulo comprendido entre ellos). Como dos lados correspondientes en estos triángulos son perpendiculares entre sí, entonces también lo es el tercero, es decir, $\angle B'AC' = 90°$. Por la misma razón, los triángulos $\Delta BCC'$ y $\Delta A'AB$ son iguales y $\angle C'BA' = 90°$. Pero entonces $A'BC'$ y $C'AB'$ son triángulos rectángulos isósceles ($A'B = BC'$ y $C'A = AB'$), de donde sus ángulos no rectos son de 45°. Así $\angle A'C'B' = \angle A'C'B + \angle BC'A + \angle AC'B' = 45° + 90° + 45° = 180°$, de donde A', C' y B' están alineados.



A continuación presentaremos (sin soluciones) los exámenes de la X Olimpiada Iberoamericana, de la XXXVI Olimpiada Internacional y de la VII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico, todos celebrados en 1996.

XI OLIMPIADA IBEROAMERICANA

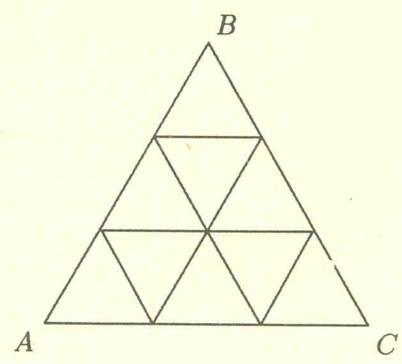
1. Sea n un número natural. Un cubo de arista n puede ser dividido en 1996 cubos cuyas aristas son también números naturales. Determina el menor valor posible de n.

2. Sea M el punto medio de la mendiana AD del triángulo ΔABC (D pertenece al lado BC). La recta BM corta al lado AC en el punto N. Demuestra que AB es tangente a la circunferencia circunscrita al triángulo ΔNBC si, y solamente si, se verifica la igualdad $\frac{BM}{MN} = \frac{(BC)^2}{(BN)^2}$.

3. Tenemos un tablero cuadriculado de $k^2 - k + 1$ filas y $k^2 - k + 1$ columnas, donde $k = p + 1$ y p es un número primo. Para cada primo p, da un método para distribuir números 0 y 1, un número en cada casilla del tablero, de modo que en cada fila haya exactamente k números 0, en cada columna haya exactamente k números 0 y además no haya ningún rectángulo de lados paralelos a los lados del tablero con números 0 en sus cuatro vértices.

4. Dado un número natural $n \geq 2$, considera todas las fracciones de la forma $\frac{1}{ab}$, donde a y b son números naturales, primos entre sí y tales que
$$a < b \leq n \text{ y}$$
$$a + b > n.$$
Demuestra que para cada n la suma de estas fracciones es $\frac{1}{2}$.

5. Tres fichas A, B y C están situadas cada una en un vértice de un triángulo equilátero de lado n. Se ha dividido el triángulo en triangulitos equiláteros de lado 1, tal como muestra la figura en el caso $n = 3$.



Inicialmente todas las líneas de la figura están pintadas de azul. Las fichas se desplazan por las líneas, pintando de rojo su trayectoria, de acuerdo con las dos reglas siguientes:

(i) Primero se mueve A, después B, después C, después A y así sucesivamente, por turnos. En cada turno, cada ficha recorre exactamente un lado de un triangulito, de un extremo a otro.

(ii) Ninguna ficha puede recorrer un lado de un triangulito que ya esté pintado de rojo; pero puede descansar en un extremo pintado, incluso si ya hay otra ficha esperando allí su turno.

Demuestra que para todo entero $n > 0$ es posible pintar de rojo todos los lados de los triangulitos.

6. Se tienen n puntos distintos $A_1, \ldots, A_n$ en el plano y a cada punto A_i se ha asignado un número real λ_i distinto de cero, de manera que $(A_iA_j)^2 = \lambda_i + \lambda_j$ para todos los i, j con $i \neq j$. Demuestra que

(a) $n \leq 4$ y

(b) si n=4, entonces $\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_4} = 0$.

VIII OLIMPIADA DE LA CUENCA DEL PACÍFICO

1. Sea $ABCD$ un cuadrilátero con todos los lados del mismo tamaño y con los lados opuestos paralelos. Sean M, N, P y Q puntos en AD, DC, AB y BC, respectivamente, de tal manera que MN y PQ sean perpendiculares a la diagonal BD y tales que la distancia d entre ellos sea mayor que $\frac{BD}{2}$. Prueba que el perímetro del hexágono $AMNCQP$ no depende de la posición de M, N, P y Q, con tal que la distancia d permanezca constante.

2. Sean m y n enteros positivos tales que $n \leq m$. Prueba que
$$2^n n! \leq \frac{(m+n)!}{(m-n)!} \leq (m^2+m)^n.$$

3. Sean P_1, P_2, P_3 y P_4 cuatro puntos en un círculo y sean I_1 el incentro de $\Delta P_2P_3P_4$, I_2 el incentro de $\Delta P_1P_3P_4$, I_3 el incentro de $\Delta P_1P_2P_4$ e I_4 el incentro de $\Delta P_1P_2P_3$. Demuestra que I_1, I_2, I_3 e I_4 son los vértices de un rectángulo.

4. El Consejo Nacional de Matrimonios desea invitar a n parejas para formar 17 grupos de discusión bajo las siguientes reglas:
(i) Todos los miembros de un grupo deben ser del mismo sexo.
(ii) La diferencia de tamaño entre cualesquiera dos grupos es a lo más 1.
(iii) Cada grupo tiene por lo menos un miembro.
(iv) Cada persona debe pertenecer a un grupo exactamente.
Encuentra todos los valores posibles para n si $n \leq 1996$.

5. Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo. Demuestra que
$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c},$$
y determina cuando se da la igualdad.

XXXVII OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICAS

1. La superficie de un rectángulo $ABCD$ con $AB = 20$ y $BC = 12$ está dividida en 20×12 cuadrados unitarios. Sea r un entero positivo dado. Un juego consiste en encontrar una sucesión de movimientos que lleven a una moneda desde el cuadrado con vértice A hasta el cuadrado con vértice B, donde un movimiento consiste en llevar la moneda de un cuadrado a otro si la distancia entre los centros de esos cuadrados es $\sqrt{r}$.
   (i) Prueba que no es posible encontrar una sucesión de movimientos si r es múltiplo de 2 o de 3.
   (ii) Prueba que sí es posible encontrar la sucesión de movimientos cuando $r = 73$.
   (iii) ¿Es posible encontrar una sucesión de movimientos se $r = 97$?

2. Sea P un punto interior al triángulo ΔABC tal que $\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$. Sean D y E los incentros de los triángulos ΔAPB y ΔAPC, respectivamente. Demuestra que AP, BD y CE son concurrentes.

3. Sea $S = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ el conjunto de los enteros no negativos. Encuentra todas las funciones f, definidas en S y que toman sus valores en S, tales que
$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n),$$
cualesquiera que sean $m, n \in S$.

4. Sean a y b enteros estrictamente positivos tales que $15a + 16b$ y $16a - 15b$ son, ambos, cuadrados de enteros estrictamente positivos. Determina el menor valor posible que puede tomar el menor de esos dos cuadrados.

5. Sea $ABCDEF$ un hexágono convexo tal que AB es paralelo a ED, BC es paralelo a FE y CD es paralelo a AF. Sean R_A, R_C y R_E los radios de las circunferencias circunscritas a los triángulos ΔFAB, ΔBCD y ΔDEF, respectivamente; y sea p el perímetro del hexágono. Prueba que $R_A + R_C + R_E \geq \frac{p}{2}$.

6. Sean n, p y q enteros positivos tales que $n > p + q$. Sean $x_o, x_1, \ldots, x_n$ enteros que verifican las siguientes condiciones:
   (a) $x_o = x_n = 0$.
   (b) Para cada i con $1 \leq i \leq n$ se tiene que, o bien $x_i - x_{i-1} = p$ o bien $x_i - x_{i-1} = -q$.
   Demuestra que existe una pareja (i, j) con $i < j$, $(i, j) \neq (0, n)$, tal que $x_i = x_j$..

LECTURAS COMPLEMENTARIAS

Comité Organizador de la Olimpiada Matemática Mexicana, Olimpiada de Matemáticas, 140 problemas, Academia de la Investigación Científica, México 1993.

Gentile, E., Aritmética Elemental, Monografía no. 25 de la Serie de Matemáticas del Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico de la OEA, Ediciones de la OEA, 1988.

Grimaldi R., Matemáticas Discreta y Combinatoria, Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, México, 1989.

Gusiev, V., Litvinenko, V., Mordkovich, A., Prácticas para Resolver Problemas de Matemáticas, (Geometría), Editorial Mir, Moscú, 1969.

Litvinenko, V., Mordkovich, A., Prácticas para Resolver Problemas de Matemáticas, (Álgebra y Trigonometría), Editorial Mir, Moscú, 1989.

Niven, I., Zuckerman, H., Introducción a la Teoría de los Números, Editorial Limusa-Wiley, México, 1972.

Shariguin, H., Problemas de Geometría, Colección Ciencia Popular, Editorial Mir, Moscú, 1989.

Vilenkin, N., ¿De Cuántas Formas? (Combinatoria), Editorial Mir, Moscú, 1972.

PATROCINADORES

Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Fundación TELMEX

Instituto Politécnico Nacional

Instituto Tecnológico Autónomo de México

Secretaría de Educación Pública

Universidad Autónoma de Nuevo León

Universidad Autónoma Metropolitana

Universidad de Monterrey

Universidad Nacional Autónoma de México