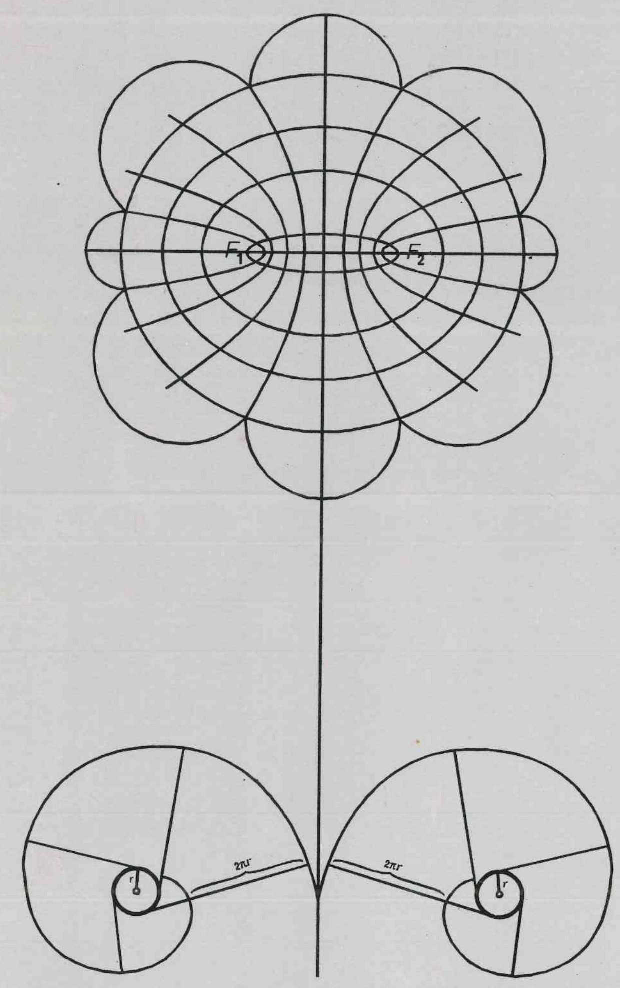
PROBLEMAS PARA LA 12a.

Olimpiada Mexicana de

MATEMATICAS



1998

SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

Problemas para la 12^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Editado por: Carlos Cabrera
José A. Gómez
Andrés Pedroza
Rogelio Valdez

1998

COMITÉ ORGANIZADOR

Presidente: José Antonio Gómez Ortega

Vinculación con Alumnos: Edgar Acosta Villaseñor

Exámenes y Problemas: Alejandro Bravo Mojica

Publicaciones: Alejandro Illanes Mejía

Organización del Concurso Nacional: Ma. del Pilar Morfin Heras

Relaciones Internacionales: Elena de Oteyza de Oteyza

Entrenamientos: María Luisa Pérez Seguí

Difusión: Concepción Ruiz Ruiz-Funes

Superación Académica: Julieta Verdugo Díaz

Contenido

Presentación

La Sociedad Matemática Mexicana organiza la 12a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los ganadores en ella formarán las selecciones que participarán en la XL Olimpiada Internacional de Matemáticas por celebrarse durante el mes de julio de 1999 en Rumania y en la XIV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas en Colombia.

En la 12a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas pueden participar los jóvenes mexicanos nacidos después del 1° de agosto de 1979. Los concursantes deberán estar inscritos en el bachillerato durante el primer semestre de 1999 y, para el 22 de julio de ese año, no deberán estar inscritos en ninguna escuela de nivel universitario.

Los problemas que aparecen en este folleto son problemas que aparecieron en concursos de las diferentes etapas de las olimpiadas de matemáticas. La intención del folleto es que sirvan como orientación a los alumnos que desean participar en estas olimpiadas. Como se puede ver, los problemas que aparecen aquí, no son problemas rutinarios o problemas en los que se apliquen directamente los conocimientos que se adquieren en la escuela. Más bien son problemas que requieren de una buena dosis de ingenio y de esfuerzo para ser resueltos. Como en todos los aspectos del aprendizaje de las matemáticas, el esfuerzo individual y el enfrentamiento solitario con los problemas son importantes, pero también es muy importante la discusión con los compañeros y los profesores.

Una forma de manifestar creatividad en matemáticas es resolviendo problemas. Otra forma, que a veces requiere de más madurez, es inventando problemas. Invitamos a todos los lectores de este folleto: profesores, estudiantes, olímpicos y exolímpicos a que nos envíen problemas con solución. Estos problemas serán considerados para su inclusión en exámenes o en futuros folletos.

Este folleto incluye problemas de los exámenes estatales de: Aguascalientes, Baja California, Campeche, Coahuila, Distrito Federal, Estado de México, Jalisco, Michoacán, Oaxaca, Querétaro, Quintana Roo, San Luis Potosí, Sonora, Tabasco, Tlaxcala, Veracruz, Yucatán y Zacatecas.

El trabajo mecanográfico de este folleto fué realizado por Lucina Parra.

Etapas de la Olimpiada

Como ya es tradición, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas consta de tres etapas:

- **Exámenes Estatales.** Estos exámenes servirán para formar las selecciones estatales que asistirán al Concurso Nacional.
- **Concurso Nacional.** Este concurso se llevará a cabo en la ciudad de Querétaro, Qro., del 8 al 14 de noviembre de 1998. De él se elegirá a la preselección mexicana.
- **Entrenamientos.** A la preselección que surja del Concurso Nacional se le entrenará intensivamente durante el primer semestre de 1999, también se le aplicarán exámenes para determinar los alumnos que representarán a México en las olimpiadas internacionales.

La participación en cada una de las tres etapas mencionadas es **individual**.

Resumen de Resultados

Desde 1987, año en que la Sociedad Matemática Mexicana organizó la primera Olimpiada, los resultados han sido los siguientes:

OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMATICAS

Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1988	Australia	49	37
1989	Rep. Fed. de Alemania	50	31
1990	Rep. Popular de China	54	36
1991	Suecia	55	35
1992	Rusia	56	49
1993	Turquía	73	63
1994	Hong Kong	69	65
1995	Canadá	74	59
1996	India	75	53
1997	Argentina	82	32

OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICAS

Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1989	Cuba	13	3
1990	España	15	3
1991	Argentina	16	5
1992	Venezuela	16	6
1993	México	16	9
1994	Brasil	16	6
1995	Chile	18	9
1996	Costa Rica	17	2
1997	México	17	3

En total, en las olimpiadas internacionales se han obtenido una medalla de plata, nueve medallas de bronce y trece menciones honoríficas. En las olimpiadas iberoamericanas se han obtenido tres medallas de oro, catorce medallas de plata, trece medallas de bronce y tres menciones honoríficas.

COMITE ORGANIZADOR DE LA
OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMATICAS

Enunciados de los Problemas

Presentamos aquí algunos problemas para mostrar el tipo de matemáticas que se manejan en las primeras fases de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Al final encontrarás las soluciones.

Los primeros 50 problemas forman parte de exámenes de la primera etapa de Concursos Estatales de la 11a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas, del problema 51 al 88 se eligieron de exámenes de segundas y terceras etapas, del 89 al 94 son los problemas del Concurso Nacional y del 95 al 100 son los que se aplicaron para seleccionar a los alumnos que asistieron a la XXXVIII IMO.

Exámenes Estatales de la 1^a Etapa

Problema 1. Dos jugadores, A y B, juegan lanzando cada uno dos veces consecutivas un dado; A gana si el total de puntos en sus lanzamientos es 7, B gana si el total de puntos en sus lanzamientos es 5. ¿Cuál de los siguientes enunciados es correcto?

(a) A tiene ventaja sobre B (b) B tiene ventaja sobre A

(c) A y B juegan en igualdad de condiciones (d) Ninguno de los anteriores

Problema 2. Hay que enviar 4 cartas urgentes. ¿De cuántas maneras puede efectuarse esto, si para transmitir las cartas se pueden enviar 3 mensajeros y cada carta se puede entregar a cualquiera de ellos?

(a) 64 (b) 12 (c) 3 (d) 81

Problema 3. El padre tiene 5 frutas distintas, las que entrega a sus 6 hijos de tal forma que cada uno obtiene una fruta o nada. ¿De cuántos modos puede hacerlo?

(a) 720 (b) 120 (c) 5^6 (d) 825

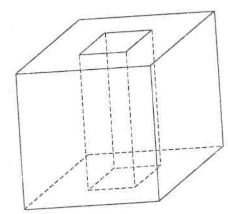
Problema 4. ¿Cuál es el máximo común divisor de 111 y 111111?

(a) 111 (b) 11 (c) 101 (d) 1111

Problema 5. Considere el rectángulo $ABCD$ con base $BC = 2$ y altura $CD = 1$. Si X es el punto medio del segmento CD, Y el punto medio del segmento BD y Z es un punto en el segmento XY tal que el triángulo XZD es isósceles con $XZ = ZD$ ¿Cuánto mide XZ?

(a) $\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{5}}{4}$ (b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

Problema 6. En un cubo sólido de $4cm$ de lado se hace una perforación en forma de prisma con base cuadrada de $1cm$ de lado desde el centro de cada cara hasta su cara opuesta (en la figura se ilustra una de las perforaciones), hay que hacer dos perforaciones más usando las otras parejas de caras opuestas ¿Cuántos centímetros cúbicos de volumen tiene el nuevo sólido?



(a) $52cm^3$ (b) $53cm^3$ (c) $54cm^3$ (d) $51cm^3$

Problema 7. Un granjero tiene dos vacas, tres cerdos y dos gallinas. ¿Cuántas alternativas tiene un comprador, si va a llevar una vaca, un cerdo y una gallina?

(a) 6 (b) 10 (c) 12 (d) 8

Problema 8. Se tienen en una caja dos bolas blancas y cuatro negras. ¿De cuántas maneras se pueden sacar dos bolas del mismo color?

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 3

Problema 9. Un cristal en forma de prisma; tiene 27 aristas. ¿Cuántos vértices tiene?

(Nota: Los prismas tienen como base y tapa dos polígonos iguales)

(a) 10 (b) 9 (c) 18 (d) 20

Problema 10. ¿Cuál de los siguientes números cumple que al dividirlo entre 6, el resto es igual al doble del cociente?

(b) 18 (c) 160 (d) 180

Problema 11. ¿Qué polígono regular tiene la misma cantidad de diagonales que de lados?

(a) Triángulo (b) Cuadrado (c) Pentágono (d) Octágono

Problema 12. En Bujolandia, (País lejano habitado por diminutos seres llamados 'bujos") sus habitantes están organizados de la siguiente manera:

Existe tantos bujos en un clan, como clanes en un estado y como estados en un reino. Si un reino tiene 357911 bujos. ¿Cuántos bujos tiene un clan?

(a) 71 (b) 70 (c) 72 (d) 79

Problema 13. El sol de cierta galaxia emite tres diferentes rayos, de la siguiente manera: El rayo alfa cada 16 segundos, el rayo beta cada 45 segundos, el rayo gamma cada 140 segundos.

Si en este momento se emiten al mismo tiempo los tres rayos, ¿Dentro de cuántos segundos volverán a emitirse los tres rayos al mismo tiempo?

(a) 140 (b) 5040 (c) 5400 (d) 104

Problema 14. En el país de las maravillas hay 10 duendes encantados que cambian de color. En la primera semana todos son rojos, la segunda semana los múltiplos de 2 cambian al color verde, la tercera semana los múltiplos de tres cambian al color rojo, y así alternadamente hasta que la décima semana los múltiplos de 10 cambian al color verde. ¿Cuáles de los diez duendes quedaron pintados al final de rojo?

a) Los números impares b) Los números pares

c) Los números divisores de 10 d) Los números múltiplos de 10

Problema 15. ¿Para qué valores de n, la suma de los factoriales, $1! + 2! + 3! + 4! + ... + n!$ no termina en tres?

(a) $1, 2$ (b) $2, 4$ (c) $3, 5$ (d) $1, 3$

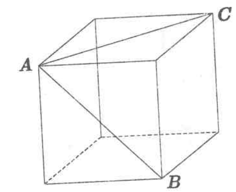
Problema 16. En un torneo de tenis hay 1024 jugadores, y el sistema es de eliminación sencilla; es decir, si un jugador pierde un juego, se sale del torneo y si gana vuelve a jugar, y así se sigue hasta que quede uno solo; el campeón. ¿Cuántos partidos se jugarán en total en el torneo?

(a) 512 (b) 1023 (c) 1024 (d) No se puede saber

Problema 17. Una línea aérea ofrece un 10% de descuento a los pasajeros mexicanos, y un 20% de descuento adicional a los estudiantes sobre el precio final. ¿Cuál será el descuento total para los estudiantes mexicanos?

(a) 22% (b) 25% (c) 28% (d) 30%

Problema 18. Sobre dos caras de un cubo se dibujan los segmentos AB y AC como se ve en la figura, es decir sobre las diagonales de esas caras. ¿Cuánto mide el ángulo formado entre estos segmentos?

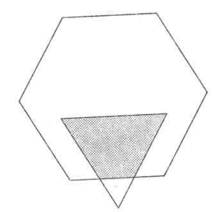


(a) 45° (b) 60° (c) 90° (d) No es un ángulo

Problema 19. ¿Cuántos números enteros positivos menores que 1000 hay tales que la suma de sus cifras sea 7?

(a) 24 (b) 30 (c) 33 (d) 36

Problema 20. Se quiere dibujar un triángulo equilátero y un hexágono regular, (no importan los tamaños) de forma que la figura formada por su intersección (área sombreada) tenga el máximo número de lados. ¿Cuál es este máximo? (En el ejemplo tiene 4 lados)



(a) 6 (b) 7 (c) 9 (d) 10

Problema 21. ¿Cuántos triángulos no semejantes hay tales que cada uno de sus tres ángulos interiores sea divisible entre 20?

(a) 5 (b) 7 (c) 9 (d) 10

Problema 22. ¿Cuántos números mayores o iguales que cero y menores que 1000 hay, tales que sean divisibles entre 2 ó 3, pero no entre 5?

(a) 534 (b) 666 (c) 766 (d) 832

Problema 23. ¿Cuál es la suma de todos los números de cuatro dígitos distintos que pueden formarse con los dígitos $1, 2, 3$ y 4?

(a) 60606 (b) 66600 (c) 66660 (d) 66666

Problema 24. ¿Cuál es el valor de $7 + 77 + 777 + ... + 77...7$, donde el último sumando tiene 1997 dígitos?

(a) $\dfrac{7(10^{1998} - 9 \times 1997 - 10)}{81}$ (b) $\dfrac{7(10^{1998} + 9 \times 1997 - 10)}{81}$

(c) $\dfrac{7(10^{1998} - 9 \times 1997 + 10)}{81}$ (d) $\dfrac{7(10^{1998} + 9 \times 1997 + 10)}{81}$

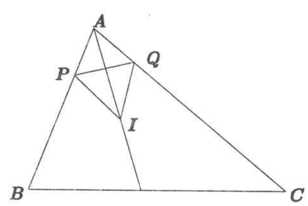
Problema 25. Un divisor del número $2^{11} + 3^{12} + 4^{14}$ es:

(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 9

Problema 26. ¿Cuáles son los dos últimos dígitos de la siguiente suma: $1! + 2! + ... + 1996! + 1997!$?

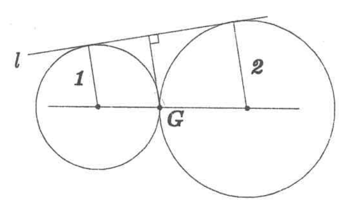
(a) 10 (b) 13 (c) 21 (d) 23

Problema 27. Sea ABC un triángulo e I su incentro. Sean P un punto sobre AB tal que $\angle AIP = 30°$ y Q un punto sobre CA tal que $\angle QIA = 30°$. Si $\angle CAB = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$ y $\angle ACB = 2\gamma$ ¿Cuánto vale $\angle QPA$?



(a) β (b) γ (c) $\beta + \gamma$ (d) 2α

Problema 28. El punto de tangencia de dos círculos tangentes exteriormente es G, el radio de uno de los círculos es igual a 1 y el radio del otro es igual a 2, l es una de las tangentes comunes a los dos círculos que no pasa por G. ¿Cuál es la distancia de G a l?



(a) $\frac{5}{4}$ (b) $\frac{4}{3}$ (c) $\frac{3}{2}$ (d) $\frac{7}{4}$

Problema 29. Si n y m son enteros positivos y $m^n + m^{n+1} + m^{n+2} = 39$. ¿Cuánto vale n^m?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

Problema 30. En la siguiente figura, la distancia tanto vertical como horizontal entre los puntos es $1cm$. ¿Cuántos triángulos de área $1cm^2$ hay con sus tres vértices en los puntos?

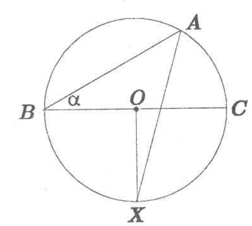
(a) 8 (b) 16 (c) 32 (d) 36

Problema 31. ¿Cuál de las siguientes desigualdades es cierta para todo a y b positivos?

(a) $\dfrac{a^2+b^2}{ab} + \dfrac{4ab}{a^2+b^2} \geq 4$ (b) $\dfrac{a^2+b^2}{ab} + \dfrac{4ab}{a^2+b^2} \leq 4$

(c) $\dfrac{a^2+b^2}{ab} + \dfrac{4ab}{a^2+b^2} < 4$ (d) $\dfrac{a^2+b^2}{ab} + \dfrac{4ab}{a^2+b^2} > 4$

Problema 32. En la siguiente figura el ángulo OXA es igual a:



(a) $\dfrac{\alpha}{2}$ (b) $\dfrac{\pi}{4} - \alpha$ (c) $\dfrac{\pi - \alpha}{2}$ (d) α

Problema 33. Si (a, b) denota al máximo común divisor de a y b. El valor de $(a^4 - b^4, a^2 - b^2)$ es:

(a) $a - b$ (b) $a + b$ (c) $a^2 - b^2$ (d) $a^2 + b^2$

Problema 34. La siguiente sucesión está formada como se indica: se escriben los dígitos de 1997 y después los de 7991 luego los de 1997 dos veces y luego los de 7991 dos veces, y así sucesivamente

$$1997799119977991799119971997799179917991, \ldots$$

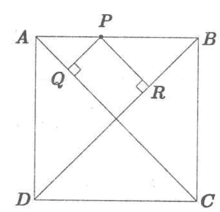
¿Qué dígitos están en los lugares 1997 y 1998?

(a) $1, 9$ (b) $9, 1$ (c) $7, 9$ (d) $9, 9$

Problema 35. ¿Cuál es el área máxima del triángulo de lados a, b, c, si se tiene que $0 < a \leq 1$, $1 \leq b \leq 2$, $1 \leq c \leq 2$?

(a) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (b) $\frac{\sqrt{15}}{4}$ (c) $\frac{9\sqrt{3}}{16}$ (d) 2

Problema 36. Sea $ABCD$ un cuadrado que tiene 4 unidades por lado, si P es un punto en el lado AB tal que la longitud de $AP = \sqrt{3}$, y Q y R son los pies de las perpendiculares trazadas desde P a las diagonales del cuadrado. ¿Cuánto vale la suma de las longitudes de PQ y PR?



(a) 2 (b) $\sqrt{2}$ (c) $2\sqrt{2}$ (d) 4

Problema 37. ¿Cuántos triángulos ABC no congruentes se pueden construir si el lado AB mide 10, el ángulo en A es igual a $30°$ y el lado BC puede tomar los valores: $4, 7, 9$ y 11?

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 8

Problema 38. ¿Cuál es el resultado de $16^{x+1} + 2^{4x+4}$?

(a) 2^{4x+5} (b) 2^{8x+8} (c) 18^{5x+5} (d) 32^{5x+5}

Problema 39. Si $x^2 + 8x - 2 = 0$, ¿Cuánto vale $x^4 + 8x^3 + 16x + 10$?

(a) -2 (b) 0 (c) 10 (d) 14

Problema 40. ¿Cuál de estos números cumple con que la suma de sus divisores más su número de divisores es 2448?

(a) 667 (b) 701 (c) 720 (d) 1225

Problema 41. ¿Cuántos enteros positivos n hay tales que $\frac{2n^2+4n+18}{3n+3}$ es un entero?

(a) 1 (b) 3 (c) 4 (d) Una infinidad

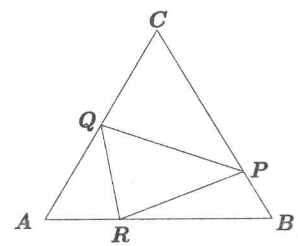
Problema 42. Si las diagonales de un rombo miden 8 y 6 ¿Cuánto vale el área del círculo inscrito en el rombo?

(a) $\frac{144}{25}\pi$ (b) 9π (c) $\frac{256}{25}\pi$ (d) 25π

Problema 43. Si a y b son las raíces del polinomio $x^2+7x+15=0$, ¿Cuánto vale a^2+b^2+12ab?

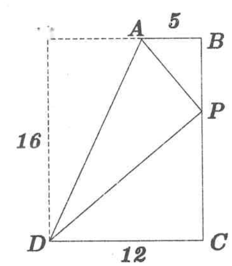
(a) $\frac{137}{2}$ (b) $\frac{171}{2}$ (c) 101 (d) 199

Problema 44. Sean, ABC un triángulo equilátero de lado 1, y P, Q, R puntos como se muestra en la figura tales que: $\frac{CQ}{QA}=1$, $\frac{AR}{RB}=\frac{1}{2}$, $\frac{BP}{PC}=\frac{1}{3}$. ¿Cuánto vale el área del triángulo PQR?



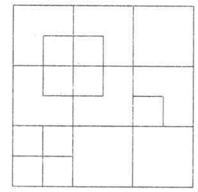
(a) $\frac{\sqrt{3}}{16}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) $\frac{7\sqrt{3}}{96}$ (d) $\frac{5\sqrt{3}}{48}$

Problema 45. En la siguiente figura ¿Cuánto vale el área del triángulo rectángulo APD?



(a) 40 (b) 61 (c) $4\sqrt{281}$ (d) $50\sqrt{2}$

Problema 46. ¿Cuántos rectángulos tiene la siguiente figura?

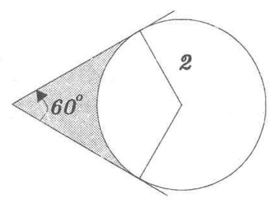


(a) 33 (b) 50 (c) 55 (d) 58

Problema 47. ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $(x^2+x-1)(x^2+x+2)=4$?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 4

Problema 48. ¿Cuánto vale el área del sector sombreado?



(a) $4\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$ (b) $4\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$ (c) $2\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi$ (d) $2\sqrt{3}+\frac{1}{3}\pi$

Problema 49. ¿Cuánto vale $(1100101_2+1100101_3)_4$?

(a) 100301_4 (b) 100323_4 (c) 200323_4 (d) 2200202_4

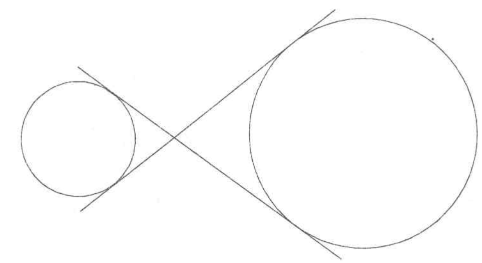
Problema 50. Se tiene un tetraedro regular y se trazan todas las bisectrices de todas las caras. ¿Cuántos puntos de intersección hay entre las 12 bisectrices?

(a) 4 (b) 8 (c) 12 (d) 14

Exámenes Estatales de la 2^a Etapa

Problema 51. En un triángulo de perímetro igual a 18, se inscribe una circunferencia. Se traza una recta tangente a la circunferencia, que es paralela a una de las bases del triángulo. ¿Cuánto mide esta base, si la longitud del segmento de la tangente limitada por los otros dos lados del triángulo es igual a 2?

Problema 52. Se tiene un par de poleas con una banda ajustada entre ellas, tal como se muestra en la figura. La distancia entre los centros de las dos poleas es de 120 cm. y los radios de ellas miden 40 y 20 cm. respectivamente. ¿Cuánto mide la longitud de la banda?



Problema 53. Sea n un entero positivo. Si un número primo p divide a $5n+1$ y a $3n+2$, muestre que p también divide a $n+10$.

Problema 54. En una cuadrícula de 3×3, se colocan de alguna manera los números del 1 al 9. A cada segmento interior de longitud uno de la cuadrícula, se le asigna el número que resulta de sumar los dos números de los cuadrados que tienen al segmento en común. Sea S la suma de los doce números asignados a los segmentos interiores.

¿Cuál es el valor máximo de S, de entre todas las formas de colocar los números del 1 al 9 en la cuadrícula?

Problema 55. ¿Es posible acomodar los signos $+$ o $-$ de modo que se cumpla: $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \ldots \pm 100 = 13^2$?

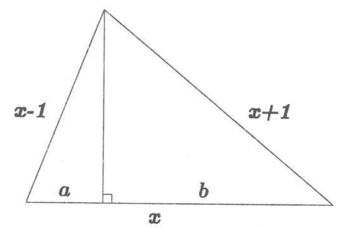
Problema 56. Al escribir los números del 1 al 1997 en orden uno a continuación del otro se forma el número $M = 12345678910111213\ldots199519961997$.

(a) ¿Cuál es el dígito central de M?, (b) ¿A qué número de la sucesión corresponde?.

Problema 57. Los números naturales a y b son números menores o iguales a 1000; además $a \leq b$. ¿Cuánto suman todas las fracciones $\frac{a}{b}$?.

Problema 58. Sea n un número natural, demostrar que si a y b son dos múltiplos de n, entonces el número formado al escribir a seguido de b es un múltiplo de n. (a y b pueden ser de más de una cifra, por ejemplo: si $a = 14$ y $b = 154$; el número formado al escribir a seguido de b es 14154).

Problema 59. En la siguiente figura, demostrar que: $b - a = 4$.



Problema 60. Sean a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 las longitudes de los lados de un pentágono convexo y m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 las longitudes de sus diagonales. Demostrar que:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5} \leq 1.$$

Problema 61. Sea a_n el dígito de las unidades del número $1997 + 1997^3 + 1997^5 + \ldots + 1997^{2n-1}$. Calcular la suma: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{1997}$.

Problema 62. Un conjunto de 1997 números diferentes tiene la propiedad de que la suma de cualesquiera 11 de ellos es un número positivo. Muestre que la suma de todos los 1997 números es positiva.

Problema 63. Considera un cuadrilátero $ABCD$ inscrito en un círculo con centro O tal que las diagonales AC y BD son perpendiculares. Demuestra que el área del cuadrilátero $AOCB$ es igual al área del cuadrilátero $OCDA$.

Problema 64. Sean el número $A = 33...33$ (compuesto de seiscientas sesenta y seis cifras, todas ellas iguales a 3) y el número $B = 66...66$ (compuesto de seiscientas sesenta y seis cifras, todas ellas iguales a 6). Si los multiplicamos. ¿Cuál es el resultado?.

Problema 65. Tres jugadores A, B y C juegan el siguiente juego:

Hay tres tarjetas, cada una de las cuales tiene escrito un número natural; estos tres números naturales p, q, r cumplen la condición: $0 < p < q < r$.

Las tres cartas se revuelven y se reparten (una a cada jugador).

A continuación cada uno de ellos recibe el número de piedrecillas indicado por la tarjeta que le tocó, y las conserva por el resto del juego. Después las cartas se revuelven otra vez.

El proceso anterior se efectúa *completo* al menos tres veces. Cuando los jugadores se cansan y deciden terminar el juego, A se queda en total con 20 piedrecillas, B con 10 y C con 9. Además, sabemos que en la última repartición a B le tocó la tarjeta con el número r.

¿Quién recibió la tarjeta con el número q en la primera repartición?

Problema 66. En una isla desierta habita un grupo de camaleones. Estos camaleones son inmortales, jamás nacen más de ellos y nunca abandonan la isla. Son de color amarillo, blanco y cafe hay 1997, 2997 y 3997 camaleones de cada color respectivamente.

Cada vez que dos camaleones se topan cara a cara, lo cual nunca sucede entre más de dos camaleones, ocurre lo siguiente:

a) Si los dos camaleones son de diferente color, digamos A y B, entonces los dos camaleones se volverán de color C.

b) Si los dos camaleones son del mismo color, digamos A, entonces uno de los camaleones se volverá de color B y el otro se volverá de color C.

¿Podrán algún día los camaleones ser todos del mismo color?. Si contestas que sí, da el método para hacerlo; si contestas que no, justifica tu respuesta.

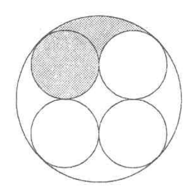
Problema 67. Se traza una línea recta que pasa por un punto K en el interior del cuadrado $ABCD$, la cual intersecta a los lados opuestos AB y CD en los puntos P y Q respectivamente. Se dibujan dos círculos que pasan por los triángulos KBP y KDQ respectivamente. Pruebe que el segundo punto de intersección de las dos circunferencias cae sobre la diagonal BD.

Problema 68. ¿Cuáles son las posibles áreas de un hexágono con todos los ángulos iguales y cuyos lados miden $1, 2, 3, 4, 5, 6$, en algún orden?

Problema 69. Se tiene un examen con 1997 problemas. Paco resuelve los problemas de 4 en 4, empezando por el cuarto (hace los problemas 4, 8, etc.), Luis resuelve los problemas de 5 en 5, de atrás para adelante empezando por el último (hace los problemas 1997, 1992, etc.). ¿Cuántos problemas resolvieron en común?

Problema 70. En un cubo, considera los 27 puntos siguientes: Uno en cada vértice, uno en cada mitad de arista, uno en cada centro de cara y uno en el centro del cubo. ¿Cuántas líneas rectas pasan por exactamente 3 de esos puntos?

Problema 71. En la figura siguiente se muestran cuatro círculos de radio 1 dentro de un círculo más grande. ¿Cuál es el área de la figura sombreada?



Problema 72. ¿Cuál es la cifra que ocupa el lugar 1997 en el desarrollo decimal de $4/101$?

Problema 73. Demuestra que si n es un número natural tal que $(2n+1)$ es un cuadrado perfecto, entonces $(n+1)$ es suma de dos cuadrados perfectos consecutivos.

Problema 74. Encontrar cinco números enteros positivos (distintos entre sí) de manera que el residuo que resulte de dividir $(1997)^2$ entre cualquiera de estos números sea igual a 1997.

Demostrar que más de cinco de tales enteros no pueden existir.

Problema 75. Dado un triángulo ABC con circuncentro O (centro de la circunferencia circunscrita, la que pasa por sus tres vértices) y un punto P cualquiera de la circunferencia circunscrita distinto de A, demostrar que la intersección de la circunferencia de diámetro AO y el segmento AP es el punto medio de este segmento.

Problema 76. Un lado de un triángulo es igual a un tercio de la suma de los otros dos. Demuestra que el ángulo opuesto al primero es el más pequeño de los ángulos del triángulo.

Problema 77. En el triángulo ABC las medianas trazadas desde B y desde C son perpendiculares entre sí. Si AC mide 15 unidades y AB mide 10, ¿Cuánto mide BC?

Problema 78. ¿Cuáles números de dos cifras al sumarles el número escrito con las mismas cifras pero en orden inverso dan un cuadrado perfecto?

Problema 79. Determine todas las soluciones enteras de la ecuación:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1997}.$$

Problema 80. Encuentre todos los valores de x que satisfacen:

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}=\sqrt{2}$$

Problema 81. Prueba que todo cuadrado se puede cortar en 6 cuadrados, en 7 cuadrados, en 8 cuadrados y en 11 cuadrados. Los cuadrados en los que partas no todos tienen que ser iguales entre sí. Para cada uno de los cuatro casos, dibuja un cuadrado e indica claramente con líneas por donde harías los cortes.

Problema 82. Resuelva la ecuación:

$$\sqrt{\frac{1-x}{x}}+\sqrt{\frac{x}{1-x}}=\frac{13}{6}$$

Problema 83. Se tienen cubitos, todos iguales, cada uno tiene 3 caras rojas y 3 azules. Dos cubitos se pegan de tal forma que las caras que se unen sean del mismo color (rojo con rojo, azul con azul).

a) ¿Cuál es el mínimo número de cubitos que se deben pegar para formar un paralelepípedo cuyas caras sean todas del mismo color?

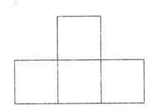
b) ¿De cuántas formas pueden estar pintados los cubitos?

c) ¿Se pueden acomodar 1997 cubitos tales que formen un paralelepípedo con las características de (a)?

Problema 84. Tenemos un triángulo rectángulo ABC. Sobre la hipotenusa BC se marcan puntos D y E tales que $BD = BA$ y $EC = AC$. Después se marca un punto F en el lado AB de tal forma que $BF = BE$ y análogamente un punto G en el lado AC de manera que $GC = DC$. Demuestre que los puntos A, D, E, F y G están sobre una misma circunferencia.

Problema 85. Rodrigo tiene muchas piezas como las del dibujo y quiere armar con ellas cuadrados grandes de $n \times n$ cuadritos.

¿Qué característica debe cumplir n para que Rodrigo sea capaz de hacer ésto?



Problema 86. En una cuadrícula de 3×3 se acomodan los dígitos del 1 al 9 sin repetir. Considera cada renglón como un número de 3 cifras, y llámale A a la suma de estos tres números. Ahora, considera cada columna como un número de tres cifras, y llámale B a la suma de estos tres números. ¿Puedes encontrar alguna forma de acomodar los dígitos del 1 al 9 de manera que $A + B = 1997$?

Problema 87. Sea ABC un triángulo y en su circunferencia circunscrita, considera a: C' el punto medio del arco AB, B' el punto medio del arco CA, y A' el punto medio del arco BC. Demuestra que el incentro (el punto donde se cortan las bisectrices) del triángulo ABC es el ortocentro (el punto donde se cortan las alturas) del triángulo $A'B'C'$.

Problema 88. Una fábrica de vidrio produjo 8,000 vasos para cumplir los pedidos de tres distribuidores, los cuales solicitaban los artículos en cajas: el primero en cajas de 36 vasos; el segundo en cajas de 24 vasos; y el tercero en cajas de 20 vasos. Sabiendo que a todos debería enviarles la misma cantidad de vasos y además embarcó la mayor cantidad que pudo. ¿Con cuántos vasos se quedó el fabricante?

Examen del Concurso Nacional

Problema 89. Encuentre todos los números primos positivos p tales que $8p^4 - 3003$ también sea un primo positivo.

Problema 90. En un triángulo ABC sean P y P' sobre el segmento BC, Q sobre el segmento CA y R sobre el segmento AB, de tal forma que:

$$\frac{AR}{RB} = \frac{BP}{PC} = \frac{CQ}{QA} = \frac{CP'}{P'B}.$$

Sea G el centroide de ABC y sea K el punto de intersección de las rectas AP' y RQ. Demostrar que los puntos P, G y K son colineales.

Problema 91. En una cuadrícula de 4×4 se van a colocar los números enteros del 1 al 16 (uno en cada cuadrito).

(i) Pruebe que es posible colocarlos de tal manera que los números que aparezcan en cuadritos que comparten un lado tengan diferencia menor o igual que 4.

(ii) Prueba que no es posible colocarlos de tal manera que los números que aparezcan en cuadritos que comparten un lado tengan diferencia menor o igual que 3.

Problema 92. Dados 3 puntos no alineados en el espacio, al único plano que los contiene le llamamos *plano determinado* por los puntos. ¿Cuál es el mínimo número de planos determinados por 6 puntos en el espacio si no hay 3 alineados y no están los 6 en un mismo plano?

Problema 93. Sean P, Q y R puntos sobre los lados de un triángulo ABC con P en el segmento BC, Q en el segmento AC y R en el segmento BA, de tal manera que si A' es la intersección de BQ con CR, B' es la intersección de AP con CR, y C' es la intersección de AP con BQ, entonces $AB' = B'C'$, $BC' = C'A'$ y $CA' = A'B' = C'A' = A'B'$. Calcular el cociente del área de PQR entre el área de ABC.

Problema 94. Probar que el número 1 se puede escribir de una infinidad de maneras distintas en la forma

$$1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n},$$

donde n y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son enteros positivos y $5 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

Examen Selectivo para la XXXVIII IMO

Problema 95. Considera un arreglo rectangular de puntos con un número par de renglones y un número par de columnas. Se colorean todos los puntos de azul o rojo de forma que en cada columna haya el mismo número de puntos rojos que azules y lo mismo ocurra en cada renglón. Cada vez que dos puntos consecutivos (ambos en el mismo renglón o en la misma columna) tengan igual color, se pinta con ese color un segmento uniéndolos. Prueba que el número de segmentos rojos coincide con el número de segmentos azules.

Problema 96. En un cuarto en forma de cubo de arista 1, una pelota sale de un punto P_0 situado en la pared delantera del cubo, rebota una vez en cada una de las otras paredes (incluyendo techo y piso) y regresa exactamente al punto de partida. Prueba que la longitud de la trayectoria descrita por la pelota no depende del punto de partida y encuentra esa longitud. Prueba también que dado P_0 en la pared delantera, siempre es posible encontrar una trayectoria como la descrita arriba y determina (en función de P_0) en qué orden deberá la pelota ir tocando las paredes y la distancia de P_0 al primer punto de rebote. [Nota: Se suponen condiciones ideales; la pelota viaja siempre en líneas rectas, sin perder fuerza, y al rebotar el ángulo de incidencia coincide con el ángulo de reflexión*; además, si la pelota toca una arista (o vértice) del cubo, se interpreta como que está tocando simultáneamente las dos (o tres) paredes que la forman].

**Si I y R son las respectivas trayectorias de incidencia y de rebote en una pared, entonces el plano que contiene a I y R es perpendicular al de la pared, además I y R forman el mismo ángulo con la recta de intersección de los dos planos.*

Problema 97. Un conjunto no vacío S de puntos del plano cumple la propiedad de que cada uno de sus puntos es circuncentro de (por lo menos) otros tres puntos de S. Prueba que el número de elementos de S es por lo menos 6 y da un ejemplo de un conjunto con 6 elementos que cumpla la propiedad.

Problema 98. Sea $n \geq 3$ y sean $A_1, A_2, ..., A_n$ los vértices de un polígono regular inscrito en un círculo de radio r. Para $i \geq 2$, sea d_i la longitud del segmento A_1A_i. Prueba que $d_2d_3...d_n = nr^{n-1}$.

Problema 99. Sea $\triangle ABC$ un triángulo. Sean D, E y F los respectivos puntos sobre BC, CA y AB tales que $CD = 2DB$, $CE = 2EA$ y $AF = 2FB$, y sea I el punto de intersección de BE con CF. Sea M el punto medio de AB. Pruebe que M, I y D son colineales.

Problema 100. Considera la sucesión $x_0, x_1, x_2, ...$ que se forma de la siguiente manera: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ y, para $n \geq 2$, x_n es el menor entero mayor que x_{n-1}, tal que el conjunto $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ no tiene tres elementos en progresión aritmética (es decir, no existen en ese conjunto tres elementos diferentes a, b y c tales que $2b = a + c$). Determina x_{1997}.

Exámenes Internacionales de 1997

A continuación presentamos (sin soluciones) los exámenes de la XII Olimpiada Iberoamericana, de la IX Olimpiada de la Cuenca del Pacífico y de la XXXVIII Olimpiada Internacional celebradas en 1997.

XII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Problema 1. Sea $r \geq 1$ un número real que cumple la siguiente propiedad:

Para cada pareja de números enteros positivos m y n, con n múltiplo de m, se tiene que $[nr]$ es múltiplo de $[mr]$.

Probar que r es un número entero.

Nota: Si x es un número real, denotamos por $[x]$ el mayor entero menor o igual que x.

Problema 2. Con centro en el incentro I de un triángulo ABC se traza una circunferencia que corta en dos puntos a cada uno de los tres lados del triángulo: al segmento BC en D y P (siendo D el más cercano a B); al segmento CA en E y Q (siendo E el más cercano a C), y al segmento AB en F y R (siendo F el más cercano a A).

Sea S el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero $EQFR$. Sea T el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero $FRDP$. Sea U el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero $DPEQ$.

Demostrar que las circunferencias circunscritas a los triángulos FRT, DPU y EQS tienen un único punto común.

Problema 3. Sean $n \geq 2$ un número entero y D_n el conjunto de puntos (x, y) del plano cuyas coordenadas son números enteros con $-n \leq x \leq n$ y $-n \leq y \leq n$.

(a) Se dispone de 3 colores; cada uno de los puntos de D_n se colorea con uno de ellos. Demostrar que sin importar cómo se haya hecho esta coloración, siempre hay dos puntos de D_n del mismo color tales que la recta que los contiene no pasa por ningún otro punto de D_n.

(b) Encontrar una forma de colorear los puntos de D_n utilizando 4 colores de manera que si una recta contiene exactamente dos puntos de D_n, entonces esos dos puntos tienen colores distintos.

Problema 4. Sea n un entero positivo. Consideremos la suma $x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$, donde los valores que pueden tomar las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ son únicamente 0 y 1. Sea $I(n)$ el número de $2n$-adas

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

para las cuales el valor de la suma es un número impar y sea $P(n)$ el número de $2n$ -adas para las cuales la suma toma valor par. Probar que

$$\frac{P(n)}{I(n)} = \frac{2^n + 1}{2^n - 1}.$$

Problema 5. En un triángulo ABC sean AE y BF dos alturas y sea H el ortocentro. La recta simétrica de AE respecto de la bisectriz (interior) del ángulo en A y la recta simétrica de BF respecto de la bisectriz (interior) del ángulo en B se intersectan en un punto O. Las rectas AE y AO cortan por segunda vez a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC en los puntos M y N, respectivamente.

Sean: P, la intersección de BC con HN; R, la intersección de BC con OM; y S, la intersección de HR con OP.

Problema 6. Sea $P = \{P_1, P_2, ..., P_{1997}\}$ un conjunto de 1997 puntos en el interior de un círculo de radio 1, siendo P_1 el centro del círculo. Para cada $k = 1, ..., 1997$ sea x_k la distancia de P_k al punto de P más próximo a P_k y distinto de P_k. Demostrar que

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{1997}^2 \leq 9.$$

IX Olimpiada de la Cuenca del Pacífico

Problema 1. Sea $S = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{3}} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{1993006}}$ donde los denominadores son las sumas parciales de la sucesión de los recíprocos de los números triangulares. Pruebe que $S > 1001$.

Problema 2. Encuentre un entero n, con $100 \leq n \leq 1997$ y tal que $\frac{2^n+2}{n}$ sea entero.

Problema 3. Sea ABC un triángulo inscrito en un círculo y sean

$$l_a = \frac{m_a}{M_a},\ l_b = \frac{m_b}{M_b},\ l_c = \frac{m_c}{M_c},$$

donde m_a, m_b, m_c son las longitudes de las bisectrices (internas) de los ángulos del triángulo y M_a,M_b,M_c son las longitudes de las bisectrices extendidas hasta que cortan al círculo. Prueba que:

$$\frac{l_a}{sen^2 A} + \frac{l_b}{sen^2 B} + \frac{l_c}{sen^2 C} \geqslant 3$$

y que la igualdad se da sí y sólo si ABC es equilátero.

Problema 4. El triángulo $A_1A_2A_3$ tiene un ángulo recto en A_3. Una sucesión de puntos se define por medio del siguiente proceso iterativo, donde n es un entero positivo.

Desde A_n $(n \geqslant 3)$, se traza una perpendicular que intersecta a $A_{n-2}A_{n-1}$ en A_{n+1}.

a) Demuestre que si este proceso se continua indefinidamente, entonces uno y sólo un punto P es interior a cada triángulo $A_{n-2}A_{n-1}A_n$, $n \geqslant 3$.

b) Sean A_1 y A_3 puntos fijos. Considerando todas las posibles colocaciones de A_2 en el plano, encuentre el lugar geométrico de P.

XXXVIII Olimpiada Internacional de Matemáticas

Problema 1. En el plano, los puntos de coordenadas enteras son los vértices de cuadrados unitarios. Los cuadrados se colorean alternadamente de blanco y negro (como los del tablero de ajedrez).

Para cada par de enteros positivos m y n, se considera un triángulo rectángulo cuyos vértices tienen coordenadas enteras y cuyos catetos, de longitudes m y n, están sobre los lados de los cuadrados.

Sean S_1 el área total de la región negra del triángulo y S_2 el área total de su región blanca. Sea

$$f(m,n) = |S_1 - S_2| \ .$$

(a) Calcular $f(m,n)$ para todos los enteros positivos m y n que son, o bien ambos pares, o bien ambos impares.

(b) Probar que $f(m,n) \leq \frac{1}{2}\max\{m,n\}$ para todo m y n.

(c) Demostrar que no existe ninguna constante C tal que $f(m,n) < C$ para todo m y n.

Problema 2. El ángulo A es el menor de los ángulos del triángulo ABC.

Los puntos B y C dividen a la circunferencia circunscrita del triángulo en dos arcos. Sea U un punto interior del arco BC que no contiene a AM. Las mediatrices de AB y AC cortan a la recta AU en V y W, respectivamente. Las rectas BV y CW se cortan en T. Demostrar que

$$AU = TB + TC.$$

Problema 3. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales que verifican las condiciones: $|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = 1$ y $|x_i| \leq \frac{n+1}{2}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Demostrar que existe una reordenación (o permutación) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tal que

$$|y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}.$$

Problema 4. Una matriz $n \times n$ (es decir, un tablero cuadrado de n filas y n columnas) se rellena con números del conjunto $S = \{1, 2, ..., 2n-1\}$. Tal tablero se llama *matriz de plata*, si para cada $i = 1, ..., n$, la i-ésima fila y la i-ésima columna juntas contienen todos los números del conjunto S. Demostrar que:

(a) No existe ninguna matriz de plata para $n = 1997$;

(b) Existen matrices de plata para infinitos valores de n.

Problema 5. Determinar todas las parejas (a, b) de enteros $a \geq 1$ y $b \geq 1$ que satisfacen la ecuación

$$a^{b^2} = b^a.$$

Problema 6. Para cada entero positivo n, sea $f(n)$ el número de formas en que se puede representar a n como suma de potencias de 2 con exponentes enteros no negativos.

Las representaciones que difieren únicamente en el orden de sus sumandos se consideran iguales. Por ejemplo $f(4) = 4$, porque 4 puede ser representado en las cuatro siguientes formas: 4; $2+2$; $2+1+1$; $1+1+1+1$.

Probar que, para todo entero $n \geq 3$,

$$2^{n^2/4} < f\left(2^n\right) < 2^{n^2/2}.$$

Soluciones de los Problemas

Soluciones de la 1^a Etapa

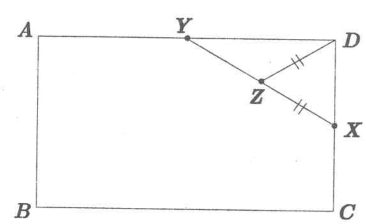
Solución al problema 1 (a). A tiene ventaja sobre B, pues A puede lograr 7 puntos de 6 maneras, $1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2$ y $6+1$ y B solamente tiene 4 formas de lograr 5 puntos, $1+4, 2+3, 3+2$ y $4+1$.

Solución al problema 2 (d). Como cada carta la puede llevar cualquiera de los 3 mensajeros y como las cartas se envían en forma independiente, se tiene que hay $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ maneras diferentes de enviarlas.

Solución al problema 3 (a). La primera fruta se la puede dar a cualquiera de los 6 hijos, la segunda fruta a cualquiera de los restantes 5 hijos, la tercera se puede repetir entre los 4 que no tienen, la cuarta fruta entre 3 y la quinta entre los últimos 2 hijos, luego hay $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ maneras de repartir las 5 frutas entre los 6 hijos.

Solución al problema 4 (a). Observemos que $111111 = (111)(1001)$, luego 111 divide a 111111 y entonces el máximo común divisor de 111 y de 111111 es 111.

Solución al problema 5 (d). En el rectángulo $ABCD$, se tiene que $DX = \frac{1}{2}$ y $DY = 1$. El único punto Z del segmento XY que cumple $XZ = ZD$, es el punto medio, por lo que $XZ = \frac{1}{2}XY = \frac{1}{2}\sqrt{DX^2 + DY^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}+1} = \frac{\sqrt{5}}{4}$.



Solución al problema 6 (c). El cubo tiene volumen $4^3 = 64\ cm^3$, en la primera perforación se quita un volumen de $4cm^3$ y en las otras dos perforaciones solamente se quitan $3cm^3$ ya que se intersectan en el centro en las perforaciones, en un cubo de volumen $1cm^3$. Así el volumen final es: $64 - 4 - 3 - 3 = 54cm^3$.

Solución al problema 7 (c). Puede escoger una vaca de dos maneras, por cada elección de éstas puede escoger un cerdo de tres formas y por cada elección de una vaca y un cerdo puede escoger la gallina de dos maneras. Luego tendrá $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ formas de escoger los animales.

Solución al problema 8 (c). Hay $\binom{6}{2} = 15$ maneras de sacar dos bolas de la caja, de estas se tendrán elecciones de diferente color tantas como $2 \cdot 4$ que corresponden a elegir una de dos blancas y una de 4 negras. Luego habrá $15 - 8 = 7$ elecciones que dan bolas del mismo color.

Solución al problema 9 (c). El prisma tiene de base y de tapa a un polígono digamos de n lados, cada vértice del polígono de la base se une por una arista a un vértice de la tapa, así se generan n aristas más, así el número de aristas debe ser $3n$, luego $3n = 27$ nos lleva a que $n = 9$, es decir la base y la tapa son polígonos de 9 lados y como estos tienen 9 vértices, el prisma tendrá $2 \cdot 9 = 18$ vértices.

Solución al problema 10 (a). Buscamos un número n, que cumpla:

$$n = 6m + r \quad \text{y} \quad r = 2m$$

luego $n = 8m$. Como $2 \leq r < 6$, tenemos que $m = 1$ ó 2. Así $n = 8$ ó 16.

Solución al problema 11 (c). El número de diagonales de un polígono de n lados es $\frac{n(n-3)}{2}$. Luego buscamos n que cumpla:

$$n = \frac{n(n-3)}{2}$$

Como $n \neq 0$, podemos cancelar n y obtener que $2 = n - 3$, y entonces $n = 5$.

Solución al problema 12 (a). Si en un clan hay n bujos, en el estado habrá n^2 bujos y en un reino n^3 bujos. Luego si $n^3 = 357911$, tenemos que $n = 71$.

Solución al problema 13 (b) Los rayos coinciden cada múltiplo común de $16, 45$ y 140, por lo que el siguiente momento que coinciden es cuando se de el mínimo común múltiplo de los tres números.

Como $16 = 2^4$, $45 = 3^2 \cdot 5$, $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$, el mínimo común múltiplo es $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 5040$.

Solución al problema 14 (a).

$$\begin{array}{cccccccccc}
R & R & R & R & R & R & R & R & R & R \\
R & V & R & V & R & V & R & V & R & V \\
R & V & R & V & R & R & R & V & R & V \\
R & V & R & V & R & R & R & V & R & V \\
R & V & R & V & R & R & R & V & R & R \\
R & V & R & V & R & V & R & V & R & R \\
R & V & R & V & R & V & R & V & R & R \\
R & V & R & V & R & V & R & V & R & R \\
R & V & R & V & R & V & R & V & R & R \\
R & V & R & V & R & V & R & V & R & V
\end{array}$$

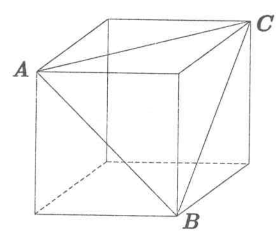
Solución al problema 15 (d). Como $1! = 1$, $1! + 2! = 3$, $1! + 2! + 3! = 9$, $1! + 2! + 3! + 4! = 33$, $1! + 2! + 3! + 4! + 5! = 153$, y como $n!$ siempre termina en cero cuando $n \geq 5$, todos los números $1! + \cdots + n!$ terminarán en 3 si $n \geq 5$. Luego la pareja solución donde ambos no terminan en 3, es $\{1, 3\}$.

Solución al problema 16 (b). En la primera ronda se jugaron 512 partidos, quedando 512 jugadores en el torneo, en la segunda se jugaron $\frac{512}{2} = 256$ partidos en la tercera, $\frac{256}{2} = 128$, en la cuarta, $\frac{128}{2} = 64$, en la quinta, $\frac{64}{2} = 32$, luego $16, 8, 4, 2$ y la final. En total se jugaron

$$1 + 2 + 2^2 + ... + 2^9 = \frac{2^{10}-1}{2-1} = 2^{10} - 1 = 1024 - 1 = 1023 \text{ partidos.}$$

Solución al problema 17 (c). Por ser mexicanos por cada 100 pesos del precio original deberán pagar 90 y por ser estudiantes a estos 90 pesos habrá que descontar el 20% de estos 90 pesos. Como $(90)(.20) = 18$, los estudiantes mexicanos tendrán que pagar $90 - 18 = 72$. Luego al final tendrán un descuento del 28%.

Solución al problema 18 (b). Como el segmento BC es también una diagonal de una cara, tenemos que el triángulo ABC es equilátero, luego sus ángulos son todos iguales a $60°$.



Solución al problema 19 (d). Si el número tiene tres cifras diferentes de cero, las cifras son: $\{1,1,5\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,3\}$, $\{2,2,3\}$.

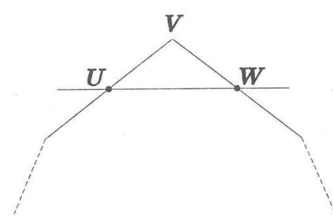
La primera, la tercera y la cuarta forma dan 3 formas de arreglarse para dar un número de tres cifras, por ejemplo en la primera $115, 151, 511$. La segunda contribuye con 6 números.

Si el número tiene dos cifras diferentes de cero y una cero, tenemos que las cifras son $\{1,6\}$, $\{2,5\}$, $\{3,4\}$ y por cada conjunto se forman 6 números.

Si el número tiene una sola cifra diferente de cero tenemos en este caso tres posibles números $7, 70$ y 700.

Luego en total hay $15+18+3=36$ números menores que 1000 cuyas cifras suman 7.

Solución al problema 20 (c). Considere un vértice V de un polígono y tracemos una línea que corte a los lados adyacentes del vértice en U y W.



Con una operación de esta forma, el vértice V se transforma en dos vértices U y W y se crea un nuevo segmento UW.

Si partimos de un hexágono, con el triángulo se pueden hacer a lo más 3 cortes alrededor de 3 vértices del hexágono, cada corte aumentará un vértice y un lado luego tendremos al final un polígono con 9 vértices y 9 lados.

Solución al problema 21 (b). Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es $180°$, si los ángulos son $20a$, $20b$ y $20c$ con a, b, c enteros positivos, debemos tener que:

$$20a + 20b + 20c = 180$$

por lo que $a+b+c=9$ y solamente hay 7 maneras esencialmente diferentes de escribir al 9 de esta forma

$$9 = 1+1+7 = 1+2+6 = 1+3+5 = 1+4+4 = 2+2+5 = 2+3+4 = 3+3+3.$$

Solución al problema 22 (a). Números entre 0 y 1000 que sean divisibles entre 2 hay $\left[\frac{1000}{2}\right] = 500$, donde $[x]$ es la parte entera de x. Divisibles entre 3, hay $\left[\frac{1000}{3}\right] = 333$, luego divisibles entre 2 ó 3 hay $(500+333)$ menos los que sean múltiplos de 6, ya que estos se han contado dos veces y de estos hay $\left[\frac{1000}{6}\right] = 166$. También debemos quitar los múltiplos de 5, que ya se tengan contados, estos serán los múltiplos de 10, los múltiplos de 15 y cuidar de no quitar dos veces un número como serían los mútiplos de 30. Múltiplos de 10, hay $\left[\frac{1000}{10}\right] = 100$, los múltiplos de 15, son $\left[\frac{1000}{15}\right] = 66$ y múltiplos de 30 son $\left[\frac{1000}{30}\right] = 33$.

El número buscado es:

$$500 + 333 - 166 - 100 - 66 + 33 = 534.$$

Solución al problema 23 (c). Números con cuatro dígitos distintos que se formen con $1, 2, 3$ y 4 hay $4! = 24$. Para sumar estos 24 números, tomemos uno de ellos digamos $abcd$ y asignemos otro $a'b'c'd'$, de manera que $a + a' = b + b' = c + c' = d + d' = 5$ es decir la suma de estos dos es 5555 y entonces la suma de todos es: $\dfrac{(5555)\,(24)}{2} = 66660$.

Solución al problema 24 (a).

$$\begin{aligned}
7 + 77 + ... + 77...7 &= 7(1 + 11 + ... + 11...1)\\
&= \frac{7}{9}(9 + 99 + ... + 99...9)\\
&= \frac{7}{9}(10 + 10^2 + ... + 10^{1997} - 1997)\\
&= \frac{7}{9}(1 + 10 + ... + 10^{1997} - 1998)\\
&= \frac{7}{9}\left(\frac{10^{1998} - 1}{10 - 1} - 1998\right)\\
&= \frac{7}{9}\left(\frac{10^{1998} - 9 \cdot 1998 - 1}{9}\right)\\
&= \frac{7}{81}\left(10^{1998} - 9 \cdot 1997 - 10\right)
\end{aligned}$$

Solución al problema 25(b). Veamos primero que 7 divide a $2^{11} + 3^{12} + 4^{14}$. Como $2^3 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7)$ y $3^6 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7)$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
2^{11} = \left(2^3\right)^3 \cdot 2^2 &\equiv 2^2\,(\mathrm{mod}\, 7)\\
3^{12} = \left(3^6\right)^2 &\equiv 1\,(\mathrm{mod}\, 7)\\
4^{14} = 2^{28} = \left(2^3\right)^9 \cdot 2 &\equiv 2\,(\mathrm{mod}\, 7)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2^{11} + 3^{12} + 4^{14} \equiv 4 + 1 + 2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 7)$$

Ninguno de los números $6, 8$ y 9 divide a $2^{11} + 3^{12} + 4^{14}$. En efecto 6 u 8 no lo dividen pues $2^{11} + 3^{12} + 4^{14}$ es impar. Y como $2^3 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 9)$ y

$3^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 9)$ tenemos que, $2^{11} \equiv -4 (\mathrm{mod}\, 9)$, $4^{14} = 2^{28} \equiv -2 (\mathrm{mod}\, 9)$ y por tanto $2^{11} + 3^{12} + 4^{14} \equiv -6 (\mathrm{mod}\, 9)$, luego 9 no lo divide.

Solución al problema 26 (b). Primero observemos que para $n \geq 10$, el número $n!$ es divisible entre 100, ya que tiene como factores a $10, 5$ y 2. Por lo que sólo deberemos determinar los dos últimos dígitos de $1! + 2! + \ldots + 9!$.

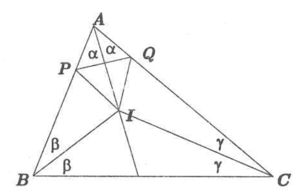
Tomando congruencias módulo 100, tenemos que:

$$\begin{array}{lll} 1! \equiv 1 & 4! \equiv 24 & 7! \equiv 40 \\ 2! \equiv 2 & 5! \equiv 20 & 8! \equiv 20 \\ 3! \equiv 6 & 6! \equiv 20 & 9! \equiv 80 \end{array}$$

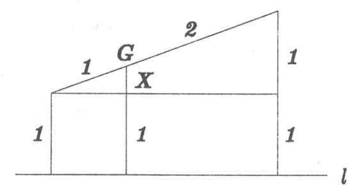
luego $1! + 2! + \ldots + 9! \equiv 1 + 2 + 6 + 24 + 20 + 20 + 40 + 20 + 80 \equiv 13 \ (\mathrm{mod}\, 100)$.

Solución al problema 27 (c). Los triángulos $\triangle API$ y $\triangle AQI$ son congruentes, tienen un lado común AI y dos ángulos iguales α y $30°$. Luego $AP = AQ$ y así el $\triangle APQ$ es isósceles, por lo que

$$\angle QPA = \angle PQA = \frac{180° - 2\alpha}{2} = \frac{2\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2\alpha}{2} = \beta + \gamma.$$



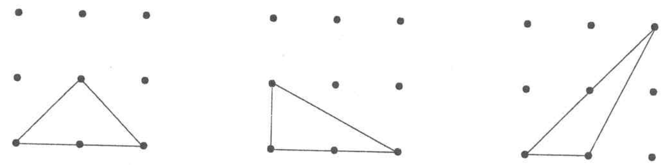
Solución al problema 28 (b). Primero observemos que los centros de las circunferencias son colineales con G. Luego tenemos una situación como en la siguiente figura:



Por semejanza de triángulos $GX = \frac{1}{3}$, luego la distancia de G a l es $\frac{4}{3}$.

Solución al problema 29 (a). La ecuación: $m^n + m^{n+1} + m^{n+2} = 39$, se puede reescribir como: $m^n (1 + m + m^2) = 3 \cdot 13$, de donde $n = 1$, pues el lado derecho no tiene ninguna potencia mayor que 1, luego $n^m = 1^m = 1$. No es difícil ver que $m = 3$.

Solución al problema 30 (c). Hay tres tipos de triángulos posibles con área $1cm^2$, y son salvo rotaciones.



Del primer tipo hay 8, uno por cada lado y uno por cada punto medio de un lado.

Del segundo son 16, dos por cada segmento de longitud 1 de la orilla.

Del tercero hay 8, uno por cada segmento de longitud 1 de la orilla.

Solución al problema 31 (a).

$$\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{4ab}{a^2+b^2}\geq 4$$

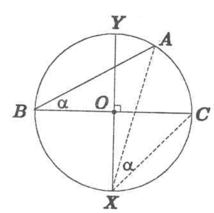
$$\Leftrightarrow \quad \left(a^2+b^2\right)^2+4a^2b^2\geq 4ab\left(a^2+b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(a^2+b^2\right)^2-4ab\left(a^2+b^2\right)+4a^2b^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\left(a^2+b^2\right)-2ab\right)^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a-b)^4\geq 0$$

Solución al problema 32 (b). Sea Y tal que XY sea diámetro entonces $\angle CXY=\frac{1}{2}\angle COY=\frac{\pi}{4}$ y como $\angle CXA=\angle CBA=\alpha$, tenemos que $\angle AXY=\angle CXY-\angle CXA=\frac{\pi}{4}-\alpha$.



Solución al problema 33 (c). Como $a^4-b^4=\left(a^2+b^2\right)\left(a^2-b^2\right)$, tenemos que a^2-b^2 divide a a^4-b^4, luego $\left(a^4-b^4,a^2-b^2\right)=a^2-b^2$.

Solución al problema 34 (c). Como $1997\equiv 1(\bmod 4)$, se tiene que los dígitos de los lugares 1997 y 1998 son los dos primeros números 1997 ó 7991.

Ahora como $1997 = 4 \cdot 499 + 1$, debemos determinar que número de $a = 1997$ ó $b = 7991$ se coloca en el lugar 500, en el siguiente acomodo:

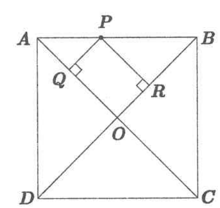
$$abaabbaaabbb....$$

Las colecciones de $a's$, inician en los lugares:
$1, 3, 7, 13, ..., 1 + n(n+1), ...$ y se colocan $n+1$ letras $a's$, después $n+1$ letras $b's$. Tomando $n = 21$, tenemos que en el lugar $1 + 21 \cdot 22 = 463$, se coloca una a y después de ésta, otras 21 letras a, luego en el lugar $463 + 21 = 484$ hay una letra a y del lugar 485 al 506 se colocan letras b, así en el lugar 500 hay una letra $b = 7991$ y los números que pide el problema son 7 y 9.

Solución al problema 35 (b). Sí Δ es el área del triángulo, tenemos que $\Delta = \frac{bcsenA}{2}$ donde A es el ángulo opuesto al lado a. Como $1 \leq b \leq c \leq 2$, $\Delta = \frac{bcsenA}{2} < \frac{4senA}{2}$, pero esta área es igual a $\frac{a}{4}\sqrt{16-a^2}$ pues la altura del triángulo isósceles de base a y lados iguales 2 es $\frac{\sqrt{16-a^2}}{2}$. Ahora como $a^2 - 1 \leq 0$ tenemos que $15(a^2-1) \leq a^2(a^2-1)$ de donde $a\sqrt{16-a^2} \leq \sqrt{15}$, luego la área máxima es $\frac{\sqrt{15}}{4}$.

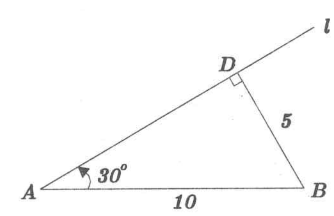
Solución al problema 36 (c). Observe que los triángulos $\triangle APQ$ y $\triangle PRB$ son rectángulos e isósceles pues los ángulos en A y B son de 45°. Luego $AQ = QP$ y $PR = RB$. Además como $OQPR$ es un rectángulo, se tiene que $OR = PQ$, por lo que:

$$PQ + PR = OR + RB = \frac{1}{2}DB = \frac{1}{2}\left(4\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}$$



Solución al problema 37 (b). Consideremos un segmento AB de longitud 10 y tracemos una línea l por A que forme con AB un ángulo de 30°.

Si D es el pie de la perpendicular de B a l, tenemos que $\frac{1}{2} = sen30° = \frac{DB}{10}$ por lo que $DB = 5$.



A la izquierda de D y entre A y D, solamente podremos encontrar puntos que estén a distancia 7 y 9 de B y a la derecha de D habrá a distancias $7, 9$ y 11. Luego tendremos 5 posibles triángulos todos diferentes.

Solución al problema 38 (a).

$$16^{x+1} + 2^{4x+4} = \left(2^4\right)^{x+1} + 2^{4x+4} = 2^{4x+4} + 2^{4x+4} = 2 \cdot 2^{4x+4} = 2^{4x+5}.$$

Solución al problema 39 (d).

$$x^4 + 8x^3 + 16x + 10 = x^2\left(x^2 + 8x - 2\right) + 2\left(x^2 + 8x - 2\right) + 14 = 14.$$

Solución al problema 40 (c). El número 720 se descompone como producto de primos en la forma: $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$. Luego la suma de sus divisores es, $\left(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4\right)\left(1 + 3 + 3^2\right)(1 + 5) = 31 \cdot 13 \cdot 6 = 2418$.

Y el número de divisores es: $(4 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$.

Solución al problema 41 (c). Primero observemos que:

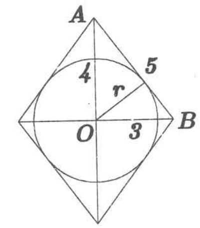
$$\begin{aligned} \frac{2n^2 + 4n + 18}{3n + 3} &= \frac{(2n + 2)(n + 1)}{3(n + 1)} + \frac{16}{3(n + 1)} \\ &= \frac{2n + 2}{3} + \frac{16}{3(n + 1)}, \end{aligned}$$

entonces para que tengamos esperanza de que sea entero debemos tener que $n + 1$ debe dividir a 16, luego sólo hay que analizar los casos $n = 1, 3, 7, 15$.

n	$\frac{2n+2}{3} + \frac{16}{3(n+1)}$
1	$\frac{4}{3} + \frac{8}{3} = 4$
3	$\frac{8}{3} + \frac{4}{3} = 4$
7	$\frac{16}{3} + \frac{2}{3} = 6$
15	$\frac{32}{3} + \frac{1}{3} = 11$

así hay 4 únicos valores en que el cociente es entero.

Solución al problema 42 (a). Las diagonales del rombo, lo dividen en 4 triángulos rectángulos de lados $3, 4$ y 5. El área del triángulo rectángulo $\triangle AOB$, se puede calcular de dos maneras, una es $\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ y la otra como $\frac{5 \cdot r}{2}$, luego $r = \frac{12}{5}$ y por lo que el área del círculo es $\pi\left(\frac{12}{5}\right)^2$.

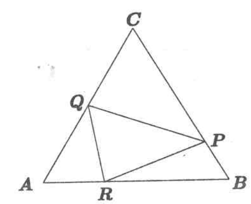


Solución al problema 43 (d). Si a y b son las raíces de $x^2+7x+15=0$, entonces como $x^2+7x+15=(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$, tenemos que: $a+b=-7$ y $ab=15$.

Luego $a^2+b^2+12ab=(a+b)^2+10ab=(-7)^2+10\cdot 15=49+150=199$.

Solución al problema 44 (c). Observemos primero que el área de un triángulo ABC es igual a $(ABC)=\frac{absenC}{2}$, donde a y b son los lados adyacentes a un ángulo C. Aquí (ABC) denota el área de un triángulo. Luego:

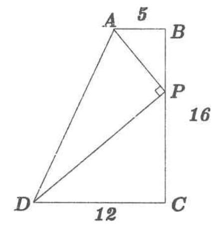
$$\begin{aligned}
(PQR) &= (ABC)-(ARQ)-(BPR)-(CQP)\\
&= \frac{sen60^\circ}{2}(1\cdot 1-QA\cdot AR-RB\cdot BP-PC\cdot CQ)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-\frac{3}{8}\right)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{7}{24}\right)=\frac{7\sqrt{3}}{96}
\end{aligned}$$



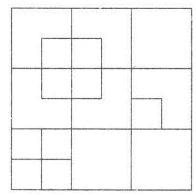
Solución al problema 45 (b). Como $\angle APB+\angle DPC=90^\circ$, tenemos que los triángulos ABP y PCD son semejantes, luego $BP\cdot PC=CD\cdot AB=60$ y como $BD+PC=16$, tenemos que: $BP=10$ y $PC=6$ o bien $BP=6$ y $PC=10$.

En el primer caso; $AP=\sqrt{5^2+10^2}=5\sqrt{5}$ y $PD=\sqrt{12^2+6^2}=6\sqrt{5}$ y el área del $\triangle APD$ es $\frac{30\cdot 5}{2}=75$.

En el segundo caso: $AP=\sqrt{5^2+6^2}=\sqrt{61}$ y $PD=\sqrt{12^2+10^2}=2\sqrt{61}$, Nota: El problema formalmente tiene dos soluciones 75 y 61.

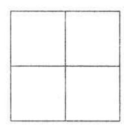


Solución al problema 46 (d).

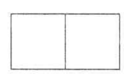


(i) En esta figura se encuentran 24 cuadrados 9 pequeños que diremos de tamaño 0, 10 de tamaño 1, 4 de tamaño 2 y el cuadrado grande de 3×3.

(ii) En cada figura de la forma



hay 4 rectángulos de la forma



formados por dos cuadritos de tamaño 0, luego en la figura completa hay 8 de tales rectángulos.

(iii) Rectángulos de tamaño 1×2 hay 2 en cada fila y 2 en cada renglón, luego en total de estos hay 12.

(iv) Rectángulos de tamaño 1×3 hay uno por fila y uno por columna, en la figura total hay 6.

(v) Rectángulos de tamaño 2×3 hay 4.

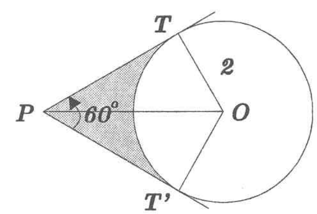
(vi) Finalmente en la primera columna y en la tercera fila hay rectángulos que se forman con dos cuadrados de tamaño cero, junto con uno o dos de tamaño 1, en total hay 4 de estos.

Luego sumando todas las cuentas parciales tenemos que hay en total: $24 + 8 + 12 + 6 + 4 + 4 = 58$ rectángulos.

Solución al problema 47 (c). Si $u = x^2 + x$, tenemos que la ecuación que estamos considerando se reduce a $(u-1)(u-2) = 4$, y esta última a $(u-2)(u+3) = 0$, $u = 2$ nos lleva a las soluciones $x = 1$, $x = -2$ y $u = x^2 + x = -3$ no tiene soluciones reales.

Solución al problema 48 (a). En el triángulo rectángulo $\triangle POT$, se tiene que $PO = 4$ y $PT = 2\sqrt{3}$, luego el área sombreada es área del cuadrilátero $OTPT' - \frac{1}{3}$ área del círculo $=$

$$2 \cdot 2\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi \cdot 4 = 4\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi$$



Solución al problema 49 (b).

$$\begin{aligned}
(1100101)_2 &= 1 + 2^2 + 2^5 + 2^6 = 1 + 4 + 2 \cdot 4^2 + 4^3 = (1211)_4 \\
(1100101)_3 &= 1 + 3^2 + 3^5 + 3^6 = 1 + 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^3 + \\
&\quad 1 + 2 \cdot 4 + 4^2 + 3 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^4 = \\
&= 2 + 4 + 4^2 + 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^4 \\
&= (33112)_4
\end{aligned}$$

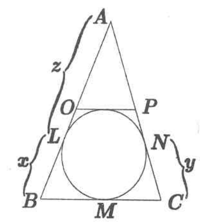
Luego $(1100101)_2 + (1100101)_3 = (1211)_4 + (33112)_4 = (100323)_4$.

Solución al problema 50 (d). Los puntos de intersección de las bisectrices solamente se pueden dar dentro de las caras del tetraedro. Una bisectriz de una cara tiene sólo tres puntos de intersección, el vértice de donde sale la bisectriz, el incentro de la cara donde está la bisectriz y el punto medio de la arista opuesta al que llega la bisectriz. Vértices hay 4, incentros hay 4 (uno por cada cara) y puntos medios de aristas hay 6, luego hay $4 + 4 + 6 = 14$ puntos de intersección.

Soluciones de la 2^a Etapa

Solución al problema 51. Sean M, N, L los puntos de tangencia del incírculo con los lados del ΔABC. Así tenemos que $AL = AN = z$, $CN = CM = y$, $BL = BM = x$.

Sea OP la tangente al incírculo en T paralela a BC y sean $r = PN$, $s = OL$; como $OP = 2$ entonces $s + r = 2$. Es claro que ΔAOP y ΔABC son semejantes, luego $\frac{AO}{AB} = \frac{AP}{AC} = \frac{OP}{BC}$, y entonces $\frac{z-s}{z+x} = \frac{z-r}{z+y} = \frac{2}{x+y}$, de donde $z - s = \frac{2(z+x)}{x+y}$, $z - r = \frac{2(z+y)}{x+y}$. Como $2x + 2y + 2z = 18$ tenemos que $x + y = 9 - z$, sumando las dos ecuaciones anteriores y sustituyendo $x + y$, obtenemos la ecuación $z^2 - 9z + 18 = 0$, la cual tiene soluciones $z = 6$ y $z = 3$, por lo que tenemos dos soluciones para BC, que son $BC = 3$ ó $BC = 6$.

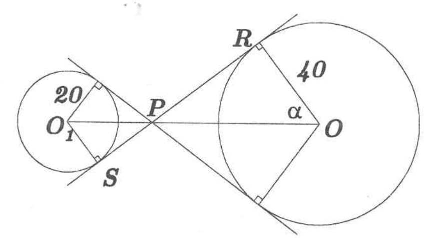


Solución al problema 52. Los triángulos ΔORP y ΔO_1SP son semejantes con razón de semejanza 2, luego $OP = 2PO_1$, como $OO_1 = 120$, tenemos que $OP = 80$, $PO_1 = 40$, de esta forma $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ y entonces $\alpha = 60°$. De donde $RP = 80\ sen60° = 40 \cdot \sqrt{3}$ y $PS = 40\ sen60° = 20 \cdot \sqrt{3}$.

Luego la longitud total de la banda es

$$\frac{4\pi}{3}40 + \frac{4\pi}{3}20 + 2\left(20\sqrt{3} + 40\sqrt{3}\right)$$

$$= \frac{160}{3}\pi + \frac{80}{3}\pi + 120\sqrt{3} = 80\pi + 120\sqrt{3}\ .$$



Solución al problema 53. Si $p \mid 5n + 1$ y $p \mid 3n + 2$ entonces p divide a $5(3n + 2) - 3(5n + 1) = 7$, luego $p = 7$ ya que p es primo.

También $p \mid 2(3n+2) - (5n+1) = n+3$ y como $p = 7$ entonces $p \mid n+3+7 = n + 10$.

Solución al problema 54. Como queremos obtener la suma máxima, debemos sumar los números grandes la mayor cantidad de veces. Siendo el 9 el más grande deberá colocarse en la casilla central, en seguida se colocan los números $8, 7, 6, 5$ alrededor del 9, como se muestra:

	5	
8	9	6
	7	

Para colocar el 4, notamos que donde aporta más a la suma es entre el 8 y el 7; así sucesivamente se colocan los restantes resultando el acomodo como:

2	5	1
8	9	6
4	7	3

Luego la suma máxima es 134.

Solución al problema 55. Vamos a ver que no es posible. Supongamos que sí, luego para alguna permutación $x_1, x_2, .., x_{100}$ de los números del 1 al 100 debemos tener que

$$x_1 + x_2 + ... + x_k = 169 + x_{k+1} + ... + x_{100}$$

Luego si en la suma de la izquierda hay un número par de impares entonces $x_1 + x_2 + ... + x_k$ es par, así en $x_{k+1}, ..., x_{100}$ hay un número par de impares más 169 otro impar tenemos que la suma de la derecha es impar lo cual es imposible

De la misma forma si en la suma de la izquierda hay un número impar de impares la suma es impar mientras que en la derecha deberá haber un número par de impares (incluyendo a 169) por lo que la suma de la derecha deberá ser par lo cual también es imposible.

Solución al problema 56.

Al escribir los números del 1 al 9 se utilizan 9 dígitos,

Al escribir los números del 10 al 99 se utilizan $90 \cdot 2$ dígitos,

Al escribir los números del 100 al 999 se utilizan $900 \cdot 3$ dígitos,

Al escribir los números del 1000 al 1997 se utilizan $998 \cdot 4$ dígitos,

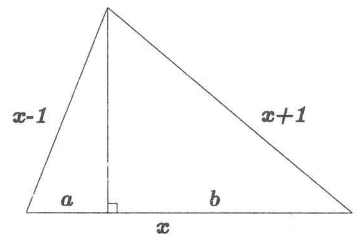
Así el número de dígitos utilizados para escribir M es 6881, y el dígito buscado es el 3441 contando desde el 1. Analizando el número de dígitos utilizados se obtiene que el lugar 3441 corresponde a un 7 que forma parte del número 1137; ya que del 1 al 999 se utilizan 2889 dígitos, del 1000 al 1099 otros 400, del 1100 al 1129 otros 120, es decir $2889 + 400 + 120 = 3409$, por lo que faltan 32 dígitos, es decir 8 números más de cuatro cifras, para llegar

Solución al problema 57. Si $1 \leq a \leq b \leq 1000$; sea T la suma de todas las fracciones a/b entonces

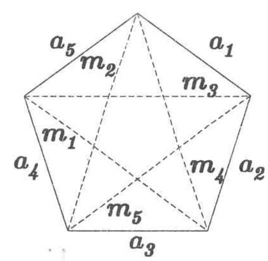
$$\begin{aligned} T &= \sum_{n=1}^{1000} \left(\tfrac{1}{n} + \tfrac{2}{n} + \ldots + \tfrac{n}{n}\right) = \sum_{n=1}^{1000} \tfrac{n(n+1)}{2n} = \sum_{n=1}^{1000} \tfrac{n+1}{2} \\ &= 500 + \tfrac{1}{2}\tfrac{(1000)(1001)}{2} = 500\left(\tfrac{1001}{2} + 1\right) = 500\left(\tfrac{1003}{2}\right) = 250 \cdot 1003. \end{aligned}$$

Solución al problema 58. Podemos escribir b en notación decimal como $b = a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$, luego escribir a seguido de b equivale a considerar: $a10^{k+1} + b$, como a y b son múltiplos de n, obtenemos que esta suma es también un múltiplo de n.

Solución al problema 59. Por el Teorema de Pitágoras, se tiene que: $(x+1)^2 - b^2 = (x-1)^2 - a^2$, luego $b^2 - a^2 = (x+1)^2 - (x-1)^2 = 2x \cdot 2 = 4x$, y entonces $(b-a)(b+a) = 4x$ pero $a + b = x$, por lo tanto $b - a = 4$.



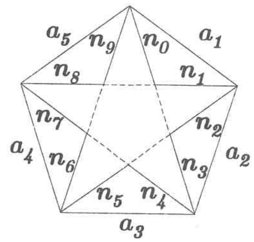
Solución al problema 60.



Por la desigualdad del triángulo tenemos que

$$\begin{aligned} m_4 &\leq a_1 + a_2 \\ m_5 &\leq a_2 + a_3 \\ m_1 &\leq a_3 + a_4 \\ m_2 &\leq a_4 + a_5 \\ m_3 &\leq a_5 + a_1 \end{aligned}$$

luego $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 \leq 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$ por lo que $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5} m_i \leq \sum_{i=1}^{5} a_i$.



Nuevamente por la desigualdad del triángulo tenemos que

$$\begin{aligned} a_1 &\leq n_0 + n_1 \\ a_2 &\leq n_2 + n_3 \\ a_3 &\leq n_4 + n_5 \\ a_4 &\leq n_6 + n_7 \\ a_5 &\leq n_8 + n_9 \end{aligned}$$

entonces $\sum\limits_{i=1}^{5} a_i \leq \sum\limits_{i=0}^{9} n_i$, y el resultado se sigue observando que: $\sum\limits_{i=0}^{9} n_i \leq \sum\limits_{i=1}^{5} m_i$.

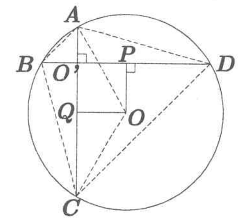
Solución al problema 61. Analicemos las potencias de 1997 módulo 10. $1997 \equiv 7 (\bmod 10)$, $1997^2 \equiv 9 (\bmod 10)$, $1997^3 \equiv 3 (\bmod 10)$, $1997^4 \equiv 1 (\bmod 10)$ entonces $1997^{4k+1} \equiv 7 (\bmod 10)$, $1997^{4k+2} \equiv 9 (\bmod 10)$, $1997^{4k+3} \equiv 3 (\bmod 10)$ y $1997^{4k} \equiv 1 (\bmod 10)$. Como se están tomando potencias impares, estas potencias son congruentes a 7 ó a 3 $(\bmod 10)$, así $a_1 = 7$, $a_2 \equiv 7+3 \equiv 0 (\bmod 10)$, $a_3 \equiv 7+3+7 \equiv 7 (\bmod 10)$, $a_4 \equiv 7+3+7+3 \equiv 0 (\bmod 10)$, luego del comportamiento de los a_i, el dígito de las unidades de $1997 + \ldots + 1997^{2i-1}$, es como sigue:

$a_{2k} = 0$ para $k \in \mathbb{N}$ y $a_{2k-1} = 7$; como $2 \cdot 999 - 1 = 1997$ tenemos que
$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{1997} = \sum\limits_{j=1}^{999} a_{2j-1} = \sum\limits_{j=1}^{999} 7 = 999 \cdot 7 = 6993.$

Solución al problema 62. Ordenemos los 1997 números de menor a mayor es decir $a_1 < a_2 < \ldots < a_{1997}$. Como $a_1 + a_2 + \ldots + a_{11} > 0$ entonces $a_{11} > 0$ luego $a_j > 0$, para $j \geq 12$, por tanto $\sum\limits_{i=1}^{1997} a_i = \sum\limits_{i=1}^{11} a_i + \sum\limits_{j=12}^{1997} a_j > 0$.

Solución al problema 63. Tracemos las perpendiculares desde O hasta las diagonales BD y AC y llame a las proyecciones P y Q respectivamente. Sea O' la intersección de las diagonales entonces

$(AOCB) = \frac{AC}{2}(OQ + O'B) = \frac{AC}{2} \cdot BP = \frac{AC}{2} \cdot \frac{BD}{2} = \frac{AC \cdot BD}{4} = \frac{1}{2}(ABCD)$
$(OCDA) = (ACD) - (AOC) = \frac{AC}{2} \cdot O'D - \frac{AC}{2} \cdot OQ = \frac{AC}{2}(O'D - OQ)$
$= \frac{AC}{2} \cdot DP = \frac{AC}{2} \cdot \frac{BD}{2} = \frac{AC \cdot BD}{4}$, luego $(AOCB) = (OCDA) = \frac{1}{2}(ABCD)$.



Solución al problema 64. Notemos que $\underbrace{666...6}_{666 \text{ veces}} = 2\cdot \underbrace{(33...3)}_{666 \text{ veces}}$,

luego $\underbrace{(66...6)}_{666 \text{ veces}} \underbrace{(33...3)}_{666 \text{ veces}} = 2\cdot \underbrace{(33...3)^2}_{666 \text{ veces}}$

Pero $\underbrace{(333...3)}_{666 \text{ veces}}^2 = \underbrace{999...9}_{666 \text{ veces}} + \underbrace{999...9}_{666 \text{ veces}}0 + ... + \underbrace{999...9}_{666 \text{ veces}}\overbrace{00...0}^{665 \text{ veces}}$

$= \underbrace{111...1}_{665 \text{ veces}}0\underbrace{888...8}_{665 \text{ veces}}9$, por lo que $2\cdot \underbrace{(33...3)^2}_{666 \text{ veces}} = \underbrace{222...2}_{665 \text{ veces}}1\underbrace{77...7}_{665 \text{ veces}}8$.

Solución al problema 65. Sabemos que $0 < p < q < r$, si suponemos que al terminar el juego hubo t reparticiones, con $t \geq 3$ se debe tener que $t(p+q+r) = 39$ de donde t puede ser 3 ó 13. Si $t = 13$ entonces $p = q = r = 1$, lo cual es absurdo por lo que $t = 3$ y $p+q+r = 13$. Como B se quedó con 10 y en su última ronda le tocó r entonces $r \leq 8$. Como A se quedó con 20 y en la última ronda no le tocó r, debemos tener que $r \geq 7$. Luego las posibilidades que tenemos son:

p	q	r
1	4	8
2	3	8
1	5	7
2	4	7

Las posibilidades $(2,3,8)$, $(2,4,7)$ y $(1,5,7)$ quedan descartadas pues ninguna combinación me da las 20 con las que se quedó A.

Luego

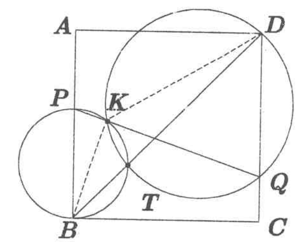
t	A	B	C
1	8	1	4
2	8	1	4
3	4	8	1

Por lo que a C le tocaron q en la primera ronda.

Solución al problema 66. Veremos que es imposible llegar a un arreglo donde los camaleones sean todos del mismo color. Usaremos congruencias módulo 3. Primero observemos que las cantidades de camaleones de cada color son congruentes módulo 3 a -1, 0 y 1 respectivamente.

Ahora observemos que la operación de restar (o aumentar) dos camaleones a un grupo y aumentar (o restar) un camaleón a cada uno de los otros dos grupos, da grupos que en cantidad son congruentes a -1, 0 y 1 en algún orden, es decir cualquiera de las operaciones nos da como resultado tres grupos que dan los tres residuos posibles. Luego operaciones de este estilo nunca podrán llevar a grupos que sean congruentes módulo 3 a 0, 0 y 0.

Solución al problema 67.



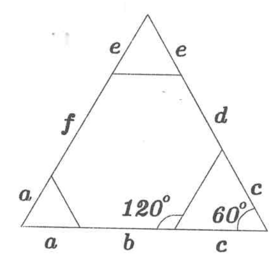
Sea T el segundo punto de intersección de las circunferencias. Como el cuadrilátero $BTKP$ es cíclico, $\angle KTB + \angle BPK = 180°$.

También, por ser cíclico el cuadrilátero $KTQD$, $\angle DTK = \angle DQK$.

Por otro lado como PQ es una transversal que corta a las paralelas AB y CD, se tiene que: $\angle BPK = \angle DQK$.

Con estas tres igualdades, tenemos que: $\angle KTB + \angle DTK = 180°$, por lo que B, T y D son colineales y entonces T esta sobre la diagonal BD.

Solución al problema 68. Como los ángulos del hexágono son iguales, este ángulo vale 120^o, luego si prolongamos lados alternados del hexágono al intersectarse obtenemos un triángulo equilátero .



Sean a, b, c, d, e, f los lados del hexágono como se muestra en la figura entonces $a + b + c + d + e + f = 21$ y si l es el lado del triángulo equilátero formado entonces $l = a+b+c = c+d+e = e+f+a$ de donde obtenemos que $3l = 21 + a + c + e$, así $l = 7 + \frac{a+c+e}{3}$. Pero el valor más chico de $a + c + e$ es 2 cuando la terna (a, c, e) toma los valores $1, 2, 3$ y el más grande es 5 cuando toma los valores $4, 5, 6$. Los valores 3 y 4 los toma únicamente en las ternas que se indica en la siguiente tabla:

$\frac{a+c+e}{3}$	(a,c,e)
2	$(1,2,3)$
3	$(1,2,6)$
	$(1,3,5)$
	$(2,3,4)$
4	$(3,4,5)$
	$(1,5,6)$
	$(2,4,6)$
5	$(4,5,6)$

En el caso de $\frac{a+c+e}{3} = 2$, obtenemos el hexágono tomando $a = 1$, $c = 2$ y $e = 3$, entonces $b = 6$, $d = 4$ y $f = 5$. (Observe que no importa el orden en que se tomen los números 1, 2, 3 para la terna (a, c, e) pues el hexágono es el mismo). Para el siguiente caso donde $l = 10$ la única terna posible es $(1, 3, 5)$, pues por ejemplo la terna $(1, 2, 6)$ es imposible ya que para formar el triángulo de lado 10, en el lado donde aparece 1 y 2 necesitaríamos un segmento de entre b, d, f de medida 7 lo cual es imposible. De la misma forma para el caso $l = 11$ sólo es posible formar un triángulo con la terna $(2, 4, 6)$ y finalmente para $l = 12$ obtenemos otro triángulo posible. Así hemos encontrado cuatro hexágonos posibles con esas características. Las áreas posibles son dos como se ve en el siguiente esquema, recuerde que el área de un triángulo equilátero de lado l es $\frac{l^2 sen60^o}{2}$, luego el área del hexágono es $\frac{sen60^o}{2}(l^2 - (a^2 + c^2 + e^2))$:

$\frac{a+c+e}{3}$	l	área
2	9	$\frac{\sqrt{3}}{4}67$
3	10	$\frac{\sqrt{3}}{4}65$
4	11	$\frac{\sqrt{3}}{4}65$
5	12	$\frac{\sqrt{3}}{4}67$

Solución al problema 69. Paco resuelve los problemas $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4), n \geq 4$, Luis resuelve los problemas $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 5)$, con $2 \leq n \leq 1997$.

Resolviendo el sistema de congruencias $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$, $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 5)$, obtenemos que $n = 4k$, luego $4k \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 5)$ es decir $k = 5n_1 + 3$, y $n = 4k$ $= 20n_1 + 12$, como $2 \leq n \leq 1997$, debemos tener que $0 \leq n_1 \leq 99$ y por tanto hay 100 soluciones posibles.

Solución al problema 70. Hay 8 rectas en cada cara y son 6 caras, tomando el centro del cubo y dos centros de las caras opuestas tenemos otras 3 rectas.

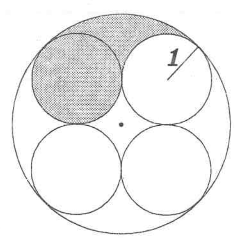
Con el centro del cubo y los vértices opuestos se pueden formar otras 4 rectas. Con el centro del cubo y puntos medios de aristas opuestas tenemos otras 6 rectas.

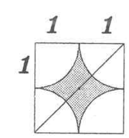
Así el total de rectas que pasan por 3 puntos de los 27 considerados son $6 \cdot 8 + 6 + 4 + 3 = 61$.

Solución al problema 71. Con los centros de los círculos de radio 1 formamos un cuadrado de lado 2, luego la diagonal mide $2\sqrt{2}$, por lo que el radio de la circunferencia grande es $1+\sqrt{2}$, así su área es $\pi\left(1+\sqrt{2}\right)^2$. El área del cuadrado es 4, por lo que el área de la región sombreada en el cuadrado formado por los centros es $4-\pi$.

Así el área pedida es

$$\begin{aligned}\frac{\pi\left(1+\sqrt{2}\right)^2 - 4\pi - (4-\pi)}{4} + \pi &= \frac{\pi\left(1+\sqrt{2}\right)^2 - 4 + \pi}{4} \\ &= \frac{4\pi + 2\sqrt{2}\pi - 4}{4} \\ &= \pi - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)\pi - 1.\end{aligned}$$





Solución al problema 72. Al realizar la división vemos que $\frac{4}{101} = 0.00\overline{3960}$, como $1995 = 4(498) + 3$, tenemos que el lugar 1997 lo ocupa el 6.

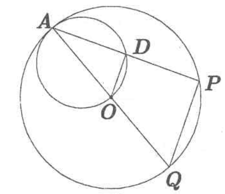
Solución al problema 73. Sabemos que $2n+1 = k^2$, como k debe ser impar, supongamos que $k = 2j-1$. Luego $2n+1 = (2j-1)^2 = 4j^2 - 4j + 1$ y entonces $2n = 4j^2 - 4j$ por lo que $n = 2j^2 - 2j$ y finalmente

$$n + 1 = 2j^2 - 2j + 1 = j^2 + \left(j^2 - 2j + 1\right) = j^2 + (j-1)^2.$$

Solución al problema 74. Sea t un número que cumple la condición, luego existe q entero tal que $1997^2 = qt + 1997$ de donde $qt = 1997^2 - 1997 = 1997(1997-1) = 1997(1996) = 2^2 \cdot 499 \cdot 1997$ luego q, t dividen a $1997(1996)$.

Además $1997 < t$ por lo que $t = 2 \cdot 1997$, $4 \cdot 1997$, $499 \cdot 1997$, $2 \cdot 499 \cdot 1997$, $4 \cdot 499 \cdot 1997$ y son los únicos cinco números que cumplen la condición.

Solución al problema 75. Sea D el punto de intersección del círculo con diámetro AO y AP, luego $\triangle AOD$ y $\triangle AQP$ son triángulos rectángulos por ser AO y AQ diámetros de sus respectivos circuncírculos y con un ángulo común, luego son semejantes en razón $1:2$, por tanto $AD = DP$.



Solución al problema 76. Si a, b y c son los lados del triángulo y si $a = \frac{b+c}{3}$, veamos que $a < b$ y $a < c$, con esto bastaría, pues a lados menores se oponen ángulos menores.

Si por ejemplo $a \geq b$, entonces como $3a = b + c$, tendríamos que $c \geq 2a$, por otro lado $b \leq a$ implica que $a + b \leq 2a$ y como $2a \leq c$ tendríamos $a + b \leq c$, lo cual no puede ser por el hecho de que un lado del triángulo es menor que la suma de los otros dos.

Solución al problema 77. Sea G el gravicentro del $\triangle ABC$, es decir G es la intersección de las medianas. Llamemos $x = GL$, como $CG = 2GL = 2x$, se sigue del Teorema de Pitágoras que $BG = \sqrt{25 - x^2}$, como $BG = 2GN$, tenemos que $GN = \frac{\sqrt{25-x^2}}{2}$. De nuevo por Pitágoras aplicado al $\triangle GCN$, llegamos a que

$$4x^2 + \frac{25 - x^2}{4} = \frac{225}{4}$$

luego $15x^2 = 200$ y entonces $x = 2\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}$.

Otra vez por Pitágoras: $BC^2 = \left(\frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(25 - \frac{40}{3}\right) = \frac{195}{3} = 65$, por tanto $BC = \sqrt{65}$.

Solución al problema 78. Cuando sumamos un número de dos cifras y el número escrito con las mismas cifras en orden inverso, la suma es un número de tres o de dos dígitos, en este último caso los dígitos son iguales. Como ningún cuadrado perfecto menor que 100 tiene dos cifras iguales, debemos buscar en sumas que sean mayores que 100.

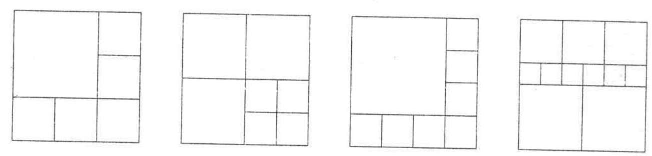
En este tipo de sumas si el dígito de las unidades es t, entonces el dígito de las decenas es $t + 1$, por lo que el único cuadrado al que podemos llegar es a 121 y las soluciones son $29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92$.

Solución al problema 79. Claramente $x = y = 2 \cdot 1997$ es solución, además como $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$ otra solución es $x = 1998$, $y = 1997 \cdot 1998$ y por simetría también es solución $x = 1997 \cdot 1998$, $y = 1998$.

Como $(x + y)1997 = xy$ entonces $1997 \mid xy$, pero 1997 es primo, luego $1997 \mid x$ ó $1997 \mid y$. Supongamos que $1997 \mid x$ entonces $x = 1997n$ para algún n entero, luego $\frac{1}{1997 \cdot n} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1997}$, $\frac{1}{y} = \frac{n-1}{1997 \cdot n}$, entonces $n - 1 \mid 1997 \cdot n$ y como n, $n - 1$ son primos relativos entonces $n - 1 \mid 1997$ de donde $n = 1998$, por lo cual da la solución $x = 1997 \cdot 1998$, $y = 1998$ ó $n - 1 = 1$ de donde $n = 2$ y $x = 2 \cdot 1997 = y$. El caso $1997 \mid y$ es análogo, así las únicas soluciones son las señaladas inicialmente.

Solución al problema 80. Si $\sqrt{x + \sqrt{x}} = \sqrt{2}$, entonces $x + \sqrt{x} = 2$, luego $\sqrt{x} = 2 - x$ por lo que $x \leq 2$. Elevando al cuadrado llegamos a $x = 4 - 4x + x^2$ de donde $x^2 - 5x + 4 = 0$, que tiene por soluciones a $x = 4$ ó $x = 1$ pero como $x \leq 2$ entonces $x = 1$ es la única solución.

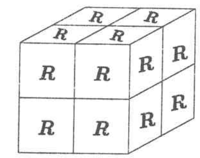
Solución al problema 81. Para $n = 6$, $n = 7$, $n = 8$, $n = 11$.



Solución al problema 82. Hagamos $y = \frac{1-x}{x}$ entonces $\sqrt{\frac{1-x}{x}} + \sqrt{\frac{x}{1-x}} = \frac{13}{6}$ se convierte en $\sqrt{y} + \sqrt{\frac{1}{y}} = \frac{13}{6}$, luego $y + 2 + \frac{1}{y} = \frac{169}{36}$, para obtener la ecuación $y^2 - \frac{97}{36}\, y + 1 = 0$ entonces $y = \frac{\frac{97}{36} \pm \sqrt{\frac{97^2}{36^2} - 4}}{2} = \frac{97}{72} \pm \frac{\sqrt{(97-72)(97+72)}}{72} = \frac{97}{72} \pm \frac{5 \cdot 13}{72}$ luego $y = \frac{9}{4}$, $y = \frac{4}{9}$ de donde las soluciones son $x = \frac{4}{13}$ y $x = \frac{9}{13}$.

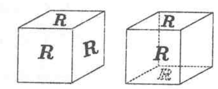
Solución al problema 83.

(a) Se necesitan pegar como mínimo 8. El paralelepípedo tiene 8 esquinas y un cubito puede en principio contribuir para el sólido con $1, 2$ ó 4 esquinas del paralelepípedo. Un cubito no puede contribuir con 2 esquinas del paralelepípedo, pues si A y B son las esquinas, los lados alrededor de A y B deberán ser del mismo color. Luego el cubito debería tener 4 caras de un mismo color. Tampoco puede contribuir con 4 esquinas, tendría el cubito que tener 5 caras del mismo color. Luego cada cubito puede contribuir con una esquina del paralelepípedo. Por lo que son necesarios al menos 8 cubitos, el siguiente ejemplo muestra que 8 es óptimo.

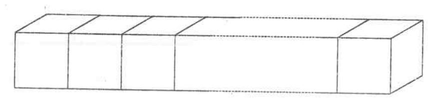


(b) Hay 2 tipos de cubitos uno donde alrededor de un vértice hay tres caras de un mismo color digamos rojos y las otras tres caras azules.

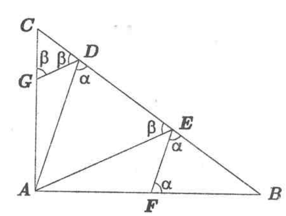
El otro tipo de cubito tiene la base, la tapa y la cara de enfrente de un color digamos rojas y las otras tres caras azules.



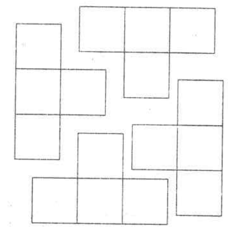
(c) No es posible. Como 1997 es primo, la única posibilidad de acomodar los 1997 cubitos para formar un paralelepípedo es que estén todos alineados, en cuyo caso las caras del paralelepípedo serán monocromáticas si todos los cubitos tienen 4 ó 5 caras del mismo color lo que es imposible.



Solución al problema 84. Como $BD = BA$ y $BE = BF$ entonces $DE = AF$ y de la misma manera $DE = AG$. Además $EF \parallel AD$ y $DG \parallel AE$. Luego A, D, E, F son cíclicos de la misma forma se ve que G, D, E, A son cíclicos, luego G, D, E, F, A están sobre la misma circunferencia.



Solución al problema 85. Para $n = 4k$ es posible, pues basta ver que cada cuadrado de 4×4 se puede cubrir, una manera de cubrir el de 4×4 es la siguiente



Para n impar es imposible de llenar un cuadrado de $n \times n$, ya que una cuadrícula así tiene un número impar de cuadritos unitarios y cada pieza cubre un número par de estos.

Para $n = 4k+2$ también es imposible, ya que si pintamos el tablero de $n \times n$ de blanco y negro en forma alternada como tablero de ajedrez, tendremos que de los $(4k+2)^2 = 16k^2 + 16k + 4$ cuadritos unitarios que hay, la mitad son blancos y la otra mitad negros y un número par de cada color. Por otro lado como cada pieza cubre 4 cuadritos, necesitamos para cubrir la cuadrícula $4k^2 + 4k + 1$ piezas, un número impar, cada pieza cubre uno o tres cuadros negros, si U es el número de piezas que cubren un cuadrito negro y T el número de piezas que cubren tres cuadritos negros, tenemos que $U + T = 4k^2 + 4k + 1$, luego uno de U y T debe ser impar, digamos T, entonces el número de cuadritos negros que cubre las T piezas es impar, luego nunca podrá ser $8k^2 + 8k + 2$.

Solución al problema 86. No se puede encontrar un acomodo así.

Supongamos que si es posible y que el acomodo es el siguiente:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

entonces la suma que se pide igualar es:

$$abc + def + ghi + adg + beh + cfi = 1997$$

Pero al tomar congruencia módulo 9, tenemos en el lado izquierdo que:

$$\begin{aligned} abc + def + ghi + adg + beh + cfi &\equiv 2\,(a+b+c+d+e+f+g+h+i) \\ &\equiv 2\,(1+2+3+4+5+6+7+8+9) \\ &\equiv 2 \cdot 45 \equiv 0 \pmod 9 \end{aligned}$$

Por otro lado $1997 \equiv 8 \pmod 9$. Luego no es posible el acomodo.

Solución al problema 87. Como A', B', C' son los puntos medios de los arcos BC, AC, AB respectivamente, AA', BB', CC' se intersectan en I.

$\angle C'B'A' = \frac{1}{2}\ \widehat{C'BA'} = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle C$ y $\angle CC'B' = \frac{1}{2}\ \widehat{B'C} = \frac{1}{2}\angle B$ luego $\angle C'B'A' + \angle CC'B' = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C) = 90°$, por tanto CC' es perpendicular a $A'B'$. Análogamente AA' y $C'B'$ son perpendiculares y BB' y $C'A'$ son perpendiculares.

Solución al problema 88. Sea t el número de cajas de 36 vasos, m el de cajas de 24 vasos y n el de cajas de 20 vasos. Tenemos que $[36, 24, 20] = 360$ y como $8000 = 360 \cdot 22 + 80$, luego como $\frac{360}{36} = 10$, $\frac{360}{24} = 15$, $\frac{360}{20} = 18$ tenemos que $22 = 3 \cdot 7 + 1$ de donde $t = 7 \cdot 10 = 70$, $m = 15 \cdot 7 = 105$ y $n = 18 \cdot 7 = 126$. Como $70 \cdot 36 + 105 \cdot 24 + 126 \cdot 20 = 7560$ la respuesta es 440 vasos.

Soluciones del Examen del Concurso Nacional

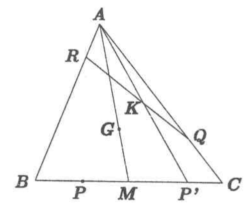
Solución al problema 89. Para $p = 5$ tenemos que $8p^4 - 3003 = 1997$, que es primo. Ahora veamos que es la única posibilidad. Sea p un número primo distinto de 5 y supongamos que $8p^4 - 3003$ es primo. Ahora procedamos de la siguiente manera: tenemos que

$$8p^4 - 3003 \equiv 3p^4 - 3 \equiv 3\left(p^4 - 1\right) (\text{mod } 5),$$

Pero $p^4 - 1 \equiv 0\,(\text{mod } 5)$ para cualquier primo $p \neq 5$ (Esto se comprueba fácilmente analizando los posibles residuos de p), así que $8p^4 - 3003$ es divisible entre 5 y, como estamos suponiendo que es primo, la única posibilidad es $8p^4 - 3003 = 5$, lo cual es un absurdo pues $\frac{3008}{8} = 376$ no tiene raíz cuarta entera.

Nota. Se puede evitar el lenguaje de las congruencias, observando que si p es un primo distinto de 2 y de 5, entonces p termina en 1, 3, 7 ó 9, así que p^4 termina en 1 y, por tanto, $8p^4 - 3003$ termina en 5, lo cual lo hace forzosamente múltiplo de 5. El caso $p = 2$ se puede tratar aparte (viendo que $8(2)^4 - 3003 < 0$) o que también 2^4 termina en 6, así que $8p^4 - 3003$ también termina en 5.

Solución al problema 90. Usando el teorema de Tales tenemos que $QP' \| AB$, puesto que estos segmentos están cortados por las transversales CA y CB, y se tiene que $\frac{CQ}{QA} = \frac{CP'}{P'B}$. Entonces los triángulos $\triangle CQP'$ y $\triangle CAB$ son semejantes con razón de semejanza $\frac{CQ}{QA}$; de aquí que $QP' = AR$. Tenemos entonces que los triángulos $\triangle AKR$ y $\triangle P'KQ$ son iguales, de donde K es el punto medio de AP'. Sea. M el punto medio de BC.



Aquí podemos proceder de dos maneras:

1^{era} *forma.* Notemos que M también es punto medio de PP' y, como $AG = 2GM$, entonces G también es centroide de $\triangle APP'$, de donde la mediana PK pasa por G, y así P, G y K están alineados.

2^{a} *forma.* Usemos el teorema de Menelao en el $\triangle AMP'$ para deducir la colinealidad de P, G y K:

$$\frac{AG}{GM} \cdot \frac{MP}{PP'} \cdot \frac{P'K}{KA} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 = -1.$$

Solución al problema 91.

(i) A continuación se muestra una posibilidad para acomodar los números de manera que en cuadros adyacentes la diferencia de los números que aparecen es menor o igual a 4.

1	3	6	10
2	5	9	13
4	8	12	15
7	11	14	16

(ii) Supongamos que sí es posible colocar los números y analicemos como deben estar acomodados. En la lista de seis números $1, 4, 7, 10, 13, 16$, entre dos números consecutivos hay una diferencia de 3, de manera que en cualquier colocación de los números en la cuadrícula de 4×4 en la que las diferencias en casillas adyacentes fueran menores o iguales que 3, los números 1 y 16 deberían estar a una separación de, por lo menos, 6 casillas; esto sólo es posible si uno está en una esquina y el otro en cualquiera de los tres cuadritos de la esquina opuesta. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que 1 aparece en la esquina superior izquierda; entonces el 16 debe quedar en cualquiera de las 3 casillas más lejanas, como se indica en el esquema siguiente.

1			
			16
		16	16

Supongamos que 16 no aparece en la esquina. Esto forzaría a que en cualquier "camino" que usara seis casillas adyacentes entre los cuadritos donde se encontraran el 1 y el 16, aparecieran exactamente los números de la lista; sin

Supongamos que 16 no aparece en la esquina. Esto forzaría a que en cualquier "camino" que usara seis casillas adyacentes entre los cuadritos donde se encontraran el 1 y el 16, aparecieran exactamente los números de la lista; sin embargo, hay más de un camino entre las dos casillas (ver el ejemplo en la figura, abajo), lo que forzaría a que hubiera repetición de números.

1	4	7	10
4	7	10	13
		13	16

Entonces, el 16 aparece en la esquina inferior derecha. Ahora observamos que en dos cuadritos diagonales que compartan un vértice, la diferencia máxima que puede haber es 5, puesto que en cuadros adyacentes la diferencia máxima debe ser 6, pero los números no pueden estar repetidos. Como del 1 al 16 se llega en 4 pasos con diferencias de 5: $1-6-11-16$, la única posibilidad es que estos números queden en la diagonal, como se indica en la figura abajo. Además, en las casillas adyacentes al 1 deben aparecer el 3 y 4, puesto que con ambos 1 y 6 la diferencia debe ser a lo más 3. Sin pérdida de generalidad aparecen como en el esquema.

1	3		
4	6		
		11	
			16

Entonces las casillas que sobran para acomodar el 2 quedan todas a una distancia a lo más de 4 de la casilla donde está el 16; sin embargo, para llegar del 2 al 16 con diferencia a lo más de 3 se necesitan por lo menos 4 números intermedios, así que no es posible la colocación.

Solución al problema 92. Supongamos que tenemos 6 puntos no coplanares en el espacio de manera que no hay tres alineados. Tenemos varios casos:

(I) Si 5 de ellos son coplanares. Entonces estos determinan un plano y el otro punto determina un plano más con cada pareja de los coplanares; como son $\binom{5}{2}=10$ parejas, en total se determinan 11 planos.

(II) Si no hay 5 coplanares pero sí 4. Sean A, B, C y D los cuatro puntos coplanares, sea P el plano que determinan y sean X y Y los otros puntos. Tenemos tres subcasos:

(IIa) Si X y Y no son coplanares con ninguna pareja de A, B, C y D. Entonces cada pareja de A, B, C y D determina un plano con cada uno de X y Y y además tenemos P, así que en este caso se determinan por lo menos $1+2\binom{4}{2}=13$ planos.

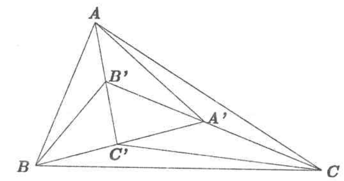
(IIb) Si X y Y son coplanares con exactamente una de las parejas de A, B, C y D, digamos con (A, B). Entonces tenemos $2+2\left[\binom{4}{2}-1\right]=12$ planos, pues cada uno de X y Y determina un plano con cada una de las parejas de A, B, C y D distintas de (A, B) (esto es, tenemos los planos: (A, B, C, D), (X, Y, A, B), (X, A, C), (X, A, D),(X, B, C), (X, B, D), (X, C, D), (Y, A, C), (Y, A, D), (Y, B, C), (Y, B, D) y (Y, C, D).

(IIc) Si X y Y son coplanares con dos de las parejas de A, B, C, y D. Observemos que las parejas deben ser ajenas, pues X y Y no pertenecen a P. Sin pérdida de generalidad, las parejas son (A, B) y (C, D). Este caso es como el anterior sólo que aquí hay un plano repetido: (X, C, D) coincide con (Y, C, D), así que en este caso son 11 planos.

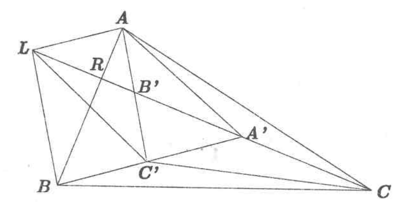
(III) Si no hay 4 coplanares. En este caso, cada terna determina un plano, así que son $\binom{6}{3} = 20$. Hemos analizado todos los casos y con ello probado que el menor número de planos posible es 11.

Solución al problema 93. Presentaremos aquí dos soluciones. En ambas denotaremos por (XYZ) el área de un triángulo XYZ.

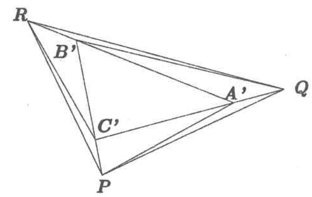
1^{era} *solución.* Observemos primero que el $\triangle ABC$ se parte en los 7 triángulos de la misma área que se indican en la figura. (Por ejemplo, $(AB'A') = (AA'C)$ pues $B'A' = A'C$ y la altura en A es la misma).



Construyamos un paralelogramo $BLAC'$, como se indica en la figura.



Entonces, como $LA = BC' = C'A'$, también $LAA'C'$ es paralelogramo, así que sus diagonales se intersectan en el punto medio que es B' (pues $AB' = B'C'$). También las diagonales de $LABC'$ se intersectan en su punto medio, así que en el $\triangle ALC'$, AR es mediana, pero como también lo es LB', tenemos que R es centroide de este triángulo, de donde $RB' = \frac{1}{3}LB' = \frac{1}{3}B'A'$. Análogamente, $C'P = \frac{1}{3}B'C'$ y $A'Q = \frac{1}{3}C'A'$. Partamos $\triangle PQR$ como se indica.



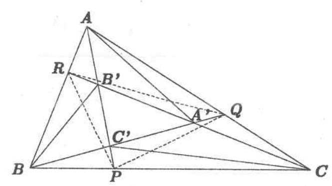
Como antes, los triángulos $\triangle RB'C'$, $\triangle PA'C'$ y $\triangle QA'B'$ tienen área $\frac{1}{3}$ $(A'B'C')$ y los triángulos $\triangle PRC'$, $\triangle PQA'$ y $\triangle RQB'$ tienen área $\frac{1}{9}(A'B'C')$. Entonces

$$\begin{aligned}(PQR) &= (A'B'C') + 3\left(\tfrac{1}{3}(A'B'C')\right) + 3\left(\tfrac{1}{9}(A'B'C')\right)\\ &= \tfrac{7}{3}(A'B'C') = \tfrac{7}{3}\cdot\tfrac{1}{7}(ABC) = \tfrac{1}{3}(ABC)\end{aligned}$$

2^a *Solución.* Aplicando el Teorema de Menelao al triángulo $\triangle ABC'$ y a la recta RA' tenemos que:

$$-1 = \frac{AR}{RB}\cdot\frac{BA'}{A'C'}\cdot\frac{C'B'}{B'A} = \frac{AR}{RB}\cdot(-2)\cdot 1,$$

de donde $\frac{AR}{RB} = \frac{1}{2}$; por tanto $AR = \frac{1}{3}AB$. Análogamente $AQ = \frac{2}{3}AC$.



Ahora,

$$(ARQ) = \frac{AQ\cdot AR\cdot sen\angle A}{2} = \frac{\frac{1}{3}AB\cdot\frac{2}{3}AC\cdot sen\angle A}{2} = \frac{2}{9}(ABC).$$

Análogamente, $(PQC) = \frac{2}{9}(ABC)$ y $(BRP) = \frac{2}{9}(ABC)$. Entonces

$$(PQR) = \left(1 - 3\cdot\frac{2}{9}\right)(ABC) = \frac{1}{3}(ABC)$$

Solución al problema 94. Observemos que si n es cualquier natural, entonces $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$, de donde

$$(*)\ \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Usando esto y que $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$, podemos hacer las sustituciones $\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$ por $\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$ y $\frac{1}{6}$ por $\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$, para obtener una nueva expresión en la que los denominadores son más grandes. Luego podemos repetir el procedimiento hasta lograr una expresión en la que el denominador más chico sea 5 y no haya repetidos:

$$\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{6}\right)+\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{12}\right)+\left(\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{42}\right)=1,$$

$$\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{12}\right)+\left(\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{42}\right)+\left(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{20}\right)+\left(\tfrac{1}{13}+\tfrac{1}{156}\right)+\left(\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{56}\right)+\left(\tfrac{1}{43}+\tfrac{1}{1806}\right)=1.$$

Ahora sólo sustituimos $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{20}$ y los ordenamos:

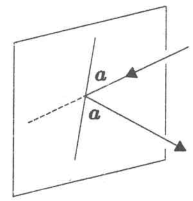
$$\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{13}+\tfrac{1}{20}+\tfrac{1}{21}+\tfrac{1}{30}+\tfrac{1}{42}+\tfrac{1}{43}+\tfrac{1}{56}+\tfrac{1}{156}+\tfrac{1}{420}+\tfrac{1}{1806}=1.$$

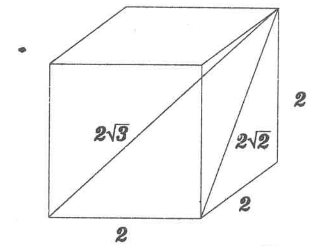
Hemos logrado entonces una expresión de las requeridas. Para probar que hay una infinidad basta observar que al sustituir el término que tenga el denominador mayor (usando (*)) se obtienen denominadores aún mayores.

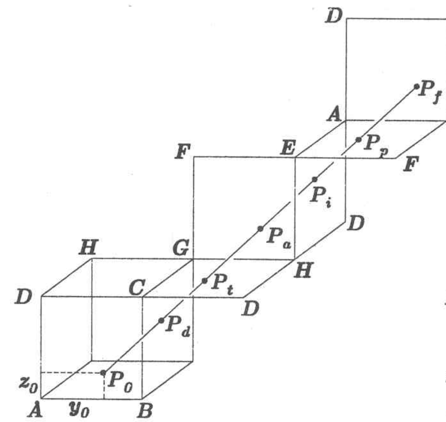
Soluciones del Examen Selectivo

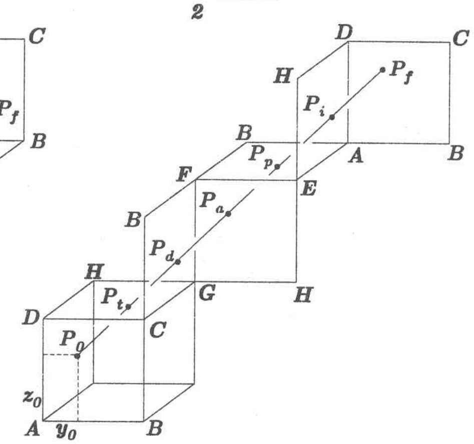
Solución al problema 95. Bastará probar que en cualesquiera dos columnas consecutivas, el número de segmentos horizontales rojos que se producen en ellas, coincide con el de segmentos azules (pues, por analogía, ocurrirá lo mismo en los renglones, y además porque todos los segmentos se producen entre dos renglones o columnas consecutivas). Para ello, llamemos R a los puntos rojos y A a los azules, y observemos que las posibilidades en las dos columnas consecutivas son $A-R$, $A-A$, $R-A$ y $R-R$; cada vez que aparezca $R-A$, deberá aparecer también en algún momento $A-R$ pues en esas dos columnas hay el mismo número de segmentos rojos que azules; de esta manera se pueden aparear todos los $A-R$ con los $R-A$; los que sobran, deben ser el mismo número de $A-A$ que de $R-R$.

Solución al problema 96. Pensemos que las caras del cubo son espejos; entonces al rebotar la pelota, se verá en el espejo como si continuara su trayectoria en línea recta.









Así, si imaginamos la trayectoria como una recta, el que la pelota vaya tocando cada una de las paredes nos dice que recorrerá dos niveles hacia un lado, dos niveles hacia atrás y dos niveles hacia arriba (o abajo), de aquí que la longitud de la trayectoria de la pelota es la misma que la distancia que hay entre dos vértices opuestos en un cubo de arista 2, esto es $2\sqrt{3}$ (aplicando Pitágoras dos veces).

Supongamos ahora que el punto P_o está situado a distancia y_0 a la derecha y z_0 hacia arriba, e imaginemos que la pelota va hacia arriba a la derecha (si $y_0 = 1$ ó $z_0 = 1$, podemos pensar que desde la salida la pelota va detrás del espejo). Trazando la recta que une P_o con el punto situado dos unidades atrás de P_o, dos unidades hacia la derecha y dos unidades hacia arriba, encontraremos los puntos de corte buscados: el punto P_d de la pared derecha estará en el primer nivel (de espejos) hacia la derecha; el punto P_i de la pared izquierda estará dos niveles hacia la derecha; el punto P_t del techo estará en el primer nivel hacia arriba; el punto P_p del piso en el segundo nivel hacia arriba; el punto P_a de la pared de atrás estará en el primer nivel hacia atrás; y el punto P_f en la pared frontal (que debe ser la imagen del punto inicial) se encontrará dos niveles hacia atrás.

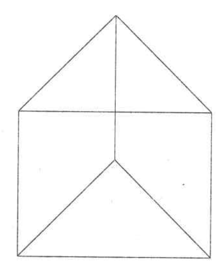
Calculemos ahora la distancia P_oP_d; para ello observemos que P_oP_d, por la inclinación de 45° que lleva en cualquier sentido la trayectoria, es diagonal de un cubo; la arista de ese cubo es la distancia de P_o a la pared derecha: $1 - y_o$, así que la distancia de P_o a P_d es $\sqrt{3}\,(1 - y_o)$.

Análogamente $P_oP_t = \sqrt{3}\,(1 - z_o)$, $P_oP_a = \sqrt{3}$, $P_oP_i = \sqrt{3}\,(2 - y_o)$, $P_oP_p = \sqrt{3}\,(2 - z_o)$ y $P_oP_f = 2\sqrt{3}$. De aquí podemos obtener fácilmente todas las posibilidades: Si $y_o > z_o$, entonces:

$$P_oP_d < P_oP_t < P_oP_a < P_oP_i < P_oP_p < P_oP_f$$

, así que la pelota irá tocando en sucesión; pared derecha, techo, pared de atrás, pared izquierda y piso, y la distancia al primer punto de rebote será $\sqrt{3}\,(1 - y_o)$. Si $y_o < z_o$, entonces la sucesión correspondiente será; techo, pared derecha, pared de atrás, piso y pared izquierda, y la distancia al punto de rebote será $\sqrt{3}\,(1 - z_o)$. En los casos $y_o = z_o$ o si alguno de y_o o z_o es 0 ó 1, algunas de las desigualdades de arriba son igualdades y la pelota tocará simultáneamente las paredes correspondientes.

Solución al problema 97. El ejemplo con 6 elementos puede construirse como se muestra en la figura, en donde los segmentos que aparecen todos tienen longitud 1 (entonces cada punto es circuncentro de los tres puntos con los que está unido).



Es claro que S tiene al menos 4 elementos.

Supongamos que $S = \{A, B, C, D\}$. Entonces cada uno es circuncentro de los otros tres. Como A es el circuncentro de BCD, tenemos que $\angle BAC = 2\angle BDC$; por otro lado, como D es el circuncentro de BAC, entonces $\angle BDC = 2\angle BAC$. Las dos ecuaciones con ángulos que obtuvimos no pueden ser verdaderas simultáneamente, así que S no puede tener sólo 4 elementos.

Ahora supongamos que S tiene 5 elementos A, B, C, D y E. Para cada $X \in S$, escojamos R, S y T, elementos distintos de S, de tal manera que X sea el circuncentro de RST y escribamos esto por $f(X) = RST$. De esta manera tenemos una función inyectiva $f : S \longrightarrow T$, donde T es el conjunto de triángulos con vértices en S; además f cumple que X no es uno de los elementos de $f(X)$, para $X \in$S.

Sin pérdida de generalidad supongamos que

$$f(A) = BCD;$$

entonces, por la inyectividad, forzosamente tenemos que, sin pérdida de generalidad,

$$f(E) = ABC.$$

Ahora tenemos tres posibilidades para $f(D)$: $f(D) = BCE$, $f(D) = ABE$ y $f(D) = ACE$. Podemos observar que: las dos últimas son del mismo tipo (en cuanto a las letras que tienen en común con $f(A)$ y $f(E)$), así que son esencialmente dos posibilidades. Analicemos cada una:

(I) Supongamos primero que $f(D) = BCE$. Observemos que BC aparece en $f(A)$, en $f(E)$ y en $f(D)$, y que cada uno de esos circuncentros aparece como tercer punto en otro de éstos, lo cual implica que $\angle BAC = 2\angle BDC = 4\angle BEC = 8\angle BAC$, que es un absurdo.

(II) Ahora supongamos que $f(D) = ABE$. Entonces

$$AE \perp BC \text{ y } ED \perp AB \; (*)$$

(pues A y E están en la mediatriz de BC, y E y D están en la mediatriz de AB). Tenemos cuatro posibilidades para $f(B)$:

(IIa) $f(B) = CDE$. Entonces $AB \perp CD$ y, por (*), E, C y D están alineados, lo cual es imposible porque B es su circuncentro.

(IIb) $f(b) = ADE$. Entonces $BD \perp AE$, así que, por (*), B, C y D están alineados, lo cual es imposible porque A es su circuncentro.

(IIc) $f(B) = ACE$. Entonces $BD \perp AE$, lo cual es imposible como vimos en el caso anterior.

(IId) $f(B) = ACD$. Entonces $AB \perp CD$, así que C, D y E están alineados. En este caso tenemos dos posibilidades para $f(C)$: $f(C) = ADE$ y $f(C) = BDE$ (no consideramos el caso $f(C) = ABD$, pues AB aparece tres veces y los otros puntos aparecen en los demás, así que sería como el caso (II)).

Si $f(C) = ADE$, entonces $BC \perp AD$, así que A, E y D están alineados, lo cual es una contradicción porque C es su circuncentro.

Si $f(C) = BDE$, entonces $DC \perp BE$, de donde A, B y E están alineados, también imposible puesto que D es su circuncentro.

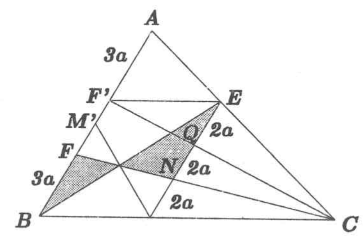
Hemos abarcado todas las posibilidades y, en cada una se llega a una contradicción, por lo que no es posible que S tenga sólo 5 elementos.

Solución al problema 98. Observemos que basta considerar el caso $r = 1$ en el plano complejo, con los vértices de polígono como las raíces $n-$ésimas de 1 y $A_1 = 1$, pues la figura en el caso general sería semejante a esta, con razón de semejanza r, así que cada una de las $n-1$ longitudes estaría afectada por un factor r. Consideremos entonces ese caso. Así $d_2 d_3 ... d_n = |1 - A_2| \cdot |1 - A_3| ... |1 - A_n|$. Consideremos el polinomio

$$x^n - 1 = (x - 1)\left(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1\right)$$

este polinomio tiene por raíces a las A_i, así que, en los complejos, se puede factorizar como $x^n - 1 = (x-1)(x-A_2)(x-A_3)...(x-A_n)$, de donde $x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1 = (x-A_2)(x-A_3)...(x-A_n)$. Sustituyendo 1 en ambos miembros de la igualdad y tomando normas, tenemos la igualdad buscada: $n = |1-A_2| \cdot |1-A_3| ... |1-A_n|$.

Solución al problema 99. Sea F' el punto sobre AB tal que $BF = FF' = F'A$ y sea N el punto de intersección de ED con FC, y Q la intersección de $F'C$ con DE.



Entonces $F'EDB$ es paralelogramo, así que los triángulos $\triangle FIB$ y $\triangle NIE$ son semejantes. Como F y F' trisectan a AB y $ED \parallel AB$, entonces N y Q trisectan a DE. Calculemos la razón de semejanza entre $\triangle FIB$ y $\triangle NIE$; Sea $FB = 3a$; entonces $6a = F'B = ED$, de donde $ND = 2a$ y $NE = 4a$; así la razón de semejanza es $\frac{3}{4}$. Sea M' el punto de intersección de DI con AB. Probaremos que $M' = M$. Tenemos que $\triangle FIM'$ es semejante a $\triangle NID$ y la razón de semejanza es la misma que entre $\triangle FIB$ y $\triangle NIE$ pues en aquéllos dos lados correspondientes son FI y IN, que también son lados correspondientes en éstos. Entonces $M'F = \frac{3}{4}ND = \frac{3}{4}2a = \frac{3}{4}a$; por tanto $M'B = M'F + FB = \frac{3}{2}a + 3a = \frac{9}{2}a = \frac{1}{2}AB$ y $M' = M$.

Solución al problema 100. La sucesión es la siguiente:

$$0, 1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, 27, 28, 30, 31, 36, 37, 39, 40, 81, 82, ...$$

Si hacemos la expansión de estos números en base 3, observaremos que son precisamente los números en los que no aparecen $2's$. Probemos que este es el caso demostrando las siguientes dos afirmaciones:

(I) Si $a < b < c$ son enteros sin $2's$ en su expansión ternaria, entonces $2b \neq a + c$.

(II) Todo número b que tenga $2's$ en su expansión ternaria es promedio de dos números distintos que no tienen $2's$.

Demostración de (I): Observemos que si B es un número sin $2's$, entonces $2b$ no tiene $1's$, por otro lado, si a y c son números diferentes sin $2's$, entonces al efectuar su suma tendremos las siguientes posibilidades: si los dos tienen 0 en determinada posición, la suma será 0; si los dos tienen 1, la suma será 2, y si uno tiene 0 y el otro tiene 1, entonces la suma será 1; como éste último debe ser el caso en algún lugar porque a y c son distintos, entonces $a + c$ deberá tener por lo menos un 1, así que no podrá ser igual a $2b$.

Demostración de (II): Consideremos el número $2b$ y probemos que éste se puede poner como suma de dos números distintos a y c que no tienen $2's$. Observemos que $2b$ forzosamente tiene un 1 porque b tiene $2's$, (en el primer lugar de la derecha en que b tenga un 2, $2b$ tendrá un 1). Para construir a y c cada dígito de $2b$ lo partimos como sigue: $0 = 0 + 0$, $2 = 1 + 1$ y $1 = 1 + 0$; por la observación hecha al principio de esta demostración, a y c resultan ser distintos.

Tenemos entonces que x_{1997} es el número cuya expansión ternaria es igual a la expansión binaria de 1997, de aquí que, como $1997 = 2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^3+2^2+1$, tenemos que $x_{1997} = 3^{10}+3^9+3^8+3^7+3^6+3^3+3^2+1 = 88246$.

SOLUCIONES

1.- (a)	26.-(b)
2.- (d)	27.-(c)
3.- (a)	28.-(b)
4.- (a)	29.-(a)
5.- (d)	30.-(c)
6.- (c)	31.-(a)
7.- (c)	32.-(b)
8.- (c)	33.-(c)
9.- (c)	34.-(c)
10.-(a)	35.-(b)
11.-(c)	36.-(c)
12.-(a)	37.-(b)
13.-(b)	38.-(a)
14.-(a)	39.-(d)
15.-(d)	40.-(c)
16.-(b)	41.-(b)
17.-(c)	42.-(a)
18.-(b)	43.-(d)
19.-(d)	44.-(c)
20.-(c)	45.-(b)
21.-(b)	46.-(d)
22.-(a)	47.-(c)
23.-(c)	48.-(a)
24.-(a)	49.-(b)
25.-(b)	50.-(d)

Bibliografía

[C] Comité Organizador de la Olimpiada Matemática Mexicana, *Olimpiada de Matemáticas, 140 problemas.* Academia de la Investigación Científica, México 1993.

[G] E. Gentile, *Aritmética Elemental*, Monografía No. 25 de la Serie de Matemáticas del Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico de la OEA. Ediciones de la OEA, 1988.

[Gr] R. Grimaldi, *Matemáticas Discreta y Combinatoria.* Addison-Wesley Iberoamericana, México 1989.

[GL] V. Gusiev, V. Litvinenko, A. Mordkovich, *Prácticas para Resolver Problemas de Matemáticas, (Geometría).* Editorial Mir, Moscú 1969.

[LM] V. Litvinenko, A. Mordkovich, *Prácticas para Resolver Problemas de Matemáticas, (Algebra y Trigonometría).* Editorial Mir, Moscú 1989.

[NZ] I. Niven, H. Zuckerman, *Introducción a la Teoría de los Números.* Limusa-Wiley, México 1972.

[S] H. Shariguin, *Problemas de Geometría*, Colección Ciencia Popular. Editorial Mir, Moscú 1989.

[V] N. Vilenkin, *¿De Cuántas Formas? (Combinatoria).* Editorial Mir, Moscú 1972.