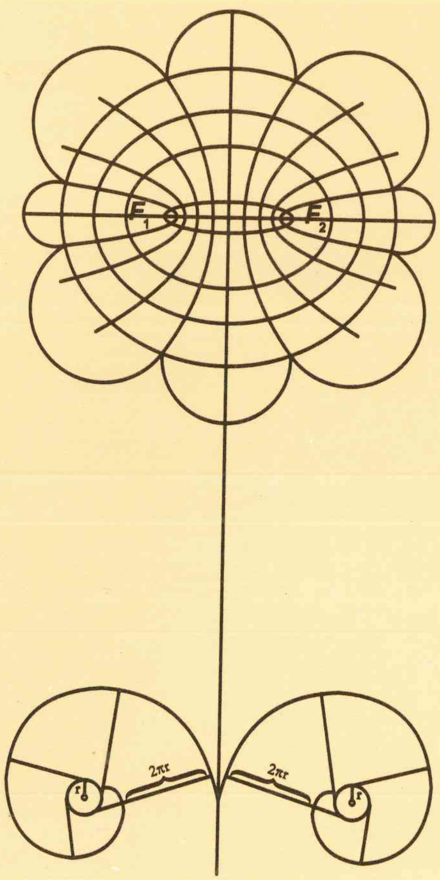
PROBLEMAS PARA LA **13a.**

# Olimpiada Mexicana de MATEMATICAS




1999

SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

# Problemas para la
## $13^a$ Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Editado por: Jorge Albarrán
Alejandro Bravo
Radmila Bulajich
Carlos Cabrera
José A. Gómez
Ana Rechtman

1999

COMITÉ ORGANIZADOR DE LA OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMATICAS

José Antonio Gómez Ortega (Presidente)

Edgar Acosta Villaseñor

Ignacio Barradas Bribiesca

Alejandro Illanes Mejía

Ma. del Pilar Morfin Heras

Eugenia Olivera Fox

Elena de Oteyza de Oteyza

María Luisa Pérez Seguí

Julieta Verdugo Díaz

# Presentación

La Sociedad Matemática Mexicana organiza la 13a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los ganadores en ella formarán las selecciones que participarán en la XLI Olimpiada Internacional de Matemáticas por celebrarse durante el mes de julio del año 2000 en Corea del Sur y en la XV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se realizará en septiembre del mismo año en Venezuela.

En la 13a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas pueden participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1980. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución pre-universitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 1999 - 2000 y para el 21 de julio del año 2000 no deberán haber iniciado estudios de nivel universitario.

Los problemas que aparecen en este folleto son problemas que aparecieron en concursos de las diferentes etapas de las olimpiadas de matemáticas. La intención del folleto es que sirva como orientación a los alumnos que desean participar en estas olimpiadas. Como se puede ver, los problemas que aparecen aquí, no son problemas rutinarios o problemas en los que se apliquen directamente los conocimientos que se adquieren en la escuela. Más bien son problemas que requieren de una buena dosis de ingenio y de esfuerzo para ser resueltos. Como en todos los aspectos del aprendizaje de las matemáticas, el esfuerzo individual y el enfrentamiento solitario con los problemas son importantes, pero también es muy importante la discusión con los compañeros y los profesores.

Una forma de manifestar creatividad en matemáticas es resolviendo problemas. Otra forma, que a veces requiere de más madurez, es inventando problemas. Invitamos a todos los lectores de este folleto: profesores, estudiantes, olímpicos y exolímpicos a que nos envíen problemas con solución. Las aportaciones serán consideradas para su inclusión en exámenes o en futuros folletos.

Este folleto incluye problemas de los exámenes estatales de: Aguascalientes, Baja California, Campeche, Coahuila, Chihuahua, Distrito Federal, Estado de México, Guanajuato, Hidalgo, Jalisco, Michoacán, Morelos, Nuevo León, Oaxaca, Querétaro, Quintana Roo, San Luis Potosí, Sonora, Tabasco, Tlaxcala, Veracruz, Yucatán y Zacatecas.

## Etapas de la Olimpiada

Como ya es tradición, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas consta d tres etapas:

**Exámenes Estatales.** Estos exámenes servirán para formar las seleccion estatales que asistirán al Concurso Nacional.

**Concurso Nacional.** Este concurso se llevará a cabo en la ciudad Oaxaca, Oax., del 7 al 13 de noviembre de 1999. De él se elegirá a la selección mexicana.

**Entrenamientos.** A los alumnos de la preselección que surjan del curso Nacional se les entrenará intensivamente durante el primer sem del año 2000, también se les aplicarán exámenes para determinar a lo representarán a México en las olimpiadas internacionales.

La participación en las tres etapas mencionadas es **individual**.

# Resumen de Resultados

Desde 1987, año en que la Sociedad Matemática Mexicana organizó la 1a. olimpiada, los resultados han sido los siguientes:

## OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMATICAS

| Año | País sede | No. de países | Lugar de México |
|---|---|---|---|
| 1988 | Australia | 49 | 37 |
| 1989 | Rep. Fed. de Alemania | 50 | 31 |
| 1990 | Rep. Popular de China | 54 | 36 |
| 1991 | Suecia | 55 | 35 |
| 1992 | Rusia | 56 | 49 |
| 1993 | Turquía | 73 | 63 |
| 1994 | Hong Kong | 69 | 65 |
| 1995 | Canadá | 74 | 59 |
| 1996 | India | 75 | 53 |
| 1997 | Argentina | 82 | 32 |
| 1998 | Taiwán | 75 | 44 |

## OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICAS

| Año | País sede | No. de países | Lugar de México |
|---|---|---|---|
| 1989 | Cuba | 13 | 3 |
| 1990 | España | 15 | 3 |
| 1991 | Argentina | 16 | 5 |
| 1992 | Venezuela | 16 | 6 |
| 1993 | México | 16 | 9 |
| 1994 | Brasil | 16 | 6 |
| 1995 | Chile | 18 | 9 |
| 1996 | Costa Rica | 17 | 2 |
| 1997 | México | 17 | 3 |
| 1998 | República Dominicana | 18 | 5 |

En total, en las olimpiadas internacionales se han obtenido dos medallas de plata, nueve medallas de bronce y catorce menciones honoríficas. En las olimpiadas iberoamericanas se han obtenido cuatro medallas de oro, quince medallas de plata, catorce medallas de bronce y tres menciones honoríficas.

## Resultados del Concurso Nacional de la 12a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas

| | | | |
|---|---|---|---|
| Aguascalientes | 71 | Morelos | 111 |
| Baja California | 94 | Nuevo León | 70 |
| Baja California Sur | 12 | Oaxaca | 53 |
| Campeche | 28 | Puebla | 67 |
| Coahuila | 70 | Querétaro | 94 |
| Colima | 65 | Quintana Roo | 36 |
| Chiapas | 61 | San Luis Potosí | 65 |
| Chihuahua | 92 | Sinaloa | 58 |
| Distrito Federal | 174 | Sonora | 65 |
| Durango | 24 | Tabasco | 38 |
| Estado de México | 65 | Tamaulipas | 59 |
| Guanajuato | 84 | Tlaxcala | 48 |
| Guerrero | 64 | Veracruz | 106 |
| Hidalgo | 59 | Yucatán | 63 |
| Jalisco | 140 | Zacatecas | 62 |
| Michoacán | 119 | | |

Los números que aparecen en la lista anterior, son el total de puntos que obtuvo cada Estado representado por un equipo de seis alumnos, con excepción del Distrito Federal que participa con diez alumnos. En esta ocasión Baja California Sur y Quintana Roo participaron con un equipo de dos y cinco alumnos respectivamente.

COMITE ORGANIZADOR DE LA
OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMATICAS

Febrero de 1999

# Enunciados de los Problemas

Presentamos aquí algunos problemas para mostrar el tipo de matemáticas que se manejan en la primera fase de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Al final encontrarás las soluciones. Los 100 problemas forman parte de exámenes de la primera etapa de Concursos Estatales de la $12^a$. Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

**Problema 1.** ¿Cuáles son los dos últimos dígitos de $7^{1998}$?

a) 01 b) 07 c) 43 d) 49

**Problema 2.** Si $(6!)(7!) = n!$ ¿Cuánto vale $n$? $(n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot (n-1) \cdot n)$

a) 10 b) 12 c) 13 d) 42

**Problema 3.** Cada movimiento en un juego consiste de invertir 2 flechas adyacentes, la posición inicial es

$$\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow$$

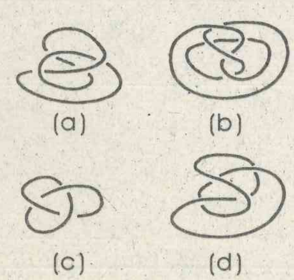
y la posición final es

$$\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow$$

¿Cuál es el número mínimo de movimientos para llegar a esta posición final?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

**Problema 4.** ¿Cuál de estos nudos no es realmente un nudo?



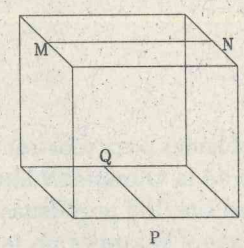
**Problema 5.** ¿Cuántas parejas de enteros positivos impares tienen como suma 1998?

a) 500 b) 503 c) 499 d) una infinidad

**Problema 6.** ¿Cuántos números hay del 1 al 1000 que pueden escribirse en la forma $a^b$ con $a$ y $b$ enteros mayores que 1?

a) 36 b) 40 c) 49 d) 50

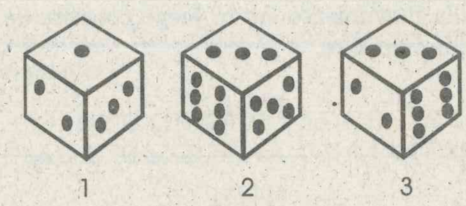
**Problema 7.** En un cubo de lado 2




$M, N, P, Q$ son puntos medios de los lados mostrados.
¿Cuál es la distancia máxima entre un punto de $MN$ y otro $PQ$?

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ d) $\sqrt{6}$

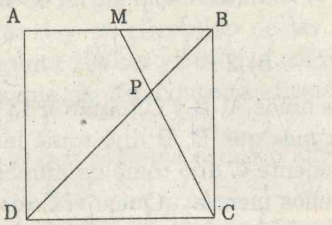
**Problema 8.** El dado diferente.




Los tres dados de la figura están correctamente marcados.
Sin embargo la orientación de los puntos en uno de ellos es diferente al de los otros dos. ¿Cuál es el dado diferente?

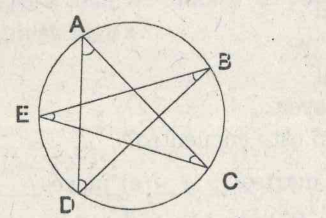
a) 1 b) 2 c) 3 d) todos son iguales

**Problema 9.** Si $ABCD$ es un cuadrado de lado 2, $M$ es el punto medio de $AB$ y $P$ es la intersección de los segmentos $DB$ y $MC$. ¿Cuánto vale $PC$?




a) $\frac{2}{3}$ b) 1 c) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ d) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

**Problema 10.** Los puntos $A$, $B$, $C$, $D$ y $E$ son puntos de una circunferencia. ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ y $\angle E$?

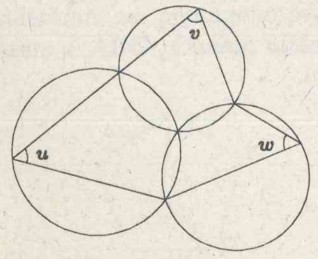



a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\pi$ c) $\frac{5\pi}{2}$ d) $2\pi$

**Problema 11.** ¿Cuántos números se pueden representar como suma de algunos de los números 1,2,4,8,16 donde cada número se escoge a lo más una vez? Por ejemplo el 11 se puede representar como $8+2+1$, además las sumas con un sólo sumando están permitidas

a) 31 b) $5^2$ c) 16 d) 32

**Problema 12.** ¿Cuánto vale la suma de $u+v+w$, en la siguiente figura?




a) $3u$ b) 180° c) 360° d) no se puede saber

**Problema 13.** ¿Cuál es el dígito de las unidades de

$$(1^2+1)+(2^2+2)+\ldots+(1998^2+1998)?$$

a) 0 b) 2 c) 4 d) 8

**Problema 14.** Los niños A, B y C tomaron 13 dulces de una mesa, al final, A dijo tomé 2 dulces más que B, B dijo tomé la mitad de dulces que A y 5 menos que C, y finalemente C dijo tomé un número par de dulces. Si sabemos que a lo más uno de ellos mentía, ¿Quién era este mentiroso?

a) A b) B c) C d) ninguno

**Problema 15.** La zoo-lógica

En la selva, la hiena miente los lunes, martes y miércoles; la zorra miente los jueves, viernes y sábados. En los días que no mienten, ellas dicen la verdad. Un día se encontraron la hiena y la zorra y sostuvieron este diálogo

Hiena: ¡ Hola zorra!

Ayer yo mentí

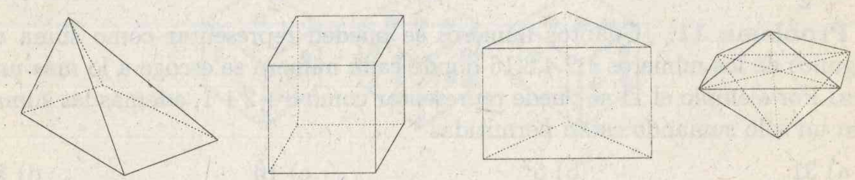
Zorra: ¡ Hola hiena!

Yo también mentí ayer.

¿En qué día sucedió este encuentro?

a) lunes b) martes c) jueves d) nunca pudo suceder

**Problema 16.** ¿Cuál de las siguientes figuras se obtiene al unir los puntos medios de las aristas de un tetraedro?



a) b) c) d)

**Problema 17.** Llegan 4 niños a una fiesta y hay 6 gorros; 3 verdes y 3 rojos. A cada niño se le coloca su gorro respectivo con los ojos vendados se sientan en una mesa circular de forma que cada niño ve los gorros de los otros tres. Empezando con el niño 1 y en el sentido de las manecillas del reloj a cada niño se le hace la pregunta ¿Sabes ya de qué color es tu gorro? Y todos escuchan la respuesta hasta que alguien contesta afirmativamente. Además el primer niño dice que no.

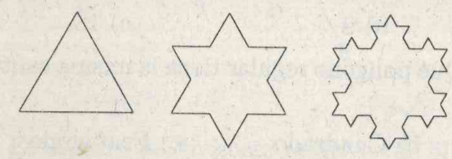
¿Quién de estos niños es el que contesta primero afirmativamente?

a) ninguno b) 2 c) 3 d) 4

**Problema 18.** Si el perímetro de un triángulo cualquiera es $p$ y el radio del círculo inscrito es $r$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta en todos los casos?

a) $p > 2\pi r$ b) $p < 2\pi r$ c) $p^2 = \pi r^2$ d) $p < 3r$

**Problema 19.** La primera figura tiene 3 lados y 3 picos, la segunda tiene 12 lados y 6 picos, la tercera figura tiene 48 lados y 18 picos y así sucesivamente. ¿Cuántos picos tendrá la quinta figura?



a) 258 b) 384 c) 768 d) 66

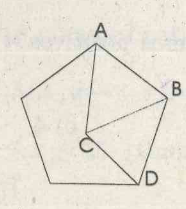
**Problema 20.** La sucesión de números $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ está definida como sigue

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 2 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \text{ para } n > 2.$$

¿Cuánto vale $a_{1998}$?

a) $a_{999}$ b) $\frac{2}{1998}$ c) $\frac{a_{1999}}{1998}$ d) $\frac{2}{3}$

**Problema 21.** Consideremos un pentágono regular. Sobre el lado $AB$ se traza el triángulo equilátero $\triangle ABC$ ¿Cuánto mide el ángulo $\angle CDB$?




a) 76° b) 60° c) 66° d) 70°

**Problema 22.** Tres apostadores A, B y C, pronostican el resultado de 5 partidos de futbol. ($L =$ local , $E =$ empate , $V =$ visitante ). Las tarjetas que presentó cada uno, fueron las siguientes:

Jugador A

| | $L$ | $E$ | $V$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $X$ | | |
| 2 | $X$ | | |
| 3 | | $X$ | |
| 4 | | $X$ | |
| 5 | | | $X$ |

Jugador B

| | $L$ | $E$ | $V$ |
|---|---|---|---|
| 1 | | | $X$ |
| 2 | | $X$ | |
| 3 | $X$ | | |
| 4 | | $X$ | |
| 5 | $X$ | | |

Jugador C

| | $L$ | $E$ | $V$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $X$ | | |
| 2 | $X$ | | |
| 3 | | | $X$ |
| 4 | $X$ | | |
| 5 | | $X$ | |

El apostador A obtuvo 3 aciertos, el B obtuvo 3 aciertos y el C obtuvo 2 aciertos. ¿Cuántos partidos ganó el equipo local?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

**Problema 23.** Un cristal en forma de prisma tiene 27 aristas. ¿Cuántos vértices tiene?

(Nota: Los prismas tienen como base y tapa dos polígonos iguales)

a) 10 b) 9 c) 18 d) 20

**Problema 24.** ¿Qué polígono regular tiene la misma cantidad de diagonales que de lados?

a) Triángulo b) Cuadrado c) Pentágono d) Octágono

**Problema 25.** En el país de las maravillas hay 10 duendes encantados que cambian de color. En la primera semana todos son rojos, la segunda semana los múltiplos de 2 cambian al color verde, la tercera semana los múltiplos de 3 cambian al color rojo, y así alternadamente hasta que la décima semana los múltiplos de 10 cambian al color verde. ¿Cuáles de los diez duendes quedaron pintados al final de rojo?

a) Los números impares b) Los números pares
c) Los números divisores de 10 d) Los números múltiplos de 10

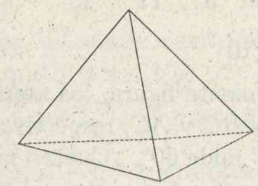
**Problema 26.** Si $(a, b)$ denota al máximo común divisor de $a$ y $b$. El valor de $(a^4 - b^4, a^2 - b^2)$ es

a) $a - b$ b) $a + b$ c) $a^2 - b^2$ d) $a^2 + b^2$

**Problema 27.** ¿Cuántos enteros positivos $n$ hay tales que $\dfrac{2n^2 + 4n + 18}{3n + 3}$ es un entero?

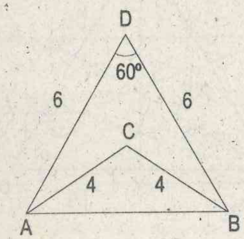
a) 1 b) 3 c) 4 d) Una infinidad

**Problema 28.** Se tiene un tetraedro regular y en cada una de las caras se trazan todas las bisectrices. ¿Cuántos puntos de intersección hay entre las 12 bisectrices?



a) 4 b) 8 c) 12 d) 14

**Problema 29.** ¿Cuál es el área del triángulo $ABC$?




a) 12 b) $6\sqrt{7}$ c) $3\sqrt{7}$ d) 18

**Problema 30.** El número de divisores positivos de 5! es:

a) 24 b) 16 c) 5 d) 10

**Problema 31.** Se tiene un cubo formado por $5 \times 5 \times 5$ cubitos. ¿Cuántos cubos quedan totalmente ocultos a la vista?

a) 25 b) 27 c) 10 d) 15

**Problema 32.** ¿Cuál es el número más pequeño por el que ha de multiplicarse el número 126 para que el producto sea un cuadrado perfecto?

a) 81 b) 14 c) 16 d) 20

**Problema 33.** Un triángulo rectángulo tiene hipotenusa 6 y perímetro 14. ¿Cuál es el área del triángulo?

a) 3 b) 7 c) 12 d) 14

**Problema 34.** Se tienen los números naturales

$$1, 2, 3, ..., x-1, x+1, ..., n$$

los cuales suman 1998. Si $15 \leq x \leq 20$. ¿Cuál es el valor de $n$?

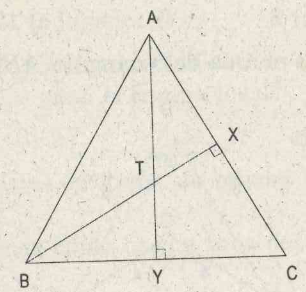
a) 60 b) 61 c) 62 d) 63

**Problema 35.** ¿Cuántos números enteros positivos $n$ satisfacen la desigualdad

$$\frac{2}{5} < \frac{n}{17} < \frac{11}{13}?$$

a) 6 b) 10 c) 8 d) 7

**Problema 36.** En la siguiente figura, los segmentos $AY$ y $BX$ son perpendiculares a los segmentos $BC$ y $AC$, respectivamente. Si el ángulo $\angle ABC$ mide 50° y el ángulo $\angle BAC$ mide 60°. ¿Cuánto mide el ángulo $BTY$?




a) 60° b) 70° c) 80° d) 50°

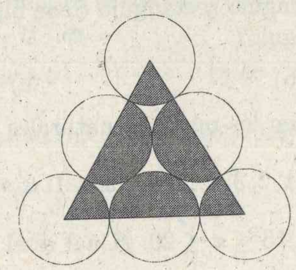
**Problema 37.** ¿Cuántos números enteros mayores que 10 y menores que 100 se incrementan en nueve cuando sus dígitos se invierten?

a) 1 b) 8 c) 9 d) 10

**Problema 38.** ¿Cuántos números diferentes de cinco cifras se pueden formar con los dígitos $1, 1, 2, 2, 3$?

a) 120 b) 40 c) 30 d) 20

**Problema 39.** En la siguiente figura, los círculos son tangentes (se tocan en un sólo punto), todos los círculos son del mismo tamaño y tienen radio igual a 2. Encontrar el área de la región sombreada.



a) $2\pi$ b) $4\pi$ c) $6\pi$ d) $8\pi$

**Problema 40.** Dado $p(x) = x^3 + ax + 1$, si $p(1) = 1$. ¿Cuál es el valor de $p(2)$?

a) 1 b) 2 c) 5 d) 7

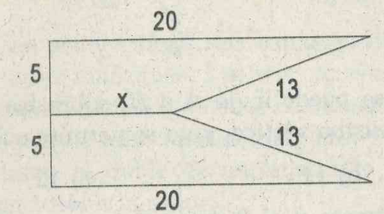
**Problema 41.** Si $a$ y $b$ son dos números enteros tales que $a < b$, entonces el número de enteros $x$ tales que $a < x < b$ es

a) $b - a - 1$ b) $b - a + 1$ c) $b - a$ d) $b - a - 2$

**Problema 42.** Si $(1 + \frac{1}{n})(1 - \frac{1}{m}) = 1$ entonces $m$ es igual a

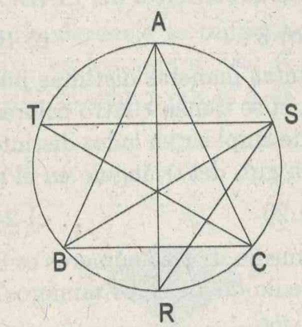
a) $n - 1$ b) $n + 1$ c) $2n$ d) $\sqrt{n^2 + 1}$

**Problema 43.** En la siguiente figura el valor de $x$ es




a) 6 b) 8 c) 10 d) 12

**Problema 44.** Sea $\triangle ABC$ un triángulo isósceles tal que $AB = AC$, sean $R$, $S$ y $T$ las intersecciones de las alturas de $A$, $B$ y $C$, respectivamente, con el circuncírculo como se muestra en la figura. ¿Cuál es el valor del ángulo $\angle RST$?




a) $\frac{\angle A + \angle B}{2}$ b) $\angle A$ c) $\angle B$ d) $\angle C$

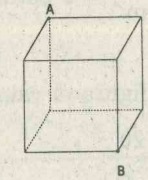
**Problema 45.** ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar un número entre 400 y 699 (inclusive) tenga sus tres cifras diferentes?

a) $\frac{18}{25}$ b) $\frac{81}{100}$ c) $\frac{10}{81}$ d) $\frac{27}{50}$

**Problema 46.** El siguiente juego se efectúa entre dos jugadores, se colocan 13 fichas sobre la mesa y los jugadores tiran en forma alternada, cada tirada consiste en tomar 1,2,3 ó 4 fichas, y gana el que se quede con la última ficha. ¿Cuántas fichas debe tomar el primer jugador en la primera tirada para asegurar su triunfo?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

**Problema 47.** En el cubo siguiente




¿De cuántas formas se puede ir de $A$ a $B$, sobre las aristas del cubo sin pasar dos veces por el mismo vértice, y no se permite subir?

a) 10 b) 11 c) 12 d) 13

**Problema 48.** El número $n$ al factorizarlo es $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$ con $p_1$, $p_2$ primos y $\alpha_1$, $\alpha_2$ enteros positivos. Sabemos que $n^2$ tiene 143 divisores positivos. ¿Cuántos divisores positivos tiene $n^3$?

a) 341 b) 143 c) 304 d) 430

**Problema 49.** Se tiene un triángulo $\triangle ABC$ con $AB = 5$, $BC = 3$ y $CA = 4$. Sea $\triangle A'B'C'$ un triángulo semejante al $\triangle ABC$ y tal que su circunferencia inscrita sea la circunferencia circunscrita del $\triangle ABC$. ¿Cuánto vale $A'C'$?

a) $\frac{15}{2}$ b) 8 c) 10 d) $\frac{25}{2}$

**Problema 50.** ¿De cuántas maneras distintas pueden colorearse los lados de un triángulo equilátero, si se tienen cuatro colores distintos, si suponemos que un mismo color se puede emplear en lados distintos y que dos coloraciones son iguales si difieren en un giro del triángulo en el plano?

a) 4 b) 20 c) 24 d) 16

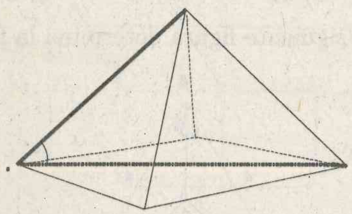
**Problema 51.** Si el promedio de tres números es 85 y el promedio de otros dos es 95 ¿Cuál es el promedio de los cinco números?

a) 88 b) 89 c) 90 d) 91

**Problema 52.** Una escalera tiene numerados los escalones como 0,1,2,3,4... Una rana esta en el escalón 0, salta cinco escalones hacia arriba hasta el escalón 5 y luego dos para abajo hasta el escalón 3, después sigue saltando alternando cinco escalones para arriba y dos para abajo. La sucesión de escalones que pisa la rana es 0,5,3,8,6... ¿Cuál de los siguientes escalones no pisa la rana?

a) 1997 b) 1998 c) 1999 d) 2000

**Problema 53.** En la pirámide de la figura la base es un cuadrado y las otras cuatro caras son triángulos equiláteros (piensa en una pirámide egipcia). ¿Cuál es la medida del ángulo marcado dentro de la pirámide?



a) 25° b) 30° c) 45° d) 60°

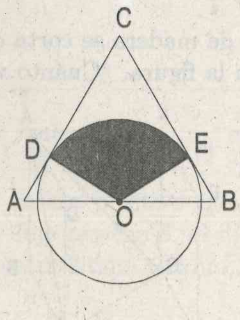
**Problema 54.** Una señora tiene seis canastas de frutas, unas de puras naranjas y otras de puras manzanas. Las seis canastas tienen 8,12,15,17,19 y 22 frutas respectivamente, pero no sabemos cuales son de naranjas y cuales de manzanas. La señora vendió una canasta completa, y en total en las restantes cinco canastas quedaron el doble de naranjas que de manzanas ¿Cuántas naranjas le quedan en total a la señora?

a) 25 b) 27 c) 53 d) 54

**Problema 55.** Considera 9 puntos sobre una circunferencia. ¿De cuántas maneras pueden ser divididos estos puntos en conjuntos de tres puntos, de tal manera que, ningún par de los triángulos determinados por estos subconjuntos se corten?

a) 9 b) 10 c) 7 d) 12

**Problema 56.** Una circunferencia es tangente a los lados $AC$ y $BC$ del triángulo equilátero $\triangle ABC$ en los puntos $D$ y $E$ respectivamente y tiene su centro $O$ en $AB$. Si $AB = 2$. ¿Cuánto vale el área del sector $DOE$?

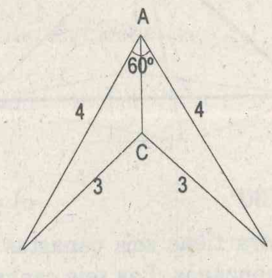



a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{2\pi}{3}$ d) $\frac{\pi}{3}$

**Problema 57.** Considere 6 puntos sobre una circunferencia. ¿De cuántas maneras pueden ser estos puntos unidos por pares con 3 cuerdas que no se corten dentro del círculo?

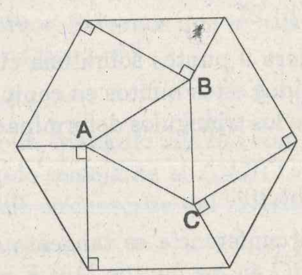
a) 10 b) 12 c) 8 d) 5

**Problema 58.** En la siguiente figura determina la longitud de $AC$.



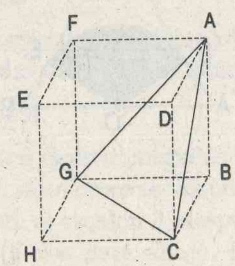

a) $2\sqrt{3}-\sqrt{5}$ b) $2\sqrt{3}+\sqrt{5}$ c) 3 d) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

**Problema 59.** En la siguiente figura, ¿Cuál es el área del triángulo $\triangle ABC$, si el área del hexágono regular es $H$?



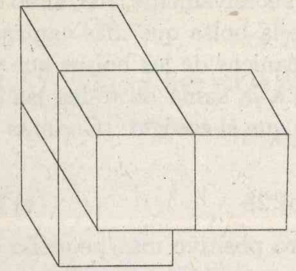

a) $\frac{H}{2}$ b) $\frac{H}{4}$ c) $\frac{H}{6}$ d) $\frac{H}{8}$

**Problema 60.** Un cubo de madera se corta con una sierra por los puntos $A$,$C$ y $G$, como se indica en la figura. ¿Cuánto vale el ángulo $\angle CAG$?




a) 45° b) 90° c) 60° d) 30°

**Problema 61.** ¿Cuánto mide la superficie de la siguiente figura, formada con cubos de lado 1?



a) 18 b) 16 c) 14 d) 12

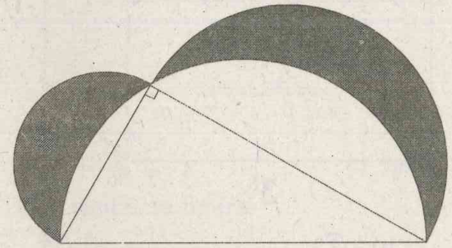
**Problema 62.** ¿Cuántos ceros tiene el número $n = 1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{1998}$ si lo escribimos en base 2?

a) 1998 b) $\frac{n}{2}$ c) 0 d) las últimas 10 son ceros

**Problema 63.** Si $2^{x_1} = 5^{x_2} = 10$. ¿Cuánto vale $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$?

a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$ c) 10 d) 1

**Problema 64.** En cada uno de los lados de un triángulo rectángulo de catetos $a$ y $b$ se trazan tres semicírculos respectivamente como en la figura. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



a) $\frac{\pi}{12}(a^2+b^2)$ b) $\frac{\pi ab}{6}$ c) $\frac{ab}{2}$ d) $\frac{\pi}{16}(a^2+b^2)$

**Problema 65.** El menor entero positivo que al dividirlo entre 10 deja residuo 9, al dividirlo entre 9 deja residuo 8, al dividirlo entre 8 deja residuo 7, etc., hasta que al dividirlo entre 2 deja residuo 1. Al dividirlo entre 11 deja residuo:

a) 0 b) 3 c) 5 d) 7

**Problema 66.** Se tiene cierto número de bolsas donde se meterán canicas de la siguiente forma: En la primera bolsa se mete una canica, en la segunda dos, en la tercera tres y así sucesivamente. Herminio escoge una bolsa que tiene catorce canicas menos que la bolsa que más canicas tiene y además observa que la suma de todas las canicas de las bolsas que tienen menos canicas que la que él escogió, es igual a la suma de todas las canicas de las bolsas que tienen más canicas que las que él escogió. ¿Cuántas canicas tiene la bolsa que Herminio escogió?

a) 21 b) 28 c) 35 d) 42

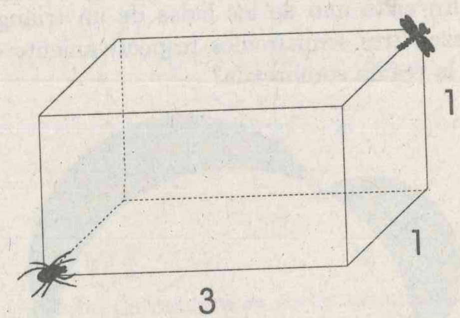
**Problema 67.** El entero positivo más pequeño con exactamente 11 divisores positivos, al dividirlo entre 11 deja residuo:

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7

**Problema 68.** Un triángulo equilátero y un hexágono regular tienen perímetros de igual longitud. Si el triángulo tiene área igual a dos. ¿Cuál es el área del hexágono?

a) 2 b) $\frac{5}{2}$ c) 3 d) 4

**Problema 69.** Dibuja en la figura el camino más corto que puede recorrer la araña, si únicamente puede caminar sobre la superficie del paralelepípedo. ¿Cuál es la longitud del camino?




a) 4 b) $\sqrt{13}$ c) $\sqrt{5}$ d) 3

**Problema 70.** Se tienen dos esferas, si los radios están en proporción $\frac{2}{3}$ y el volumen de la menor es 1. ¿Cuál es el volumen de la esfera mayor?

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{9}{4}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{27}{8}$

**Problema 71.** ¿Cuál es el valor de $X$ en la siguiente expresión?

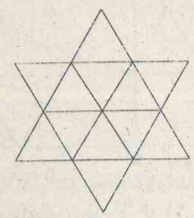
$$1+2-3+4+5-6+7+8-9+\ldots+97+98-99=X$$

a) 1584 b) 1582 c) 1998 d) 1492

**Problema 72.** Si un cubo de arista igual a 5 se parte en cubos de arista igual a 1, entonces la suma de las longitudes de todas las aristas de todos los nuevos cubos es

a) 300 b) 400 c) 2000 d) 1500

**Problema 73.** ¿Cuántos triángulos hay en la figura?

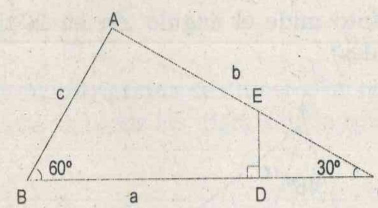


a) 22 b) 20 c) 18 d) 14

**Problema 74.** ¿Para cuántos valores enteros positivos de $n$ la expresión $\dfrac{18}{n+4}$ es un entero?

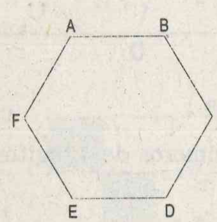
a) 12 b) 10 c) 6 d) 3

**Problema 75.** Si $E$ es el punto medio del lado $AC$ del triángulo rectángulo $\triangle ABC$. ¿Cuál es la razón entre los perímetros de los triángulos rectángulos $\triangle DEC$ y $\triangle ABC$?




a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ d) $\frac{1}{2}$

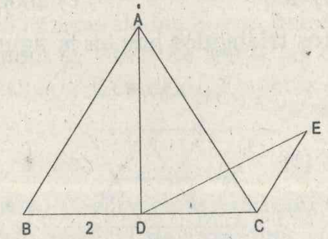
**Problema 76.** En la siguiente figura




si cada vértice puede tomar el valor 1 ó -1. ¿Cuántos valores distintos puede tomar la suma $A+B+C+D+E+F+ABCDEF$?

a) 14 b) 8 c) 7 d) 4

**Problema 77.** El triángulo $\triangle ABC$ es equilátero y de lado igual a 4, el ángulo $\angle ACE$ vale $60°$ y además el segmento $CE$ es igual a 2. ¿Cuál es el valor del segmento $DE$?




a) 4 b) $\sqrt{6}$ c) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ d) $2\sqrt{3}$

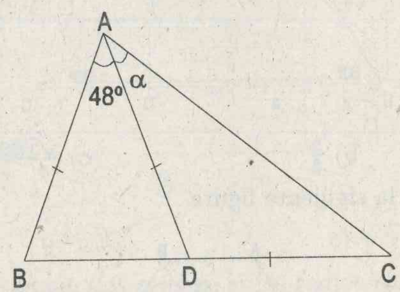
**Problema 78.** Se sabe que el producto de 1998 números naturales es 1998. ¿Cuál es el mínimo de factores que son iguales a 1?

a) 1993 b) 1995 c) 1997 d) 1998

**Problema 79.** Sean $C_1$ y $C_2$ dos círculos de radio 1, que están en el mismo plano y son tangentes entre sí. ¿Cuántos círculos de radio 3 hay en el mismo plano tangentes tanto a $C_1$ como a $C_2$?

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8

**Problema 80.** ¿Cuánto mide el ángulo $\angle\alpha$ en la siguiente figura? (Los lados marcados son iguales).




a) $42°$ b) $40°$ c) $33°$ d) $24°$

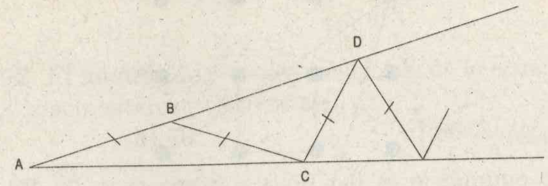
**Problema 81.** ¿Cuántos números de 4 dígitos hay de las forma $a99b$ que sean divisibles entre 54?

a) ninguno b) 5 c) 4 d) 3

**Problema 82.** Un factor del número 1998 escrito en base 6 es

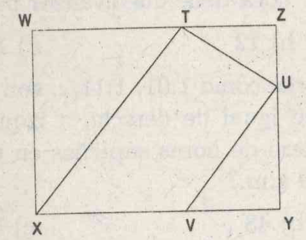
a) 17 b) 3 c) 5 d) 23

**Problema 83.** Construímos una sucesión de triángulos isósceles empezando con $AB = BC$, luego $BC = CD$, y así sucesivamente. Si el ángulo $\angle BAC = 17°$ ¿Cuántos triángulos isósceles puedes dibujar?




a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

**Problema 84.** Sean $WXYZ$ un rectángulo, $T$ un punto sobre $WZ$, $V$ el punto que está verticalmente abajo de $T$ y $U$ que divide a $YZ$ en razón $2:1$. Si el área de cuadrilátero $TUVX$ es 12. ¿Cuánto vale el área del rectángulo $WXYZ$?




a) 16 b) 21 c) 24 d) 26

**Problema 85.** En un crucigrama de números en cada cuadro colocamos un dígito. ¿Cuál es la suma de todos los dígitos de la solución a este crucigrama?

Clave:

Horizontal (H)

1.- Ver 3V.

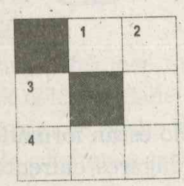
3.- Un número al cubo.

4.- Cinco veces el número 3V.

Vertical (V)

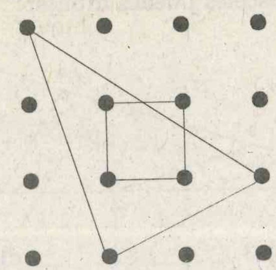
2.- El cuadrado de un número.

3.- Cuatro veces 1H.




a) 15 b) 17 c) 23 d) 18

**Problema 86.** La distancia entre dos puntos es 1. ¿Cuánto vale la región común del triángulo y el cuadrado en unidades cuadradas?



a) $\frac{9}{10}$ b) $\frac{15}{16}$ c) $\frac{8}{9}$ d) $\frac{11}{12}$

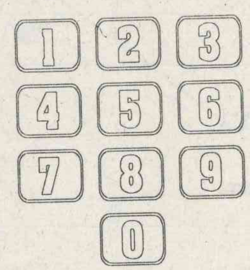
**Problema 87.** Un esquiador calcula que si avanza a 10 km por hora llegará a su destino a la 1 p.m. y si avanza a 15 km por hora llegará a su destino a las 11 a.m. ¿Cuántos km por hora tiene que avanzar para llegar a las 12 a.m.?

a) 12.5 b) 12 c) 11.5 d) 11

**Problema 88.** Las horas como 1:01, 1:11,... son llamadas horas capicúas, ya que sus dígitos se leen igual de derecha a izquierda que de izquierda a derecha. ¿Cuál es el número de horas capicúas en un reloj digital que están entre la 1 a.m. y las 11:59 a.m.?

a) 47 b) 48 c) 55 d) 56

**Problema 89.** Los botones de un teléfono estan colocados como lo muestra la figura. Si los botones están a un centímetro de distancia uno del otro, midiendo de centro a centro, cuando marcas el número 592-70-18 la distancia (en centímetros) que viaja tu dedo es




a) $\sqrt{5}(3+\sqrt{2})+2\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{5}(1+\sqrt{2})+2\sqrt{2}$
c) $2\sqrt{5}+\sqrt{2}(3+\sqrt{5})$ d) $\sqrt{5}+\sqrt{2}(2+3\sqrt{5})$

**Problema 90.** Pedro y Pablo están formados en una cola. Hay $x$ personas detrás de Pedro que está a $y$ lugares enfrente de Pablo. Si hay $n$ personas enfrente de Pablo, ¿qué tan larga está la cola?

a) $n-x+y+2$ b) $n+x-y$ c) $n-x+y-1$ d) $n-x+y$

**Problema 91.** Sea $ABCD$ un cuadrado con lados de longitud 9. ¿Cuántos puntos (dentro o fuera del cuadrado) son equidistantes de $B$ y $C$ y están exactamente a una distancia 6 del punto $A$?

a) 1 b) 2 c) 5 d) más que 5

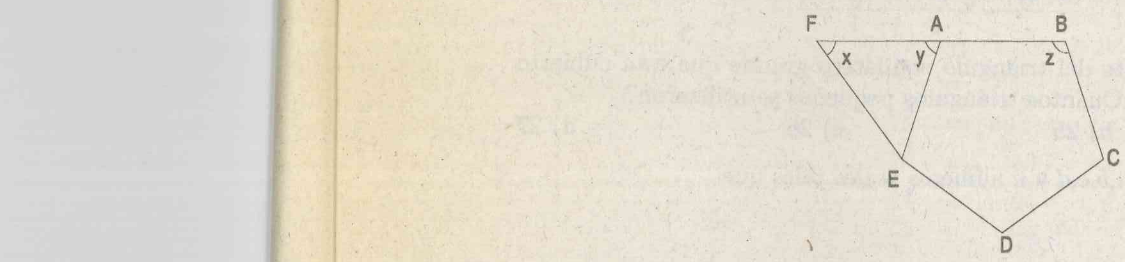
**Problema 92.** El número de posibles soluciones de la ecuación $3x+y+z=23$ donde $x$, $y$ y $z$ son enteros positivos es:

a) 56 b) 70 c) 86 d) 92

**Problema 93.** Si $x < y$ y $x < 0$, ¿Cuál es el mínimo de los siguientes números?

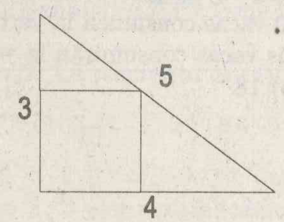
a) $x+y$ b) $x-|y|$ c) $-|x+y|$ d) $x-y$

**Problema 94.** Sean $ABCDE$ un pentágono regular, $FAB$ una línea recta y $FA = AB$. ¿Cuál es la suma de los ángulos $\angle x + \angle y + \angle z$?




a) $180^o$ b) $220^o$ c) $228^o$ d) $234^o$

**Problema 95.** Inscribimos un cuadrado en un triángulo rectángulo de lados 3,4,5 como se muestra en la figura. ¿Qué fracción del triángulo ocupa el cuadrado?




a) $\frac{12}{25}$ b) $\frac{24}{49}$ c) $\frac{25}{49}$ d) $\frac{1}{2}$

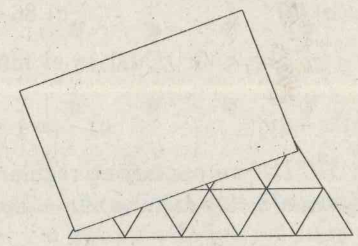
**Problema 96.** Tenemos seis colchones que tenemos que guardar en un cuarto uno sobre el otro. Cada colchón mide 20 cm de grueso, pero cada vez que ponemos un colchón sobre otro, el ancho del colchón se reduce una décima parte. La altura $h$ de la pila de colchones satisface:

a) $h \leq 90$ b) $h \geq 110$
c) $90 \leq h \leq 100$ d) $100 \leq h \leq 110$

**Problema 97.** Si $m$ y $n$ son enteros tales que $2m - n = 3$, entonces $m - 2n$ es igual a:

a) $-3$ b) 0
c) un múltiplo de 3 d) cualquier entero

**Problema 98.** Algunos triángulos equiláteros pequeños se utilizaron para hacer un triángulo equilátero grande. En la siguiente figura



podemos observar parte del triángulo equilátero grande que está cubierto por una hoja de papel. ¿Cuántos triángulos pequeños se utilizaron?

a) 24 b) 25 c) 26 d) 27

**Problema 99.** Sean $a$,$b$,$c$,$d$ y $e$ números reales tales que

*i)* $a > b$
*ii)* $e - a = d - b$
*iii)* $c - d < b - a$
*iv)* $a + b = c + d$

¿Dí cuál es el mayor y el menor de estos números?

a) $e$ y $c$ b) $a$ y $c$ c) $d$ y $a$ d) no puedo saber

**Problema 100.** La yerba en un prado crece con densidad y rapidez homogéneas. Sabiendo que 70 vacas consumen la yerba en 24 días y 30 vacas la comen en 60 días. ¿Cuántas vacas consumirán la yerba en 96 días?

a) 16 b) 18 c) 20 d) 22

# Soluciones de los Problemas

**Solución al problema 1.** La respuesta es (d).

Veamos como son las terminaciones de las potencias de 7:

$$\begin{aligned}
7^0 &= 1\\
7^1 &= 7\\
7^2 &= 49\\
7^3 &= ...43\\
7^4 &= ...01\\
7^5 &= ...07\\
7^6 &= ...49\\
7^7 &= ...43.
\end{aligned}$$

De aquí podemos ver que cada 4 veces se empiezan a repetir las terminaciones y observamos que 7 elevado a una potencia que es múltiplo de 4 termina en 01. Como $1998 = 4 \cdot 499 + 2$ entonces $7^{1998}$ tiene la terminación 49.

**Solución al problema 2.** La respuesta es (a).

$$(7!)(6!) = (7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)(6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$$

veremos ahora que $(6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 8 \cdot 9 \cdot 10$, primero tenemos que $2 \cdot 4 = 8$ y 6 se puede escribir como $2 \cdot 3$ y si multiplicamos este 3 por el tres que ya teníamos, tenemos el 9 y $2 \cdot 5 = 10$ por lo tanto tenemos que

$$(7!)(6!) = (10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 10!$$

luego $n = 10$.

**Solución al problema 3.** La respuesta es (c).

En el primer movimiento cambiamos la segunda y tercera flechas, por lo que tendremos

$$\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow$$

en el segundo paso cambiamos la tercera y cuarta flechas entonces

$$\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow$$

y finalmente cambiamos la cuarta y quinta con lo que nos queda la configuración deseada

$$\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow$$

Por lo que el mínimo número de movimientos es menor o igual a 3.

Desde luego 2 movimientos no son suficientes ya que para llegar a la posición deseada hay necesariamente que voltear la segunda y la quinta flecha, por las condiciones del problema estos movimientos son independientes. El hacer estos cambios, 2 de las flechas restantes se voltean por lo que es indispensable hacer un tercer movimiento.

**Solución al problema 4.** La respuesta es (b).

Si tomamos la parte de la cuerda que esta más atrás y la bajamos lo único que nos queda por hacer para convertir la cuerda en un círculo es desatornillarla.

**Solución al problema 5.** La respuesta es (a).

Como $\frac{1998}{2} = 999$, uno de los sumandos de cada pareja es menor que 1000. Los impares menores que 1000 son $1, 3, 5, ..., 999$ y estos son 500. Además a cada impar, $2k+1$, le podemos asociar el impar $1998 - (2k+1)$ que cumple que su suma es 1998. Por lo que hay exactamente 500 parejas.

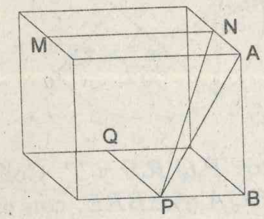
**Solución al problema 6.** La respuesta es (b).

Si tomamos las potencias de 2, tenemos unicamente 8 números $2^2 = 4, 2^3 = 8, ..., 2^9 = 512$. Entre los números formados como potencias de 3, tenemos $3^2 = 9, 3^3 = 27, ..., 3^6 = 729$, es decir, 5 números. Las potencias de 4 no las consideramos ya que 4 es una potencia de 2. Como potencias de 5 tenemos solamente 3, a saber, $5^2 = 25, 5^3 = 125, 5^4 = 625$. Como potencias de 6 tenemos $6^2 = 36, 6^3 = 216$, es decir, 2 números. Las potencias de 7 que tenemos que considerar son $7^2 = 49, 7^3 = 343$, es decir 2 números más. Las potencias de 8 y 9 no hay que considerarlas ya que al igual que el 4 estos números son potencias de 2 y 3, respectivamente. Números formados como potencias de 10 tenemos el $10^2 = 100, 10^3 = 1000$ y a partir del 10 únicamente tenemos que contar una potencia por cada uno de los números $11, ..., 31$, es decir, $11^2 = 121, ..., 31^2 = 961$. Sin embargo, hay que tener cuidado ya que entre los números del 11 al 31 tenemos el 16, 25 y 27 que son potencias de 2, 5 y 3 respectivamente. Por lo tanto, si sumamos todos obtenemos 40.

**Solución al problema 7.** La respuesta es (d).

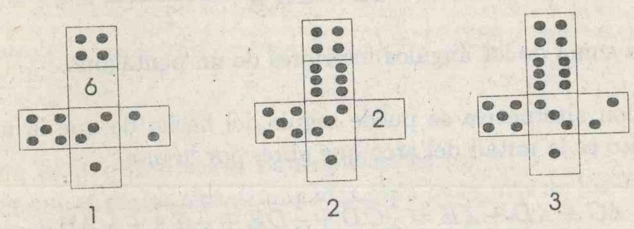
La distancia máxima está dada de uno de los extremos de la recta $MN$ a uno de los extremos de la recta $PQ$.

Ya que para cada punto fijo $R$ sobre $PQ$, la distancia máxima de $R$ a los puntos del segmento $MN$ se alcanzará en $M$ y $N$. Consideremos los puntos $N$ y $P$ y dibujemos un triángulo con estos puntos y el vértice $A$. La distancia de $N$ a $A$ es 1 y de $A$ a $B$ es 2, por lo tanto la hipotenusa del triángulo $ABP$ es $\sqrt{5}$. Obsérvese que el triángulo $NAP$ es rectángulo, luego la hipotenusa del triángulo $NAP$ es $\sqrt{6}$.




**Solución al problema 8.** La respuesta es (c).

Si deshacemos los dados tenemos el siguiente acomodo de los puntos en cada cara




hemos dejado el 6 y el 2 por no tener información de su orientación. Pero la cara del número 3 da la clave para detectar el lado diferente.

**Solución al problema 9.** La respuesta es (d).

Tenemos, utilizando el Teorema de Pitágoras, que $MC = \sqrt{5}$. Los triángulos $\triangle BMP$ y $\triangle DCP$ son semejantes, de donde,

$$\frac{PM}{1} = \frac{PC}{2},$$

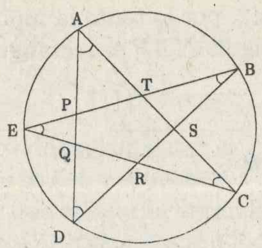
es decir, $PC = 2 \cdot PM$.

Por otro lado, tenemos que, $MC = \sqrt{5} = PM + PC$ luego $PM = \sqrt{5} - PC$, y sustituyendo $PM$ en la ecuación anterior tenemos

$$\begin{aligned} 3PC &= 2\sqrt{5} \\ PC &= \frac{2\sqrt{5}}{3}. \end{aligned}$$

**Solución al problema 10.** La respuesta es (b).

Llamamos $P$ la intersección de la recta $AD$ con la recta $BE$, $Q$ la intersección de la recta $AD$ con la recta $CE$ y así sucesivamente.




Entonces tenemos los puntos $P$,$Q$,$R$,$S$ y $T$. Consideramos los triángulos $\triangle ASD$, $\triangle ETC$, $\triangle DPB$, $\triangle CQA$ y $\triangle BRE$, con estos triángulos cubrimos todos los ángulos interiores del pentágono $PQRST$ más dos veces cada uno de los ángulos $\measuredangle A$, $\measuredangle B$, $\measuredangle C$, $\measuredangle D$ y $\measuredangle E$. Por lo tanto la suma de los ángulos interiores es

$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C + \measuredangle D + \measuredangle E = \frac{5\cdot\pi - 3\cdot\pi}{2} = \pi$$

pues $3\pi$ es la suma de los ángulos interiores de un pentágono.

Una solución alternativa se puede seguir del hecho de que la medida del ángulo inscrito es la mitad del arco que abre, por lo que

$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C + \measuredangle D + \measuredangle E = \frac{1}{2}\widehat{CD} + \frac{1}{2}\widehat{DE} + \frac{1}{2}\widehat{EA} + \frac{1}{2}\widehat{AB} + \frac{1}{2}\widehat{BC} = \pi.$$

**Solución al problema 11.** La respuesta es (a).

Se pueden representar todos los números del 1 al 31.

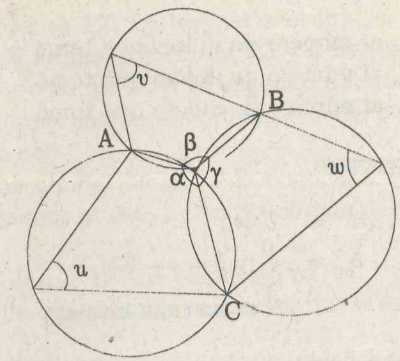
El 1,2,4,8 y 16 están ya que las sumas de un solo sumando están permitidas y estos números son las potencias de 2, es decir, $2^0 = 1$, $2^1 = 2$,..., $2^4 = 16$. Observemos la siguiente relación

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Números en base 2} & & & & \text{Números en base 10} \\
1 & = & 2^0 & = & 1 \\
10 & = & 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 & = & 2 \\
11 & = & 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 & = & 3 \\
100 & = & 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 & = & 4 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
11111 & = & 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + \ldots + 1\cdot 2^0 & = & 31
\end{array}$$

Por lo tanto, podemos escribir todos los números del 1 al 31.

**Solución al problema 12.** La respuesta es (b).

Si unimos los puntos $A$, $B$ y $C$ con el punto donde se intersectan los tres círculos, tenemos 3 cuadriláteros cíclicos.




De donde, los ángulos $u + \alpha = 180°$, $v + \beta = 180°$ y $w + \gamma = 180°$, por lo tanto, $u + \alpha + v + \beta + w + \gamma = 3 \cdot 180°$. Luego,

$$u + v + w = 3 \cdot 180° - (\alpha + \beta + \gamma) = 3 \cdot 180° - 360° = 180°.$$

**Solución al problema 13.** La respuesta es (a).

Tenemos que el dígito de las unidades para cada uno de los sumandos es

$$\begin{array}{lll} (1^2+1) = ...2 & (6^2+6) = ...2 & (11^2+11) = ...2 \\ (2^2+2) = ...6 & (7^2+7) = ...6 & \\ (3^2+3) = ...2 & (8^2+8) = ...2 & \\ (4^2+4) = ...0 & (9^2+9) = ...0 & \\ (5^2+5) = ...0 & (10^2+10) = ...0 & \end{array}$$

Podemos ver que cada 5 sumandos los dígitos de las unidades se repiten y su suma es 0. Como 1995 es un múltiplo de 5, el dígito de las unidades de la suma de los sumandos hasta 1995 es 0 y si aumentamos los sumandos

$$\begin{aligned} (1996^2 + 1996) &= ...2 \\ (1997^2 + 1997) &= ...6 \\ (1998^2 + 1998) &= ...2 \end{aligned}$$

tenemos que, el dígito de las unidades de la suma

$$(1^2+1) + (2^2+2) + ... + (1998^2 + 1998) = ...0.$$

**Solución al problema 14.** La respuesta es (c).

Llamemos

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | al número de dulces que tomó | A |
| $b$ | al número de dulces que tomó | B |
| $c$ | al número de dulces que tomó | C |

Según lo que dijeron tenemos

$$\begin{aligned} a &= b+2 \\ b &= \frac{a}{2} \text{ y } b = c-5 \\ & \quad c \text{ es un número par} \end{aligned}$$

Si A dice la verdad, como el número de dulces es $13 = a+b+c = (b+2)+b+c$, tenemos que

$$11 - c = 2b$$

luego $11 - c$ deberá ser par y entonces $c$ no puede ser par, luego C miente.

Si B dice la verdad tenemos que

$$13 = a+b+c = 2b+b+c = 3(c-5)+c$$

luego $c = 7$ y no puede ser par, por lo tanto, C miente.

Como no puede haber dos mentirosos uno de A y B dice la verdad, esto nos lleva a que C miente.

**Solución al problema 15.** La respuesta es (c).

Construyamos la siguiente tabla que nos indica los días en que mienten (M) o dicen la verdad (V)

| | *Lu* | *Ma* | *Mier* | *Ju* | *Vier* | *Sa* | *Do* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Hiena* | *M* | *M* | *M* | *V* | *V* | *V* | *V* |
| *Zorra* | *V* | *V* | *V* | *M* | *M* | *M* | *V* |

Ahora construyamos una tabla similar y denotemos por S en caso de que estén diciendo lo indicado ese día y por N en caso de que no esté diciendo lo indicado tenemos que

| | *Lu* | *Ma* | *Mier* | *Ju* | *Vier* | *Sa* | *Do* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Hiena* | *S* | *N* | *N* | *S* | *N* | *N* | *N* |
| *Zorra* | *N* | *N* | *N* | *S* | *N* | *N* | *S* |

claramente vemos que el día en que sucedió el encuentro fue el jueves.

**Solución al problema 16.** La respuesta es (d).

Un tetraedro tiene 6 aristas por lo que la figura resultante tiene 6 vértices y 8 caras. Además todas sus caras son triángulos entonces tenemos un octaedro.

**Solución al problema 17.** La respuesta es (c).

Como el niño 1 dijo no, los colores de 2,3 y 4 no pueden ser iguales, luego él ve dos de un color y otro del otro. El segundo niño, si ve al tercero y cuarto del mismo color sabrá que su color es diferente al del 3 y 4. Si los ve diferentes deberá contestar que no.

El tercer niño sabe ahora, debido a la respuesta no del segundo, que su gorro es de color diferente al del cuarto por lo que deberá contestar que sí.

**Solución al problema 18.** La respuesta es (a).

El área del triángulo es estrictamente mayor que el área del incírculo . Luego

$$sr > \pi r^2, \qquad \text{donde} \qquad s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{p}{2}$$

Por lo tanto,

$$\frac{p}{2} \cdot r > \pi r^2, \quad \text{así} \quad p > 2\pi r.$$

**Solución al problema 19.** La respuesta es (a).

Cada uno de los lados del triángulo lo dividimos en 3 partes iguales y de la parte central construimos un pico, esto es 2 lados más, es decir, por cada uno de los lados tenemos 4 nuevos lados entonces en el primer paso tenemos un total de $3 \cdot 4 = 12$ lados y 3 picos nuevos con los cuales tenemos un total de 6 picos. En el tercer paso, tenemos $12 \cdot 4 = 48$ lados y por cada uno de los lados tenemos un pico nuevo que sumados con los anteriores nos da un total de 18 picos. En el cuarto paso, tenemos $48 \cdot 4 = 192$ lados y por cada uno de los lados un pico que sumados con los anteriores nos da 66 picos. Finalmente en el quinto paso, tendremos $192 \cdot 4 = 768$ lados y 258 picos.

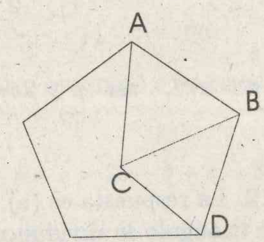
**Solución al problema 20.** La respuesta es (a).

Como $a_1 = 0$ y $a_2 = 2$ entonces tenemos que los elementos de la sucesión son

$$\begin{array}{rcccl} a_3 & = & \frac{0+2}{2} & = & 1 \\ a_4 & = & \frac{0+2+1}{3} & = & 1 \\ a_5 & = & \frac{0+2+1+1}{4} & = & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{n+1} & = & \frac{0+2+\overbrace{1+\ldots+1}^{n-2}}{n} & = & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

Por lo tanto $a_3 = a_4 = \ldots = a_{1998} = 1$, de donde $a_{1998} = a_{999} = 1$.

**Solución al problema 21.** La respuesta es (c).




Los ángulos $\angle CAB = \angle CBA = \angle ACB = 60°$, ya que el triángulo $\triangle ABC$ es equilátero. El ángulo

$$\angle ABD = \frac{3 \cdot 180°}{5} = 108°.$$

Ahora, como los lados $AB = BC = BD$, el triángulo $\triangle CBD$ es isósceles, y como el ángulo $\angle CBD = 48°$, entonces $\angle BDC = \angle BCD = 66°$.

**Solución al problema 22.** La respuesta es (d).

Si sobre 5 partidos A y B tienen 3 aciertos cada uno, tienen al menos un acierto en común. Como A y B sólo comparten el pronóstico del partido 4, éste debe ser el acierto común. Por lo tanto, el resultado del partido 4 es empate.

Sobre los 4 partidos restantes, A y B no comparten pronósticos, por lo tanto tienen 2 aciertos cada uno.

C no acertó el resultado del partido 4 y en los partidos 3 y 5, no comparte pronóstico con nadie, por lo tanto los aciertos de C están en los partidos 1 y 2, cuyo resultado es local.

Sabemos entonces, que el pronóstico de B falla en los partidos 1 y 2, los restantes son aciertos.

La tarjeta con 5 aciertos es

| | $L$ | $E$ | $V$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $X$ | | |
| 2 | $X$ | | |
| 3 | $X$ | | |
| 4 | | $X$ | |
| 5 | $X$ | | |

**Solución al problema 23.** La respuesta es (c).

El prisma tiene de base y de tapa a un polígono digamos de $n$ lados, cada vértice del polígono de la base se une por una arista a un vértice de la tapa, así se generan $n$ aristas más, luego el número de aristas debe ser $3n$. Por lo tanto, $3n = 27$ nos lleva a que $n = 9$, es decir, la base y la tapa son polígonos de 9 lados y como estos tienen 9 vértices, el prisma tendrá $2 \cdot 9 = 18$ vértices.

**Solución al problema 24.** La respuesta es (c).

Si un polígono tiene $n$ vértices tendrá $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales, ya que, cada vez que unamos un vértice con un vértice no adyacente formamos una diagonal, el primer vértice se puede escoger de $n$-maneras, el segundo de $n-3$ luego hay $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales, dividimos entre 2 por ser indistintos los extremos.

Ahora bien,

$$\frac{n(n-3)}{2} = n \quad \text{si y sólo si} \quad n - 3 = 2$$

luego $n = 5$.

**Solución al problema 25.** La respuesta es (a).

$$\begin{array}{cccccccccc}
R & R & R & R & R & R & R & R & R & R \\
R & V & R & V & R & V & R & V & R & V \\
R & V & R & V & R & R & R & V & R & V \\
R & V & R & V & R & R & R & V & R & V \\
R & V & R & V & R & R & R & V & R & R \\
R & V & R & V & R & V & R & V & R & R \\
R & V & R & V & R & V & R & V & R & R \\
R & V & R & V & R & V & R & V & R & R \\
R & V & R & V & R & V & R & V & R & R \\
R & V & R & V & R & V & R & V & R & V
\end{array}$$

**Solución al problema 26.** La respuesta es (c).

Como $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$, tenemos que $a^2 - b^2$ divide a $a^4 - b^4$, luego $(a^4 - b^4, a^2 - b^2) = (a^2 - b^2)$.

**Solución al problema 27.** La respuesta es (c).
Primero observemos que

$$\begin{aligned}\frac{2n^2+4n+18}{3n+3} &= \frac{(2n+2)(n+1)}{3(n+1)}+\frac{16}{3(n+1)}\\ &= \frac{2n+2}{3}+\frac{16}{3(n+1)}\end{aligned}$$

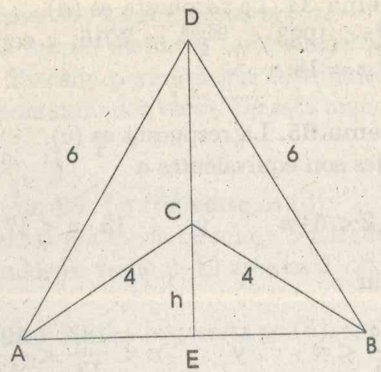
entonces para que tengamos esperanza de que sea entero debemos tener que $n+1$ debe dividir a 16, luego sólo hay que analizar los casos $n=1,3,7,15$.

| $n$ | $\frac{2n+2}{3}+\frac{16}{3(n+1)}$ | |
|---|---|---|
| 1 | $\frac{4}{3}+\frac{8}{3}$ | $=4$ |
| 3 | $\frac{8}{3}+\frac{4}{3}$ | $=4$ |
| 7 | $\frac{16}{3}+\frac{2}{3}$ | $=6$ |
| 15 | $\frac{31}{3}+\frac{1}{3}$ | $=11$ |

así hay 4 únicos valores en que el cociente es entero.

**Solución al problema 28.** La respuesta es (d).
Los puntos de intersección de las bisectrices solamente se pueden dar dentro de las caras del tetraedro. Una bisectriz de una cara tiene sólo tres puntos de intersección, el vértice de donde sale la bisectriz, el incentro de la cara donde está la bisectriz y el punto medio de la arista opuesta a la que llega la bisectriz. Vértices hay 4, incentros hay 4 (uno por cada cara) y puntos medios de aristas hay 6. Luego, hay en total 14 puntos de intersección.

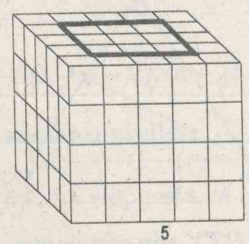
**Solución al problema 29.** La respuesta es (c).
Como el triángulo $\triangle ABD$ es equilátero la altura corta al lado $AB$ por la mitad formando un triángulo rectángulo.




Consideramos el triángulo $\triangle AEC$ entonces utilizando el Teorema de Pitágoras tenemos que $3^2+h^2=16$, de donde, $h=\sqrt{7}$. Por lo tanto el área es $3\sqrt{7}$.

**Solución al problema 30.** La respuesta es (b).
$5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 5\cdot 3\cdot 2^3$. Luego los divisores de 5! son de la forma $2^\alpha\cdot 3^\beta\cdot 5^\gamma$ con $0\le\alpha\le 3$, $0\le\beta\le 1$ y $0\le\gamma\le 1$ y en total hay $4\cdot 2\cdot 2=16$.

**Solución al problema 31.** La respuesta es (b).




Quedan ocultos los cubitos que se encuentran un nivel debajo del cuadrado marcado en la figura y ésto en cada una de las caras, es decir, $3\times 3\times 3$.

**Solución al problema 32.** La respuesta es (b).
Como $126=2\cdot 3^2\cdot 7$ debemos completar los números 2 y 7, por lo tanto, $2\cdot 7=14$ es el mínimo número por el que hay que multiplicar.

**Solución al problema 33.** La respuesta es (b).
El perímetro es $a+b+6=14$, donde $a$ y $b$ son los catetos, es decir, $a+b=8$ y por el Teorema de Pitágoras tenemos que $a^2+b^2=36$. De donde,

$$64=(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=36+2ab$$

y entonces $2ab=28$, luego, el área es $\frac{ab}{2}=7$.

**Solución al problema 34.** La respuesta es (d).

Como $1953 = \frac{62\cdot 63}{2} < 1998 < \frac{63\cdot 64}{2} = 2016$, y como $1998 = 2016 - 18$, tenemos que $n = 63$ y $x = 18$.

**Solución al problema 35.** La respuesta es (c).

Las dos desigualdades son equivalentes a

$$17 \cdot 2 < 5 \cdot n \qquad \text{y} \qquad 13 \cdot n < 17 \cdot 11$$

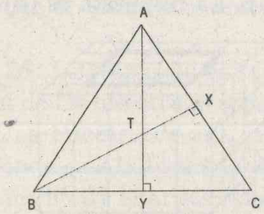
es decir, $n$ debe cumplir

$$\frac{30}{5} < \frac{34}{5} < n \qquad \text{y} \qquad n < \frac{187}{13} < \frac{195}{13} = 15.$$

Luego, las $n$ posibles están en el rango

$$7 \leq n \leq 14.$$

**Solución al problema 36.** La respuesta es (b).




Los triángulos $\triangle BCX$ y $\triangle BTY$ son semejantes pues ambos son rectángulos y tienen en común el ángulo $\measuredangle B$. Luego

$$\begin{aligned} \measuredangle BTY &= \measuredangle BCX = \measuredangle C = 180° - \measuredangle A - \measuredangle B \\ &= 180° - 60° - 50° = 70°. \end{aligned}$$

**Solución al problema 37.** La respuesta es (b).

Escribimos el número como $10 \cdot y + x$ y queremos ver cuántos números hay que al invertir sus dígitos se incrementan en 9, es decir, tenemos que resolver la ecuación $10 \cdot x + y = 10 \cdot y + x + 9$. De aquí tenemos

$$(x - y)(10 - 1) = 9$$

Por lo tanto, $x - y = 1$ y los números son $\{12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89\}$.

**Solución al problema 38.** La respuesta es (c).
Si todos los números fueran distintos tendríamos 5! arreglos. Pero como tenemos dos 1's y dos 2's cada permutación entre unos o cada permutación entre doses la estamos contando dos veces. De esta manera, se deduce que hay $\frac{5!}{2!2!} = 30$.

**Solución al problema 39.** La respuesta es (d).
En la figura hay 3 sextas partes de círculo y 3 mitades de círculo. En total hay $\frac{3}{6} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2$ círculos de radio 2. El área es $2 \cdot 2^2 \cdot \pi = 8\pi$.

**Solución al problema 40.** La respuesta es (d).
Tenemos que:

$$p(1) = 1^3 + 1 \cdot a + 1 = 1 + a + 1 = 2 + a = 1 \quad \text{entonces} \quad a = -1$$

luego:

$$p(2) = 2^3 + 2 \cdot a + 1 = 8 + (-1)(2) + 1 = 8 - 2 + 1 = 7.$$

**Solución al problema 41.** La respuesta es (a).
Los números posibles son

$$a + 1, a + 2, ..., a + (b - a - 2), (a + (b - a - 1)) = b - 1.$$

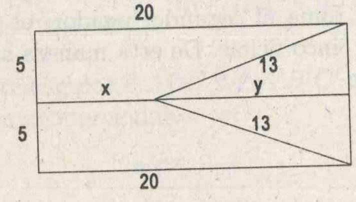
Por lo tanto, hay $b - a - 1$ números posibles.

**Solución al problema 42.** La respuesta es (b).
Tenemos que

$$(1 + \frac{1}{n})(1 - \frac{1}{m}) = (\frac{n+1}{n})(\frac{m-1}{m}) = 1$$

entonces $m = n + 1$.

**Solución al problema 43.** La respuesta es (b).

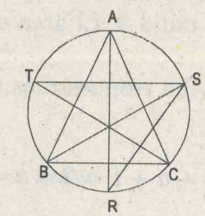


En la figura tenemos que $x+y=20$ y por el Teorema de Pitágoras

$$y=\sqrt{13^2-5^2}=12.$$

luego, $x=8$.

**Solución al problema 44.** La respuesta es (b).




Observemos primero que

$$\angle RST=\angle RSB+\angle BST$$

pero $\angle RSB=\angle RAB$ ya que abren el mismo arco, además $\angle RAB=90°-\angle B$. Análogamente, $\angle BST=\angle BCT=90°-\angle B$. Por lo tanto,

$$\angle RST=180°-2\angle B=\angle A.$$

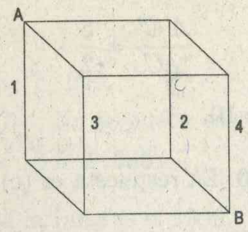
**Solución al problema 45.** La respuesta es (a).

Para la primera cifra hay 3 números posibles $(4,5,6)$ una vez escogida la primera hay 9 posibles para la segunda. Dadas la primera y la segunda cifras hay 8 posibles dígitos para la tercera, de modo que las tres cifras sean distintas. El total de números de 3 cifras distintas entre los números 400 y 699 inclusive es $3\cdot 9\cdot 8$, como tenemos 300 números, la probabilidad es $\frac{3\cdot 9\cdot 8}{300}=\frac{9\cdot 8}{100}=\frac{9\cdot 2}{25}=\frac{18}{25}$.

**Solución al problema 46.** La respuesta es (c).

Observemos que si el primer jugador toma 3 dejaría 10 fichas. Ahora no importa cuántas fichas toma el segundo jugador, el primero siempre puede completar un grupo de cinco fichas. De esta manera asegura su triunfo.

**Solución al problema 47.** La respuesta es (c).




Para ir de $A$ a $B$ se puede bajar por las aristas 1,2,3 ó 4.

Si pasamos por 1 hay 2 caminos posibles, al igual que si pasamos por 4. Si bajamos por 2 ó 3, hay 4 caminos posibles en cada caso.

Por lo tanto, el total de caminos es 12.

**Solución al problema 48.** La respuesta es (c).

El número de divisores de $n$ es $\nu(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)$. El número de divisores de $n^2$ está dada por $\nu(n^2) = (2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1) = 143 = 13 \cdot 11$, de aquí tenemos que

$$\begin{aligned} (2\alpha_1 + 1) &= 13 \\ (2\alpha_2 + 1) &= 11 \end{aligned}$$

de donde, $\alpha_1 = 6$ y $\alpha_2 = 5$.

Por lo tanto, el número de divisores de $n^3$ es

$$\nu(n^3) = (3\alpha_1 + 1)(3\alpha_2 + 1) = (3 \cdot 6 + 1)(3 \cdot 5 + 1) = 19 \cdot 16 = 304.$$

**Solución al problema 49.** La respuesta es (c).

El área del triángulo $\triangle ABC$, tenemos por un lado que es

$$\text{Area } (\triangle ABC) = s \cdot r = \frac{3+4+5}{2} \cdot r = 6r$$

y por otro

$$\text{Area } (\triangle ABC) = \frac{BC \cdot CA}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$$

luego, $r = 1$. Como los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son semejantes, entonces todos sus elementos son proporcionales, así

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{r'}{r}$$

pero $r' = \frac{AB}{2} = \frac{5}{2}$. Por lo tanto,

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{5}{2}$$

luego, $A'C' = \frac{5}{2}AC = \frac{5}{2} \cdot 4 = 10$.

**Solución al problema 50.** La respuesta es (c).
Tenemos varios casos

1. Consideremos el caso en que todas los lados se colorean del mismo color, estas son 4 coloraciones.
2. En este caso consideramos las coloraciones en las que dos lados tienen el mismo color. Escogido un color para dos lados, el tercer lado lo podemos colorear de 3 colores. Luego, las coloraciones con dos lados del mismo color son $4 \cdot 3 = 12$.
3. Por último, estudiemos el caso en que todos los lados tienen distinto color. En este caso, tenemos que en el primer lado podemos poner cualquiera de los 4 colores, en el segundo escogemos entre los tres colores restantes, en el tercero entre dos. Por lo que el número de coloraciones es
$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3} = 8,$$
dividimos entre 3 ya que estamos considerando que dos coloraciones son iguales si difieren en un giro del triángulo.

**Solución al problema 51.** La respuesta es (b).
El promedio de los tres números es $\frac{a+b+c}{3} = 85$ y el promedio de los otros dos es $\frac{d+e}{2} = 95$ de donde

$$\begin{aligned} a+b+c &= 3 \cdot 85 \\ e+d &= 2 \cdot 95 \end{aligned}$$

Por lo tanto el promedio de los cinco es

$$\frac{a+b+c+e+d}{5} = \frac{3 \cdot 85 + 2 \cdot 95}{5} = 89.$$

**Solución al problema 52.** La respuesta es (c).
La sucesión de los números de los escalones que pisa la rana es

$$0, 5, 3, 8, 6, 11, 9, 14, 12, \ldots$$

Los números son de dos formas: múltiplos de tres, $3a$, y múltiplos de 3 más 5, $3b+5$. Los números que tenemos se pueden escribir como

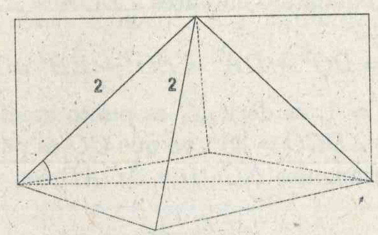
$$\begin{aligned} 1997 &= 5+3\cdot 664 \\ 1998 &= 3\cdot 666 \\ 1999 & \quad \text{No se puede escribir así} \\ 2000 &= 5+3\cdot 665 \end{aligned}$$

Luego, el escalón que no pisa la rana es el 1999.

**Solución al problema 53.** La respuesta es (c).

Supongamos que colocamos un rectángulo sobre la diagonal del cuadrado que tenga la misma altura que la pirámide, como se muestra en la figura.

Si tomamos que las aristas de la pirámide miden 2, tendremos un rectángulo de base $2\sqrt{2}$ y de altura $\sqrt{2}$, sobre el cuál tenemos dibujado un triángulo isósceles con dos lados de longitud 2 y el tercero de longitud $2\sqrt{2}$. La altura de la pirámide divide al rectángulo en dos cuadrados, de los cuales las diagonales son lados de la pirámide, por lo tanto, el ángulo que forman con la base es de 45°.




**Solución al problema 54.** La repuesta es (d).

Llamemos $A$ al número de frutas que contenía la canasta que la señora vendió. Sean $M$ y $N$ el número de manzanas y naranjas que le quedaron. Entonces, como el total de frutas que la señora tenía es $8+12+15+17+19+22=93$ y como le quedaron el doble de naranjas que de manzanas podemos escribir

$$\begin{aligned} M+N &= 93-A \\ 2M &= N. \end{aligned}$$

De donde

$$M=\frac{93-A}{3}$$

luego, $A=12$ ó $A=15$, ya que, ninguna de las otras diferencias es divisible entre 3. Ahora, si $A=12$, $M=27=19+8$ y $N=54=15+17+22$, que es solución.

Si $A = 15$ entonces $M = 26$ y $N = 52$, pero no hay forma de obtener estas sumas con el número de frutas que tienen las canastas restantes.

Por lo tanto, el número de naranjas que le quedan es 54.

**Solución al problema 55.** La respuesta es (d).

Primero hay que ver que debemos dejar al menos dos subconjuntos cuyos puntos sean adyacentes, ya que de otra forma dos triángulos se van a intersectar. Entonces podemos hacer la selección de 2 maneras diferentes.

La primera es tomando a los subconjuntos de modo que los puntos de cada uno de ellos sean adyacentes, de esta manera tenemos 3 formas de hacer la selección.

La segunda es tomando 2 subconjuntos con sus puntos adyacentes y el tercer subconjunto sin puntos adyacentes, hay 9 maneras de hacer la selección.

Por lo tanto, hay 12 formas distintas de escoger a estos 3 subconjuntos.

**Solución al problema 56.** La respuesta es (a).

Notemos que $CD = CE$ por ser $D$ y $E$ puntos de tangencia de tangentes concurrentes en $C$. Llamemos $m = DA = EB$ y $r = DO = DE$. Ahora como $DO$ y $DE$ son perpendicualres a $AC$ y $CB$ respectivamente, y como el triángulo $\triangle ABC$ es equilátero entonces $\angle DOA = \angle EOB = 30°$. También tenemos que

$$AO^2 = DO^2 + DA^2 = EO^2 + EB^2 = OB^2$$

por lo que $AO = OB = 1$, es decir, $O$ es punto medio de $AB$, entonces el ángulo $\angle DOC = 60°$ y $\angle DCO = 30°$, ya que $CO$ es perpendicular a $AB$. De aquí tenemos que los triángulos $\triangle COD$ y $\triangle OAD$ son semejantes, entonces

$$m\sqrt{3} = r,$$

ya que $CO = \sqrt{3}$. Utilizando el Teorema de Pitágoras en el triángulo $\triangle OAD$, tenemos que

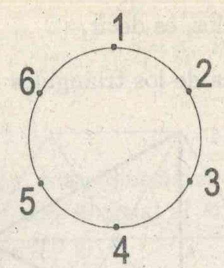
$$m^2 + r^2 = 1.$$

Igualando estas dos ecuaciones obtenemos que $r^2 = \frac{3}{4}$ y como el ángulo $\angle DOE = 120°$ entonces el área buscada es igual a

$$\frac{r^2\pi}{3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

**Solución al problema 57.** La respuesta es (d).

Numeramos los puntos del 1 al 6 a favor de las manecillas del reloj




Tenemos dos casos.

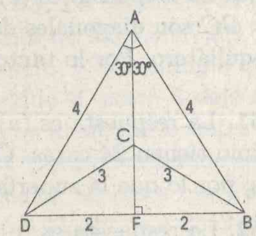
Tracemos las cuerdas de modo que cada punto quede unido con un punto adyacente, es decir, el 1 con el 2, el 3 con el 4 y el 5 con el 6. Considerando las rotaciones tenemos 2 maneras de unirlos.

El segundo caso es uniendo el 1 con el 4, el 2 con el 3 y el 5 con el 6. Considerando las rotaciones tenemos 3 formas de unirlos.

Luego, hay en total 5 formas de unir los puntos.

**Solución al problema 58.** La respuesta es (a).

Consideremos $D$ y $B$ como en la figura, prolonguemos el segmento $AC$ hasta que corte al segmento $BD$ y llamemos $F$ al punto de la intersección.




Notemos que el triángulo $\triangle ABD$ es equilátero, ya que $AD = AB$ y el ángulo $\angle DAB = 60°$. Como $DC = BC$, los ángulos $\angle CDB$ y $\angle CBD$ son iguales, por lo que los ángulos $\angle ADC$ y $\angle ABC$ también lo son.

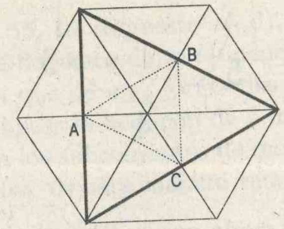
Luego, los triángulos $\triangle ADC$ y $\triangle ABC$ son iguales. Entonces $\angle DAC = \angle BAC = 30°$, es decir, $AC$ es bisectriz del ángulo $\angle DAB$ y $AF$ es altura del triángulo $\triangle ABD$, de donde, $DF = BF = 2$. Por lo tanto,

$$AC = AF - FC = 2\sqrt{3} - \sqrt{5}$$

**Solución al problema 59.** La respuesta es (d).

Como el hexágono es regular podemos dividirlo en 12 triángulos rectángulos iguales como se muestra en la figura, entonces el área estará dada por la suma de las áreas de los 12 triángulos, es decir,

$$H = 12 \cdot \text{Area de los triángulos rectángulos.}$$




Tenemos también que es

$$H = 6 \cdot \text{Area de los triángulos rectángulos} + 4 \cdot \text{Area}(\triangle ABC)$$

luego,

$$\frac{1}{2}H = 4 \cdot \text{Area}(\triangle ABC).$$

Por lo tanto, Area$(\triangle ABC) = \frac{1}{8}H$.

**Solución al problema 60.** La respuesta es (c).
Notemos que $CA = AG = GC$ son diagonales de las caras del cubo, por lo que el triángulo $\triangle CAG$ es equilátero. Por lo tanto, el ángulo $\angle CAG = 60°$

**Solución al problema 61.** La respuesta es (a).
Son 6 cubos que en principio tienen 24 caras. Como hay 3 pares de cubos pegados, hay 6 caras ocultas, por lo que la superficie exterior es $24 - 6 = 18$.

**Solución al problema 62.** La respuesta es (c).
Tenemos que

$$1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{1998} = 1_2 + 10_2 + 10_2^2 + 10_2^3 + \ldots + 10_2^{1998}$$

Por lo que al hacer la suma nos va a quedar

$$\underbrace{111\ldots1}_{1999},$$

es decir, 1999 unos. Por lo tanto, no hay ningún cero.

**Solución al problema 63.** La respuesta es (d).
Podemos escribir las igualdades como:

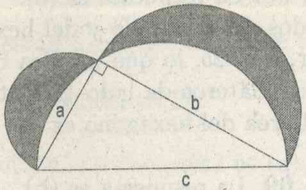
$$2 = 10^{\frac{1}{x_1}} \quad \text{y} \quad 5 = 10^{\frac{1}{x_2}}$$

Si multiplicamos estas igualdades obtenemos:

$$2 \cdot 5 = 10^{\frac{1}{x_1}} \cdot 10^{\frac{1}{x_2}}$$
$$10 = 10^{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}$$

por lo tanto $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$.

**Solución al problema 64.** La respuesta es (c).
Veamos que el área sombreada es igual al área de toda la figura menos el área del semicírculo con diámetro $c$.




Sabemos que $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el área, $A$, de la figura sombreada es

$$A = \frac{a^2\pi}{8} + \frac{b^2\pi}{8} + \frac{ab}{2} - \frac{c^2\pi}{8} = \frac{a^2\pi + b^2\pi - a^2\pi - b^2\pi}{8} + \frac{ab}{2} = \frac{ab}{2}.$$

**Solución al problema 65.** La respuesta es (a).
El mínimo común múltiplo de 2,3,4,5,6,7,8,9 y 10 es $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$. Una vez encontrado un número, $r$, que cumpla que al ser dividido entre 2 deje residuo 1, entre 3 deje residuo 2, entre 4 deje residuo 3, etc., y al dividirlo entre 9 deje 8 por residuo y al dividirlo entre 10 deje residuo 9, todos los demás son de la forma $s = r + 2520m$ donde $m$ es un entero. Como $r = -1$ es un número con la propiedad, tenemos que $2519 = -1 + 2520$ es el número positivo más pequeño. Como 11 divide a 2519 el residuo es 0.

**Solución al problema 66.** La respuesta es (c).
Sea $n$ el número de canicas que tenía la bolsa que escogió Herminio, entonces podemos poner la sucesión de bolsas como sigue:

$$1, 2, 3, ..., n, ..., n + 14$$

entonces tenemos que la suma de todas las bolsas que tienen desde 1 canica hasta la que tiene $n-1$ canicas es igual a la suma de la bolsa con $n+1$ canicas hasta la de $n+14$ canicas, es decir

$$\begin{aligned} 1 + 2 + ... + n - 1 &= (n+1) + ... + (n+14) \\ \frac{n(n-1)}{2} &= 14n + \frac{14 \cdot 15}{2} \end{aligned}$$

cuya única solución positiva es $n = 35$.

**Solución al problema 67.** La respuesta es (a).

Sea $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$ tal número, con todos los $p_i$'s primos positivos. Como $N$ tiene 11 divisores entonces

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)...(\alpha_r + 1) = 11.$$

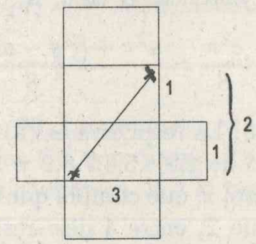
Como 11 es primo entonces $N = p_1^{10}$, por lo que el entero más pequeño es $N = 2^{10}$, que al dividirlo entre 11 deja residuo 1.

**Solución al problema 68.** La respuesta es (c).

Llamemos $a$ y $b$ a los lados del triángulo y del hexágono, respectivamente. Entonces $3a = 6b$, es decir, $a = 2b$, lo que implica que el hexágono va estar formado por 6 triángulos equiláteros de lado $\frac{a}{2}$. Entonces la razón entre sus áreas es $\frac{3}{2}$. Por lo tanto, el área del hexágono es 3.

**Solución al problema 69.** La respuesta es (b).

El camino más corto es:




Por el Teorema de Pitágoras la longitud del camino es $\sqrt{13}$.

**Solución al problema 70.** La respuesta es (d).

La razón entre los volúmenes de las esferas es:

$$\frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$$

por lo que la otra esfera tiene volumen $\frac{27}{8}$.

**Solución al problema 71.** La respuesta es (a).

Escribamos la sucesión como sigue

$$\begin{aligned}
& 1+2-3+4+5-6+7+8-9+...+97+98-99 = \\
= \;& 1+2+4+5+7+...+97+98-(3+6+...+99) = \\
= \;& 1+2+3+4+5+6+7+...+98+99+-2(3+6+...+99) = \\
= \;& \tfrac{99(100)}{2} - 6\,(1+2+...+33) = \\
= \;& 4950 - 6\,(\tfrac{33\cdot 34}{2}) = \\
= \;& 4950 - 3366 = \\
= \;& 1584.
\end{aligned}$$

**Solución al problema 72.** La respuesta es (d).
Al partir el cubo se van a formar $5^3 = 125$ cubitos de arista 1 y como cada uno de ellos tiene 12 aristas, tenemos que la suma es $12 \cdot 125 = 1500$.

**Solución al problema 73.** La respuesta es (b).
Hay tres tamaños de triángulos

1. Los triángulos que constan de un triangulito son 12.

2. Los triángulos que están formados de cuatro triangulitos son 6.

3. Los triángulos que están formados de nueve triangulitos son 2.

Por lo tanto el total de triángulos es 20.

**Solución al problema 74.** La respuesta es (d).
Sea $k$ un entero positivo, entonces

$$\begin{aligned} \frac{18}{n+4} &= k \\ 18 &= k(n+4) \\ \frac{18}{k} - 4 &= n. \end{aligned}$$

por lo que $k$ debe dividir a 18, de aquí que $k$ puede ser $1, 2, 3, 6, 9, 18$, pero sólo $1, 2$ y $3$ dan un valor positivo de $n$. Entonces, $n$, puede tomar 3 valores diferentes.

**Solución al problema 75.** La respuesta es (c).
Los triángulos $\triangle DEC$ y $\triangle ABC$ son semejantes, en razón

$$\frac{EC}{BC} = \frac{b/2}{a}.$$

Luego los perímetros guardan esa misma proporción.
Como $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo con ángulos agudos de $60°$ y $30°$, tenemos que si $BC = a$ entonces $AC = b = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ y $AB = c = \frac{a}{2}$. Luego,

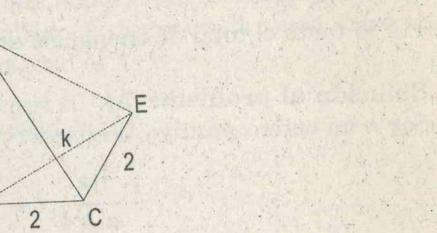
$$\frac{b/2}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

**Solución al problema 76.** La respuesta es (d).
Si hay un número impar de $-1$, $ABCDEF = -1$ y si hay un número par de $-1$, $ABCDEF = 1$. Luego, en la suma $A + B + C + D + E + F + ABCDEF$

siempre hay un número par de $-1$. Las posibles sumas son

$$\begin{aligned} 1+1+1+1+1+1+1 &= 7 \\ -1-1+1+1+1+1+1 &= 3 \\ -1-1-1-1+1+1+1 &= -1 \\ -1-1-1-1-1-1+1 &= -5 \end{aligned}$$

**Solución al problema 77.** La respuesta es (d).
Como el triángulo $\triangle EDC$ es isósceles, el ángulo $\angle DCE = 120°$.




Por la ley de los cosenos

$$\begin{aligned} DE^2 &= DC^2 + CE^2 - 2DC \cdot CE \cos(\angle DCE) \\ &= 4+4-8\cos 120° \\ &= 4+4-8(\frac{-1}{2}) = 12 \end{aligned}$$

Luego $DE = 2\sqrt{3}$.

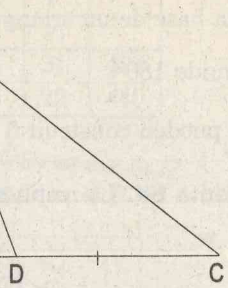
**Solución al problema 78.** La respuesta es (a).
El mínimo número de unos se alcanza cuando más números distintos de uno se pueden usar como factores de 1998. La factorización máxima de 1998 es

$$1998 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37$$

que son 5 números. El mínimo número de factores unos es $1998 - 5 = 1993$.

**Solución al problema 79.** La respuesta es (b).
Hay tres posiciones para un círculo tangente simultáneamente a $C_1$ y $C_2$. La primera es que ambos círculos $C_1$ y $C_2$ sean tangenes internamente al nuevo círculo, pero ésto es imposible por la limitante de que el círculo debe ser de radio 3. La segunda posibilidad es que el círculo sea tangene internamente a $C_1$ (o $C_2$) y externamente a $C_2$ (o $C_1$), en cuyo caso hay dos de estos círculos. La tercera posibilidad es que el círculo sea tangente externamente a $C_1$ y $C_2$, en cuyo caso hay sólamente dos círculos de radio 3 con la propiedad.

**Solución al problema 80.** La respuesta es (c).




Sean $A$,$B$,$C$ y $D$ como en la figura. Como $AD = AB$ entonces:

$$\angle ADB = \angle ABD = \frac{180^\circ - 48^\circ}{2} = 66^\circ.$$

Como $AD = DC$ entonces $\angle DAC = \angle DCA = \alpha$, luego $(48^\circ + \alpha) + \alpha + 66^\circ = 180^\circ$ entonces $2\alpha + 114^\circ = 180^\circ$. Por lo tanto

$$\alpha = \frac{180^\circ - 114^\circ}{2} = 33^\circ.$$

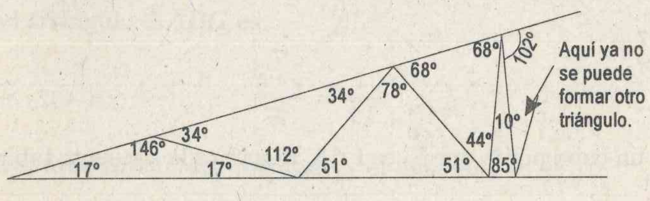
**Solución al problema 81.** La respuesta es (b).

Como $54 = 2 \cdot 27 = 2 \cdot 3^3$, 9 tiene que dividir a $a99b$, luego, 9 divide a $a+b$. Además 2 divide a $a99b$, luego $b$ es par. Si 9 divide a $a+b$, como $a$ y $b$ son dígitos y $b$ es par, tenemos que $a+b=9$. Luego, $a+9+9+b=27$, de modo que 27 divide a $a99b$. Por lo tanto, las soluciones con $b$ par son: 9990, 7992, 5994, 3996 y 1998 que son 5.

**Solución al problema 82.** La respuesta es (b).

17 no esta en base 6, el número 23 en base 6 es el 15, que no es un factor de 1998. El 5 en base 6 es 5 que tampoco es factor de 1998 y por último el 3 en base 6 es también el 3 que si es factor de 1998.

**Solución al problema 83.** La respuesta es (d).

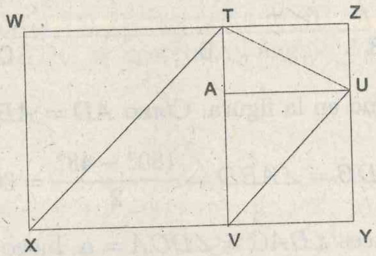



Las reglas para construir los triángulos son

1. Los ángulos internos sumen 180°.
2. Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales.
3. El ángulo llano mide 180°.

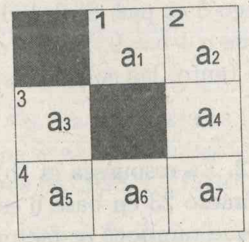
Por lo tanto sólo se pueden construir 5 como se muestra en la figura.

**Solución al problema 84.** La respuesta es (c).




Trazamos $TV$ y $UA$ tal como se muestra en la figura. En el rectángulo $TAUZ$, $TU$ es la diagonal, por lo que divide el área en dos partes iguales. Similarmente en los cuadriláteros $AVYU$ y $WXVT$, las diagonales $VU$ y $XT$, los dividen en partes iguales. Por lo tanto, el área de $WXYZ$ es el doble del área de $TUVX$, es decir, el área del rectángulo es 24.

**Solución al problema 85.** La respuesta es (b).




Tenemos que:
1H.- $a_1a_2$
3H.- $a_3$
4H.- $a_5a_6a_7$
2V.- $a_2a_4a_7$
3V.- $a_3a_5$

El 3H es un cubo por lo que $a_3$ es 1 ó 8. Hagamos la siguiente tabla siguiendo las claves

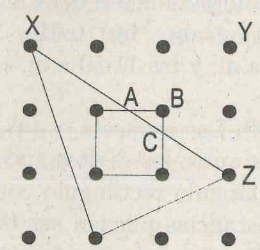
| 3H | 3V | 1H | 4H |
|---|---|---|---|
| 1 | 12 | 3 | |
| | 16 | 4 | |
| 8 | 84 | 21 | 420 |
| | 88 | 22 | 440 |

Tenemos que $a_3$ es 8 forzosamente, $a_7$ es 0 y $a_5$ es 4. Entonces $a_1$ es 2 y $a_2$ es 1. Como 2V es un cuadrado $a_4$ también es 0. El crucigrama final es

| | | |
|---|---|---|
| ■ | 2 | 1 |
| 8 | ■ | 0 |
| 4 | 2 | 0 |

y la suma de los dígitos es 17.

**Solución al problema 86.** La respuesta es (d).




El punto $A$ es el punto medio del lado del cuadrado. Tenemos que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ son semejantes por lo tanto

$$\frac{3}{\frac{1}{2}} = \frac{XY}{AB} = \frac{YZ}{BC} = \frac{2}{BC}$$

entonces $BC = \frac{1}{3}$.

El área del triángulo $\triangle ABC$ es

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{12}$$

Por lo tanto el área común del cuadrado y el triángulo es $\frac{11}{12}$.

**Solución al problema 87.** La respuesta es (b).

Llamemos $t$ al tiempo transcurrido desde que el esquiador sale hasta la 1 p.m. y sea $v$ la velocidad requerida para que el esquiador llegue a las 12 a.m. Como la distancia que tiene que recorrer es la misma tenemos, por ser la distancia igual a velocidad por tiempo que:

$$\begin{aligned} 10t &= 15(t-2) \\ t &= 6 \end{aligned}$$

Ahora la velocidad $v$, que recorre la distancia de 60 km en 5 horas es:

$$v = \tfrac{60}{5} = 12\tfrac{km}{h}$$

Por lo tanto, deberá viajar a $12\frac{km}{h}$.

**Solución al problema 88.** La respuesta es (d)

Primero consideremos las horas de un sólo dígito. La primera y la última cifra deben ser iguales, pero la del centro puede ser cualquier número entre 0 y 5, hay 6 horas capicúas cada hora. Esto da un total de 54 horas capicúas entre la 1:00 a.m. y las 9:59 a.m. Para las horas de dos dígitos (10 y 11) los minutos de las horas capicúas están completamente determinados por las horas y hay unicamente dos de esas horas, a saber, las 10:01 y 11:11. Entonces el total de horas capicúas entre la 1:00 a.m. y las 11:59 a.m. es 56.

**Solución al problema 89.** La respuesta es (a)

Cada una de las distancias entre los dígitos sucesivos del número telefónico es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con lados enteros. Usando el Teorema de Pitágoras las distancias pueden ser fácilmente calculadas y son $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$ y $\sqrt{5}$, respectivamente. Entonces la distancia total recorrida por tu dedo es

$$2\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10} = 2\sqrt{2}+3\sqrt{5}+\sqrt{2}\sqrt{5} = \sqrt{5}(3+\sqrt{2})+2\sqrt{2}.$$

**Solución al problema 90.** La respuesta es (b).

Si a todas las personas que están detrás de Pedro les restamos las que están entre Pedro y Pablo, nos quedarán únicamente las personas que están detrás de Pablo, con él inclusive, y si a éstas les sumamos todas las personas que están delante de Pablo obtendremos la longitud de la cola, ésta es $n+x-y$.

**Solución al problema 91.** La respuesta es (b).

Como los puntos tienen que estar a distancia 6 de $A$ entonces tienen que encontrarse en un círculo de radio 6 con centro en $A$; además tienen que equidistar de $B$ y $C$ por lo que tienen que estar en la mediatriz del lado $BC$.

Entonces los únicos puntos que cumplen son los 2 que se encuentran en la intersección del círculo con la mediatriz.

**Solución al problema 92.** La respuesta es (b).

Claramente, las únicas posibles soluciones para $x$ son del 1 al 7. Cuando $x = 7$ tenemos que $y + z = 2$ que tiene únicamente una solución $y = z = 1$; cuando $x = 6$ tenemos que $y + z = 5$, que tiene 4 soluciones, $y$ puede variar de 1 a 4 y $z$ del 4 al 1, es decir, si $y = 1$, $z = 4$, si $y = 2$, $z = 3$ y así sucesivamente. De aquí podemos ver que si reducimos el valor de $x$ en 1 aumentamos 3 soluciones. Entonces el número total de soluciones es

$$1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 = 70.$$

**Solución al problema 93.** La respuesta es (b).

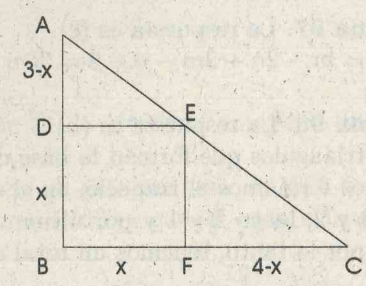
Si $y \geq 0$ entonces $x - y = x - |y|$ es el mínimo. Si $y < 0$, entonces $x + y = -|x + y| = x - |y|$ que es el mínimo.

**Solución al problema 94.** La respuesta es (d).

El ángulo $\angle z = 108°$, por ser el ángulo de un pentágono regular, $\angle y = 180° - 108° = 72°$. Como el ángulo $\angle x = \angle FEA$, ya que el triángulo $\Delta AEF$ es isósceles, entonces $2x + y = 180°$, de donde $\angle x = 54°$. Por lo tanto, $\angle x + \angle y + \angle z = 234°$.

**Solución al problema 95.** La respuesta es (b).

Sea $x$ la longitud del lado del cuadrado.




Como los triángulos $\Delta ABC$ y $\Delta ADE$ son semejantes, tenemos que:

$$\frac{3-x}{3} = \frac{x}{4}, \text{ luego } 12 - 4x = 3x, \text{ y entonces } x = \frac{12}{7}.$$

Luego la razón de las áreas es:

$$\frac{(BFED)}{(ABC)} = \frac{\left(\frac{12}{7}\right)^2}{\frac{3\cdot 4}{2}} = \frac{144}{49 \cdot 6} = \frac{24}{49}.$$

Entonces los únicos puntos que cumplen son los 2 que se encuentran en la intersección del círculo con la mediatriz.

**Solución al problema 92.** La respuesta es (b).

Claramente, las únicas posibles soluciones para $x$ son del 1 al 7. Cuando $x = 7$ tenemos que $y + z = 2$ que tiene únicamente una solución $y = z = 1$; cuando $x = 6$ tenemos que $y + z = 5$, que tiene 4 soluciones, $y$ puede variar de 1 a 4 y $z$ del 4 al 1, es decir, si $y = 1$, $z = 4$, si $y = 2$, $z = 3$ y así sucesivamente. De aquí podemos ver que si reducimos el valor de $x$ en 1 aumentamos 3 soluciones. Entonces el número total de soluciones es

$$1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 = 70.$$

**Solución al problema 93.** La respuesta es (b).

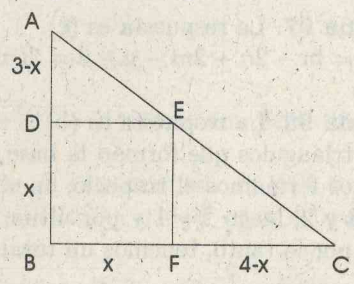
Si $y \geq 0$ entonces $x - y = x - |y|$ es el mínimo. Si $y < 0$, entonces $x + y = -|x + y| = x - |y|$ que es el mínimo.

**Solución al problema 94.** La respuesta es (d).

El ángulo $\angle z = 108°$, por ser el ángulo de un pentágono regular, $\angle y = 180° - 108° = 72°$. Como el ángulo $\angle x = \angle FEA$, ya que el triángulo $\triangle AEF$ es isósceles, entonces $2x + y = 180°$, de donde $\angle x = 54°$. Por lo tanto, $\angle x + \angle y + \angle z = 234°$.

**Solución al problema 95.** La respuesta es (b).

Sea $x$ la longitud del lado del cuadrado.




Como los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ADE$ son semejantes, tenemos que:

$$\frac{3 - x}{3} = \frac{x}{4}, \text{ luego } 12 - 4x = 3x, \text{ y entonces } x = \frac{12}{7}.$$

Luego la razón de las áreas es:

$$\frac{(BFED)}{(ABC)} = \frac{\left(\frac{12}{7}\right)^2}{\frac{3 \cdot 4}{2}} = \frac{144}{49 \cdot 6} = \frac{24}{49}.$$

**Solución al problema 96.** La respuesta es (c).

Cada que un colchón se encima en otro o en otros, cada uno tendrá una deformación de su décima parte, así las alturas irán cambiando con la regla

$$h = 20 + \frac{9}{10}k$$

donde $h$ es la altura nueva y $k$ es la altura anterior.

Así tendremos la siguiente tabla

| Número de Colchones | Altura |
|---|---|
| 1 | 20 |
| 2 | $20(1+\frac{9}{10})$ |
| 3 | $20(1+\frac{9}{10}+\frac{9^2}{10^2})$ |
| 4 | $20(1+\frac{9}{10}+\frac{9^2}{10^2}+\frac{9^3}{10^3})$ |
| 5 | $20(1+\frac{9}{10}+\frac{9^2}{10^2}+\frac{9^3}{10^3}+\frac{9^4}{10^4})$ |
| 6 | $20(1+\frac{9}{10}+\frac{9^2}{10^2}+\frac{9^3}{10^3}+\frac{9^4}{10^4}+\frac{9^5}{10^5})$ |

luego la altura con 6 colchones es

$$\begin{aligned} 20\left(\frac{1-\frac{9^6}{10^6}}{1-\frac{9}{10}}\right) &= 20\left(\frac{10^6-9^6}{10^5}\right) \\ &= 2\left(\frac{10^6-9^6}{10^4}\right) \\ &\simeq 94 \end{aligned}$$

**Solución al problema 97.** La respuesta es (c).

Tenemos que $m - 2n = m - 2n + 2m - n - 3 = 3(m - n - 1)$.

**Solución al problema 98.** La respuesta es (b).

A la vista tenemos 5 triángulos que forman la base del triángulo grande y con 4 que están volteados formamos el trapecio, en el segundo trapecio tendremos 4 y 3, después 3 y 2, luego 2 y 1 y por último 1 para formar el pico de arriba del triángulo, por lo tanto, tenemos un total de 25.

**Solución al problema 99.** La respuesta es (a).

Por hipótesis

$$\begin{aligned} a &> b && (1)\\ e-a &= d-b && (2)\\ c-d &< b-a && (3)\\ a+b &= c+d && (4) \end{aligned}$$

De donde

$$\begin{array}{rcll} c-d & < & b-a & \text{por (3)} \\ c-d+a+b & < & b-a+a+b & \\ c-d+c+d & < & b-a+a+b & \text{por (4)} \\ 2c & < & 2b & \\ c & < & b & \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcll} c-d & < & b-a & \text{por (3)} \\ c-d+a+b & < & b-a+a+b & \\ c-d+a+b & < & b-a+c+d & \text{por (4)} \\ -d+a & < & -a+d & \\ 2a & < & 2d & \\ a & < & d & \end{array}$$

Además

$$\begin{array}{rcll} a & > & b & \text{por (1)} \\ a+e-a & > & b+d-b & \text{por (2)} \\ e & > & d & \end{array}$$

Por lo tanto $e > d > a > b > c$.

**Solución al problema 100.** La respuesta es (c).

Llamemos $p$ a la cantidad inicial de pasto, $q$ a la cantidad de pasto que crece diario y $v$ al número de vacas que se necesitan para terminar el pasto en 96 días.

Tenemos de acuerdo a los datos

$$\begin{array}{rcll} 70 \cdot 24 & = & p+24q & (1) \\ 30 \cdot 60 & = & p+60q & (2) \\ 96v & = & p+96q & (3) \end{array}$$

Al restar de la ecuación (2) la (1), obtenemos que $36q = 1800 - 1680 = 120$, luego $q = \frac{10}{3}$.

Usando este valor de $q$ en (2) tenemos que $1800 = p + 60\frac{10}{3}$, así $p = 1600$. Finalmente al sustituir $p = 1600$ y $q = \frac{10}{3}$ en la ecuación (3) tenemos que

$$96v = 1600 + 96\frac{10}{3} = 1920,$$

por lo que $v = 20$.

De donde
$$\begin{array}{rcll} c-d & < & b-a & \text{por (3)} \\ c-d+a+b & < & b-a+a+b & \\ c-d+c+d & < & b-a+a+b & \text{por (4)} \\ 2c & < & 2b & \\ c & < & b & \end{array}$$
y
$$\begin{array}{rcll} c-d & < & b-a & \text{por (3)} \\ c-d+a+b & < & b-a+a+b & \\ c-d+a+b & < & b-a+c+d & \text{por (4)} \\ -d+a & < & -a+d & \\ 2a & < & 2d & \\ a & < & d & \end{array}$$
Además
$$\begin{array}{rcll} a & > & b & \text{por (1)} \\ a+e-a & > & b+d-b & \text{por (2)} \\ e & > & d & \end{array}$$
Por lo tanto $e > d > a > b > c$.

**Solución al problema 100.** La respuesta es (c).

Llamemos $p$ a la cantidad inicial de pasto, $q$ a la cantidad de pasto que crece diario y $v$ al número de vacas que se necesitan para terminar el pasto en 96 días.

Tenemos de acuerdo a los datos
$$\begin{array}{rcll} 70\cdot 24 & = & p+24q & (1) \\ 30\cdot 60 & = & p+60q & (2) \\ 96v & = & p+96q & (3) \end{array}$$

Al restar de la ecuación (2) la (1), obtenemos que $36q = 1800 - 1680 = 120$, luego $q = \frac{10}{3}$.

Usando este valor de $q$ en (2) tenemos que $1800 = p + 60\frac{10}{3}$, así $p = 1600$. Finalmente al sustituir $p = 1600$ y $q = \frac{10}{3}$ en la ecuación (3) tenemos que
$$96v = 1600 + 96\frac{10}{3} = 1920,$$
por lo que $v = 20$.

**Concentrado de respuestas.**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.– | (*d*) | 26.– | (*c*) | 51.– | (*b*) | 76.– | (*d*) |
| 2.– | (*a*) | 27.– | (*c*) | 52.– | (*c*) | 77.– | (*d*) |
| 3.– | (*c*) | 28.– | (*d*) | 53.– | (*c*) | 78.– | (*a*) |
| 4.– | (*b*) | 29.– | (*c*) | 54.– | (*d*) | 79.– | (*b*) |
| 5.– | (*a*) | 30.– | (*b*) | 55.– | (*d*) | 80.– | (*c*) |
| 6.– | (*b*) | 31.– | (*b*) | 56.– | (*a*) | 81.– | (*b*) |
| 7.– | (*d*) | 32.– | (*b*) | 57.– | (*d*) | 82.– | (*b*) |
| 8.– | (*c*) | 33.– | (*b*) | 58.– | (*a*) | 83.– | (*d*) |
| 9.– | (*d*) | 34.– | (*d*) | 59.– | (*d*) | 84.– | (*c*) |
| 10.– | (*b*) | 35.– | (*c*) | 60.– | (*c*) | 85.– | (*b*) |
| 11.– | (*a*) | 36.– | (*b*) | 61.– | (*a*) | 86.– | (*d*) |
| 12.– | (*b*) | 37.– | (*b*) | 62.– | (*c*) | 87.– | (*b*) |
| 13.– | (*a*) | 38.– | (*c*) | 63.– | (*d*) | 88.– | (*d*) |
| 14.– | (*c*) | 39.– | (*d*) | 64.– | (*c*) | 89.– | (*a*) |
| 15.– | (*c*) | 40.– | (*d*) | 65.– | (*a*) | 90.– | (*b*) |
| 16.– | (*d*) | 41.– | (*a*) | 66.– | (*c*) | 91.– | (*b*) |
| 17.– | (*c*) | 42.– | (*b*) | 67.– | (*a*) | 92.– | (*b*) |
| 18.– | (*a*) | 43.– | (*b*) | 68.– | (*c*) | 93.– | (*b*) |
| 19.– | (*a*) | 44.– | (*b*) | 69.– | (*b*) | 94.– | (*d*) |
| 20.– | (*a*) | 45.– | (*a*) | 70.– | (*d*) | 95.– | (*b*) |
| 21.– | (*c*) | 46.– | (*c*) | 71.– | (*a*) | 96.– | (*c*) |
| 22.– | (*d*) | 47.– | (*c*) | 72.– | (*d*) | 97.– | (*c*) |
| 23.– | (*c*) | 48.– | (*c*) | 73.– | (*b*) | 98.– | (*b*) |
| 24.– | (*c*) | 49.– | (*c*) | 74.– | (*d*) | 99.– | (*a*) |
| 25.– | (*a*) | 50.– | (*c*) | 75.– | (*c*) | 100.– | (*c*) |