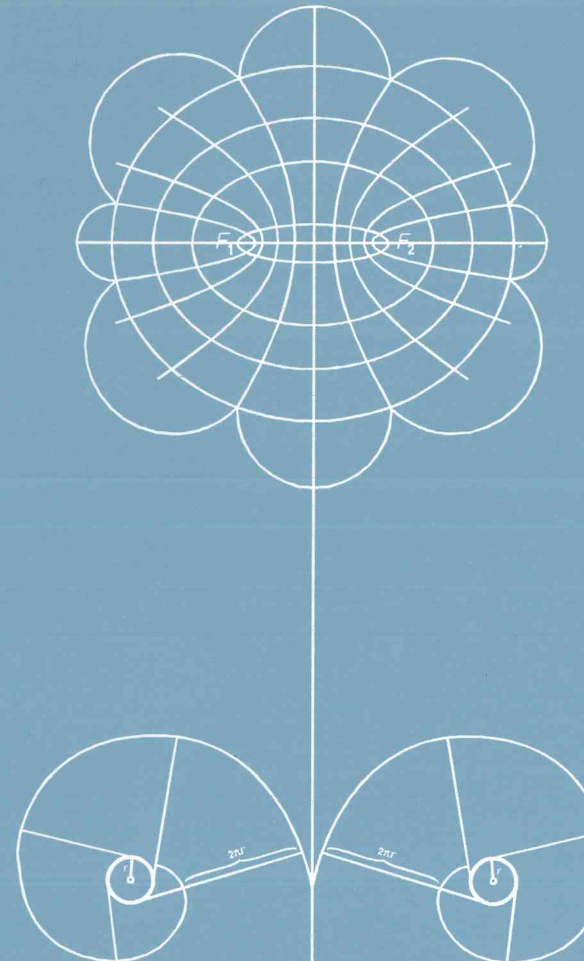
PROBLEMAS PARA LA 14a.

Olimpiada Mexicana de MATEMATICAS



2000

SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

Problemas para la
14^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Omar Antolín
Radmila Bulajich
José Antonio Gómez
Rita Vázquez

2000

Omar Antolín Camarena
Estudiante de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

Radmila Bulajich Manfrino
Profesor-Investigador de la Facultad de Ciencias de la UAEM.

José Antonio Gómez Ortega
Profesor Titular de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

Rita Vázquez Padilla
Estudiante de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

Contenido

Presentación 1

- Etapas de la Olimpiada 2
- Resumen de Resultados 3

Enunciados de los Problemas 5

- Problemas de Concursos Estatales 5
- Problemas de Concursos Nacionales de la OMM 13
- Problemas de Olimpiadas donde participa México . . . 16
  - XI Olimpiada de la Cuenca del Pacífico 16
  - I Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe 17
  - XIV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas 18
  - XL Olimpiada Internacional de Matemáticas . . . 19

Soluciones de los Problemas 21

- Soluciones a los Problemas de Concursos Estatales . . . 21
- Soluciones a los Problemas de Concursos Nacionales . . 46

Bibliografía 59

Presentación

La Sociedad Matemática Mexicana organiza la 14a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los ganadores en ella formarán las selecciones que participarán en la XLII Olimpiada Internacional de Matemáticas por celebrarse durante el mes de julio del año 2001 en Estados Unidos de Norteamérica, en la XVI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se realizará en septiembre del mismo año en El Salvador y en la III Olimpiada Matemática de Centroamerica y del Caribe que se celebrará en Puerto Rico en el mes de julio.

En la 14a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas pueden participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1981. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución pre-universitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2000-2001 y para el 21 de julio del año 2001 no deberán haber iniciado estudios de nivel universitario.

Los problemas que aparecen en este folleto, aparecieron en concursos de las diferentes etapas de las olimpiadas de matemáticas. La intención del folleto es que sirva como orientación a los alumnos que desean participar en estas olimpiadas. Como se puede ver, los problemas que aparecen aquí, no son ejrcicios rutinarios o en los que se apliquen directamente los conocimientos que se adquieren en la escuela. Más bien son problemas que requieren de una buena dosis de ingenio y de esfuerzo para ser resueltos. Como en todos los aspectos del aprendizaje de las matemáticas, el esfuerzo individual y el enfrentamiento solitario con los problemas son importantes, pero también es muy importante la discusión con los compañeros y los profesores.

Una forma de manifestar creatividad en matemáticas es resolviendo problemas. Otra forma, que a veces requiere de más madurez, es inventando problemas. Invitamos a todos los lectores de este folleto: profesores, estudiantes, olímpicos y exolímpicos a que nos envíen problemas con solución. Las aportaciones serán consideradas para su inclusión en exámenes o en futuros folletos.

Este folleto incluye problemas de los exámenes estatales de: Aguascalientes, Baja California, Campeche, Coahuila, Chihuahua, Distrito Federal, Estado de México, Guanajuato, Hidalgo, Jalisco, Michoacán, Morelos, Nuevo León, Querétaro, San Luis Potosí, Sonora, Tabasco, Veracruz, Yucatán y Zacatecas.

Etapas de la Olimpiada

Como ya es tradición, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas consta de tres etapas:

Exámenes Estatales. Estos exámenes servirán para formar las selecciones estatales que asistirán al Concurso Nacional.

Concurso Nacional. Este concurso se llevará a cabo en la Ciudad de Pátzcuaro, Michoacán, del 12 al 17 de noviembre de 2000. En él se elegirá a la preselección mexicana.

Entrenamientos. A los alumnos de la preselección que surjan del Concurso Nacional se les entrenará intensivamente durante el primer semestre del año 2001, también se les aplicarán exámenes para determinar a los que representarán a México en las olimpiadas internacionales.

La participación en las tres etapas mencionadas es **individual**.

Resumen de Resultados

Desde 1987, año en que la Sociedad Matemática Mexicana organizó la primera olimpiada, los resultados han sido los siguientes:

OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMATICAS

Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1988	Australia	49	37
1989	Rep. Fed. de Alemania	50	31
1990	Rep. Popular de China	54	36
1991	Suecia	55	35
1992	Rusia	56	49
1993	Turquía	73	63
1994	Hong Kong	69	65
1995	Canadá	74	59
1996	India	75	53
1997	Argentina	82	32
1998	Taiwán	75	44
1999	Rumania	81	52

OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICAS

Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1989	Cuba	13	3
1990	España	15	3
1991	Argentina	16	5
1992	Venezuela	16	6
1993	México	16	9
1994	Brasil	16	6
1995	Chile	18	9
1996	Costa Rica	17	2
1997	México	17	3
1998	República Dominicana	18	5
1999	Cuba	20	3

En total, en las olimpiadas internacionales se han obtenido dos medallas de plata, diez medallas de bronce y quince menciones honoríficas. En las olimpiadas iberoamericanas se han obtenido cinco medallas de oro, diecisiete medallas de plata, quince medallas de bronce y tres menciones honoríficas.

Resultados del Concurso Nacional de la 13a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Aguascalientes	64	Nayarit	11
Baja California	116	Nuevo León	97
Baja California Sur	37	Oaxaca	60
Campeche	50	Puebla	127
Coahuila	67	Querétaro	103
Colima	97	Quintana Roo	59
Chiapas	77	San Luis Potosí	79
Chihuahua	142	Sinaloa	68
Distrito Federal	179	Sonora	57
Estado de México	47	Tabasco	39
Guanajuato	122	Tamaulipas	87
Guerrero	55	Tlaxcala	10
Hidalgo	68	Veracruz	131
Jalisco	192	Yucatán	106
Michoacán	130	Zacatecas	55
Morelos	172		

Los números que aparecen en la lista anterior, son el total de puntos que obtuvo cada Estado representado por un equipo de seis alumnos, con excepción del Distrito Federal que participa con diez alumnos. En esta ocasión Campeche y Sinaloa participaron con un equipo de cuatro alumnos, Nayarit, Tabasco y Yucatán participaron con un equipo de cinco alumnos. Durango no participó.

COMITE ORGANIZADOR DE LA OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMATICAS

Febrero de 2000

Enunciados de los Problemas

Problemas de Concursos Estatales

Problema 1. Considere 109 enteros con $0 < a_1 < ... < a_{109} < 1999$. Muestre que entre los valores $d_i = a_{i+1} - a_i$, $i = 1, ..., 108$ hay un valor que se repite 4 o más veces.
Encuentre un ejemplo de enteros $0 < a_1 < ... < a_{109} \leq 1999$ donde ninguna diferencia $d_i = a_{i+1} - a_i$ se repita más de 3 veces.

Problema 2. Sean $a_1, a_2, ..., a_n$ enteros con las propiedades:
(i) $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = n$
(ii) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$
Muestre que 4 divide a n.

Problema 3. Un número de tres cifras es "equilibrado" si una de sus cifras es el promedio de las otras dos, por ejemplo el 258 es equilibrado pues $5 = \frac{2+8}{2}$. ¿Cuántos números equilibrados de tres cifras hay?

Problema 4. Si intentamos cubrir una cuadrícula de 5×5 con piezas de tamaño 2×1, siempre nos quedará un hueco. ¿En que sitios de la cuadrícula puede quedar el hueco?

Problema 5. ¿Para qué enteros positivos n es posible dividir un triángulo equilátero de lado n en trapecios iguales cuyos lados midan 1, 1, 1 y 2?

Problema 6. Sea $ABCD$ un cuadrado de lado 1 y sean E, F, G, H puntos sobre los lados AB, BC, CD, DA respectivamente. Muestre que el perímetro del cuadrilátero $EFGH$ es mayor o igual a $2\sqrt{2}$.

Problema 7. Diga para que valores de n, la suma $1! + 2! + \cdots + n!$ no termina en 3.

Problema 8. Un icosaedro es un sólido regular de 20 caras, cada una de las cuales es un triángulo equilátero. ¿Cuántas diagonales tiene un icosaedro?

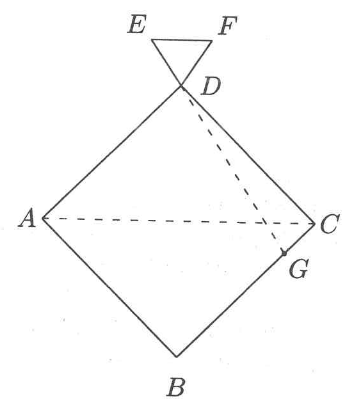
Problema 9. Un hombre distribuyó dinero entre sus hijos de la siguiente manera: al menor le dió 1000 más $\frac{1}{10}$ de lo que restaba, luego dió al segundo 2000 más $\frac{1}{10}$ del restante, al tercero le dió 3000 más $\frac{1}{10}$ de lo que en ese momento quedaba y así sucesivamente hasta llegar al último hijo. Al final cada hijo recibió la misma cantidad de dinero. ¿Cuántos hijos tiene el hombre y cuánto dinero repartió?

Problema 10. Utilizando exclusivamente los dígitos 2 y a se forma el siguiente número de 90 cifras.

$$2a22a222a2222a....22...2a.$$

Si el número es múltiplo de 9, ¿qué valores son posibles para el dígito a?

Problema 11. En la siguiente figura, $ABCD$ es un cuadrado y DEF un triángulo equilátero con AC paralela a EF. Si DG es la prolongación de DE, determine el valor del ángulo DGC.

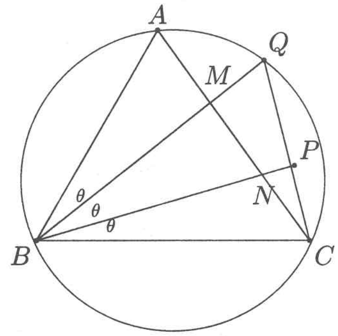


Problema 12. Encuentre todos los enteros positivos a, b tales que:

$$\frac{a+b^{-1}}{a^{-1}+b} = 13 \quad \text{y} \quad a+b \leq 80.$$

Problema 13. Considerando la figura siguiente muestre que:

$$\frac{AM}{AN} + \frac{CP}{CQ} = 1$$



Problema 14. En una cárcel hay 10 reos condenados a muerte a los que se les va a dar una última oportunidad para salvarse: se pondrán los 10 en una fila y a cada uno le pondrán un sombrero, ya sea blanco o negro. Cada reo sólo podrá ver el color de los sombreros de sus compañeros de adelante (no podrá ver el suyo ni ninguno de los de atrás). Se les irá preguntando, de uno en uno, empezando por el último de la fila y en orden hasta terminar con el primero: "¿Cuál cree que es el color de su sombrero?". Si un reo atina a su color le salvan la vida, si no lo matan. ¿Cómo le pueden hacer los reos para ponerse de acuerdo de tal forma que se salven al menos 9 reos?

Problema 15. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, las líneas BD y AC se cortan en el punto P. Si O es el circuncentro del triángulo APB y H es el ortocentro del triángulo CPD, demuestre que O, P y H están alineados.

Problema 16. Cada integrante de un grupo de 10 niños es amigo de exactamente 7 del grupo (la amistad es mutua). Pruebe que no es posible dividirlos en 3 equipos de tal manera que en cada uno de los 3 equipos no haya un par de amigos.

Problema 17. ¿De cuántas formas distintas se puede llenar una cuadrícula de 4×4 con fichas de 2×1?

Problema 18. Si $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son las medidas (en radianes y en orden cíclico) de los ángulos internos de un cuadrilátero, muestre que éste es cíclico si y sólo si $(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \pi^2$.

Problema 8. Un icosaedro es un sólido regular de 20 caras, cada una de las cuales es un triángulo equilátero. ¿Cuántas diagonales tiene un icosaedro?

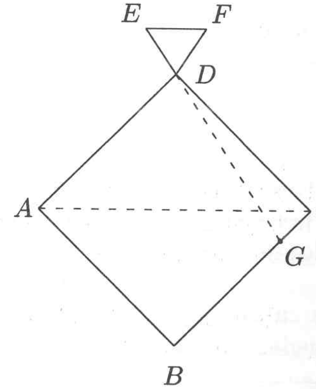
Problema 9. Un hombre distribuyó dinero entre sus hijos de la siguiente manera: al menor le dió 1000 más $\frac{1}{10}$ de lo que restaba, luego dió al segundo 2000 más $\frac{1}{10}$ del restante, al tercero le dió 3000 más $\frac{1}{10}$ de lo que en ese momento quedaba y así sucesivamente hasta llegar al último hijo. Al final cada hijo recibió la misma cantidad de dinero. ¿Cuántos hijos tiene el hombre y cuánto dinero repartió?

Problema 10. Utilizando exclusivamente los dígitos 2 y a se forma el siguiente número de 90 cifras.

$$2a22a222a2222a....22...2a.$$

Si el número es múltiplo de 9, ¿qué valores son posibles para el dígito a?

Problema 11. En la siguiente figura, $ABCD$ es un cuadrado y DEF un triángulo equilátero con AC paralela a EF. Si DG es la prolongación de DE, determine el valor del ángulo DGC.

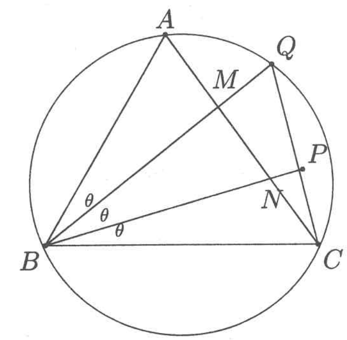


Problema 12. Encuentre todos los enteros positivos a, b tales que:

$$\frac{a+b^{-1}}{a^{-1}+b} = 13 \quad \text{y} \quad a+b \leq 80.$$

Problema 13. Considerando la figura siguiente muestre que:

$$\frac{AM}{AN} + \frac{CP}{CQ} = 1$$



Problema 14. En una cárcel hay 10 reos condenados a muerte a los que se les va a dar una última oportunidad para salvarse: se pondrán los 10 en una fila y a cada uno le pondrán un sombrero, ya sea blanco o negro. Cada reo sólo podrá ver el color de los sombreros de sus compañeros de adelante (no podrá ver el suyo ni ninguno de los de atrás). Se les irá preguntando, de uno en uno, empezando por el último de la fila y en orden hasta terminar con el primero: "¿Cuál cree que es el color de su sombrero?". Si un reo atina a su color le salvan la vida, si no lo matan. ¿Cómo le pueden hacer los reos para ponerse de acuerdo de tal forma que se salven al menos 9 reos?

Problema 15. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, las líneas BD y AC se cortan en el punto P. Si O es el circuncentro del triángulo APB y H es el ortocentro del triángulo CPD, demuestre que O, P y H están alineados.

Problema 16. Cada integrante de un grupo de 10 niños es amigo de exactamente 7 del grupo (la amistad es mutua). Pruebe que no es posible dividirlos en 3 equipos de tal manera que en cada uno de los 3 equipos no haya un par de amigos.

Problema 17. ¿De cuántas formas distintas se puede llenar una cuadrícula de 4×4 con fichas de 2×1?

Problema 18. Si $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son las medidas (en radianes y en orden cíclico) de los ángulos internos de un cuadrilátero, muestre que éste es cíclico si y sólo si $(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \pi^2$.

Problema 19. En un triángulo isósceles ABC con $AB = AC$ se toman D, E y F puntos sobre los lados BC, CA y AB de manera que el triángulo DEF es equilátero, si $a = \measuredangle BDF$, $b = \measuredangle EFA$ y $c = \measuredangle DEC$, muestre que $a = \frac{b+c}{2}$.

Problema 20. El conjunto $\{1, 2, ..., n\}$ se colorea de rojo y negro, de manera que 1 y n reciban diferente color. Muestre que el número de parejas de enteros consecutivos con diferente color es impar.

Problema 21. Una cuadrícula de 8×8 se cubre con 32 dominos de 2×1. Demuestre que al menos existen dos dominos que forman un cuadrado de 2×2.

Problema 22. ¿Para qué enteros positivos j es $2^2 + 2^5 + 2^j$ un cuadrado perfecto?

Problema 23. ¿Cuántos paralelepípedos rectangulares distintos se pueden construir, para los cuales la longitud de cada arista es un entero del 1 al 10?.

Problema 24. Seis circunferencias tienen un punto en común. Muestre que hay una de ellas que contiene al centro de otra de las circunferencias.

Problema 25. Encuentre las soluciones enteras positivas del sistema:

$$\begin{aligned} w + x &= yz \\ y + z &= wx. \end{aligned}$$

Problema 26. ¿Será posible numerar las 4 caras, los 4 vértices y las 6 aristas de un tetraedro (es decir, asignarles un número entero del 1 al 14), de tal manera que el número asignado a una arista sea igual al promedio de los números asignados a los vértices que la determinan, e igual al promedio de los números asignados a las caras que la comparten?

Problema 27. Encuentre una lista de cinco primos diferentes donde la diferencia entre cualesquiera dos términos consecutivos de la lista sea siempre seis. Pruebe que esta lista es única.

Problema 28. En el triángulo ABC, BD' y BE' trisectan al ángulo B, y CD'' y CE'' trisectan al ángulo C. Sean D y E las intersecciones de BD' con CD'' y de BE' con CE'' respectivamente, con E el punto más cercano al lado BC. Pruebe que los ángulos BDE y EDC son iguales.

Problema 29. Sea ABC un triángulo escaleno de área 1999. Sea A_1 un punto del lado BC y sean B_1 y C_1 puntos sobre las rectas AC y AB respectivamente, tales que AA_1, BB_1 y CC_1 son paralelas. Encuentre el área del triángulo $A_1B_1C_1$.

Problema 30. Tenemos un triángulo equilátero ABC en el espacio, cuyos vértices tienen las siguientes coordenadas enteras: $(12, 0, 0)$, $(0, 12, 0)$ y $(0, 0, 12)$ respectivamente. Se cortan las esquinas del triángulo de manera que la figura resultante sea un hexágono regular.
i) Determine el número de puntos que pertenecen al área del hexágono regular y que tienen coordenadas enteras.
ii) Resuelve el problema para el triángulo de vértices $(n, 0, 0)$, $(0, n, 0)$ y $(0, 0, n)$ donde n es un número entero.

Problema 31. Dados 19 puntos en un círculo se trazan todos los posibles segmentos con extremos dados por los puntos. Si en el interior del círculo no hay puntos donde se intersecten 3 segmentos, ¿cuántos puntos de intersección de segmentos hay?

Problema 32. Sea $S(x) = \lfloor \frac{x}{19} \rfloor + \lfloor \frac{2x}{19} \rfloor + \cdots + \lfloor \frac{18x}{19} \rfloor$
(a) Demuestre que si x es entero entonces 9 divide a $S(x)$.
(b) Si x es un número real con $0 \leq x \leq 19$, ¿cuántos posibles valores tiene $S(x)$?

Problema 33. (a) Pruebe que para todo entero positivo n existen tres enteros a, b, c tales que $n = a^2 + b^2 - c^2$.
(b) Pruebe que a lo más para 1699 enteros positivos n, $n < 1999$, existen enteros a, b, c tales que $n = a^2 + b^2 + c^2$.

Problema 34. Desde un punto D sobre la hipotenusa BC de un triángulo rectángulo ABC, se trazan perpendiculares DE y DF a los lados CA y AB respectivamente. Determine el punto D para el cual EF tiene longitud mínima.

Problema 35. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico de diagonales perpendiculares que se cortan en P. Sea l la línea que pasa por P y es perpendicular al lado AB. Demuestre que l pasa por el punto medio del lado CD.

Problema 36. En el plano se marcan $a + b$ puntos; a de ellos se designan con la letra A y los otros b puntos se designan con la letra B. Al unir los puntos consecutivos se forma un polígono de $a + b$ lados. Sobre cada uno de los lados hacemos lo siguiente: si los dos vértices del lado están denotados por letras A, escribimos el número 2; si los dos vértices del lado están denotados por letras B, escribimos el número $\frac{1}{2}$; si los dos vértices del lado están denotados por letras diferentes, escribimos el número 1. ¿Cuál es el producto de todos los números escritos?

Problema 37. A una cantina llegan tres franceses, tres americanos y tres mexicanos, se desean sentar en una mesa circular de tal forma que no queden dos personas de la misma nacionalidad juntas. ¿De cuántas formas pueden estar sentados?

Problema 38. ¿Cuáles son las soluciones enteras de la ecuación $x^3+y^3+z^3 = 20002$?

Problema 39. Sea ABC un triángulo, D y E los pies de las alturas desde A y B repectivamente. Sean M en la prolongación de BE tal que $EM = AD$ y N la intersección de la prolongación BC con la perpendicular a BM por M. Demuestre que el triángulo NCA es isósceles.

Problema 40. Se tienen 5 ciudades. Se quieren construir vías de ferrocarril entre pares de ellas de tal forma que no se intersecten. ¿Cuál es el máximo número de vías que pueden construirse con estas características?

Problema 41. La circunferencia γ tiene radio 5 y dos cuerdas, AB y CD, que no se intersectan ni son paralelas. AB tiene longitud 8 y CD mide 6. Sean M el punto medio de AB y Q la intersección dentro de γ de DB y AC. Pruebe que QM es perpendicular a DC.

Problema 42. Sea AL la bisectriz del ángulo A de un triángulo acutángulo ABC. Sean M y N sobre los lados AB y AC respectivamente, de manera que $\measuredangle MLA = \measuredangle B$ y $\measuredangle NLA = \measuredangle C$. Si D es el punto de intersección de AL y MN, muestre que $AL^3 = AB \cdot AC \cdot AD$.

Problema 43. Sean $ABCD$ un cuadrado de lado 1, P, Q puntos sobre los lados BC y CD con $\measuredangle PAQ = 45°$ y E, F los puntos de intersección de PQ con AB y AD respectivamente.
(a) Muestre que PQ es tangente a la circunferencia de centro A y radio 1.
(b) Muestre que $AE + AF \geq 2\sqrt{2}$.

Problema 44. Sean ABC un triángulo y L, M, N los puntos medios de los lados BC, CA, AB respectivamente. Muestre que $\measuredangle LAC = \measuredangle MBA$ si y sólo si $\measuredangle CNA = \measuredangle ALB$.

Problema 45. Si a, b y c son números positivos con $a + b + c = 2$, muestre que:

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq 1.$$

Problema 46. Considere un triángulo rectángulo ABC, y llame P, Q, R, a las reflexiones de A, B, C sobre BC, CA, AB respectivamente. Calcule la razón del área del triángulo ABC entre el área del triángulo PQR.

Problema 47. Un trapecio inscrito en una circunferencia de radio r tiene tres lados de longitud s y el cuarto de longitud $r+s$, con $s<r$. Encuentre las medidas de los ángulos del trapecio.

Problema 48. Dentro de un hexágono regular $ABCDEF$ se coloca un punto G arbitrario y se trazan segmentos que lo unen con los vértices, se forman así 6 triángulos (ABG, BCG, CDG, DEG, EFG, FAG) los cuales se colorean de rojo y azul en forma alternada. Demuestre que el área azul es igual al área roja.

Problema 49. 20 niños se sientan formando un círculo. Se numeran del 1 al 20 en el sentido de las manecillas del reloj. Su maestra Malú les reparte dulces en 20 pasos. En el paso k reparte un dulce al niño k, salta $k-1$ niños y vuelve a dar otro dulce, salta otros $k-1$ niños y da otro dulce, así sucesivamente hasta regresar con el niño k (a éste no le vuelve a dar dulce). ¿Cuáles niños tienen más dulces después de los 20 pasos? ¿Cuántos dulces tienen estos niños? ¿Cuál es la segunda cantidad mayor de dulces que tiene un niño?

Problema 50. Este es un juego para dos jugadores que se juega en un tablero cuadrado cuadriculado que tiene un número impar de filas y columnas. El juego empieza en la esquina inferior izquierda, donde el primer jugador pone su marca. Los jugadores alternan su jugada. En su turno cada jugador puede poner su marca en una de las casillas contiguas ya sea directamente encima, directamente a la derecha o diagonalmente encima y a la derecha de la última marca puesta por su oponente. El juego continúa de esta forma y gana el jugador que consiga poner su marca en la casilla ubicada en la esquina superior derecha del tablero. Encuentre una estrategia que permita al primer jugador ganar siempre el juego.

Problema 51. ¿Por qué cada vez que tomamos diez números consecutivos existe uno que es primo relativo con cada uno de los otros nueve?

Problema 52. En el triángulo equilátero ABC, una recta paralela al lado AC intersecta a AB en M y a BC en P. Si D es el incentro del triángulo BMP y E es el punto medio de AP, determine los ángulos del triángulo CDE.

Problema 53. Determine todos los números enteros n para los cuales $2n^3-1$ es múltiplo de 1999.

Problema 54. El Comité Organizador de la Olimpiada Estatal de Matemáticas está integrado por 11 miembros. Los materiales y exámenes se guardan en una caja fuerte que tiene varias cerraduras. A cada miembro del comité se le entregan llaves de algunas de las cerraduras. ¿Cuál es el mínimo número de cerraduras necesarias para que haya alguna forma de repartir llaves a los miembros del comité de modo que cada vez que se reunan 5 o menos miembros del comité no puedan abrir la caja fuerte, pero cada vez que se reunan 6 o más sí?

Problema 55. En cada subconjunto de 7 elementos del conjunto {1,2,...,10} se toma el mayor. ¿Cuál es la suma de todos esos elementos mayores?

Problema 56. Sea A un subconjunto de $N = \{1, 2, ..., n\}$ y arreglemos sus en orden decreciente de magnitud. Formemos las sumas S sumando y restando alternadamente elementos consecutivos del subconjunto A (el primer elemento de la suma siempre es positivo). ¿Cuál es la suma de todas las sumas S generadas por los distintos subconjuntos de N?

Problema 57. Considere una cuadrícula de 5×5 cuadritos que se llena con los números del 1 al 25 de la siguiente forma:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

En cada renglón y en cada columna se les cambia el signo a 2 números, de forma tal que en cada columna y en cada renglón hay 3 números positivos y 2 negativos. Sume todos los números de la nueva cuadrícula. Calcule las posibles sumas.

Problema 58. Tiene una cuadrícula de 4×4 y quiere llegar del cuadrito inferior izquierdo al superior derecho. Si solamente puede ir hacia arriba, hacia la derecha y en diagonal hacia arriba y a la derecha, ¿de cuántas formas lo puede hacer?

Problema 59. Demuestre que entre 11 números de la forma $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$ (con α, β, γ enteros no negativos) hay 4 de ellos cuyo producto es un cuadrado perfecto.

Problema 60. Si $ABCDEFG$ es un heptágono regular, muestre que

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

Problemas de Concursos Nacionales de la OMM

Problema 61 (11a. OMM). Encuentre todos los números primos positivos p tales que $8p^4 - 3003$ también sea un primo positivo.

Problema 62 (11a. OMM). En un triángulo ABC sean P y P' sobre el segmento BC, Q sobre el segmento CA y R sobre el segmento AB, de tal forma que

$$\frac{AR}{RB} = \frac{BP}{PC} = \frac{CQ}{QA} = \frac{CP'}{P'B}$$

Sea G el centroide del triángulo ABC y sea K el punto de intersección de las rectas AP' y RQ. Demuestre que los puntos P, G y K son colineales.

Problema 63 (11a. OMM). En una cuadrícula de 4×4 se van a colocar los números enteros del 1 al 16 (uno en cada cuadrito).
(i) Pruebe que es posible colocarlos de tal manera que los números que aparezcan en cuadritos que comparten un lado tengan diferencia menor o igual que 4.
(ii) Pruebe que no es posible colocarlos de tal manera que los números que aparezcan en cuadritos que comparten un lado tengan diferencia menor o igual que 3.

Problema 64 (11a. OMM). Dados 3 puntos no alineados en el espacio, al único plano que los contiene le llamamos *plano determinado* por los puntos. ¿Cuál es el mínimo número de planos determinados por 6 puntos en el espacio si no hay 3 alineados y no están los 6 en un mismo plano?

Problema 65 (11a. OMM). Sean P, Q y R puntos sobre los lados de un triángulo ABC con P en el segmento BC, Q en el segmento AC y R en el segmento BA, de tal manera que si A' es la intersección de BQ con CR, B' es la intersección de AP con CR, y C' es la intersección de AP con BQ, entonces $AB' = B'C'$, $BC' = C'A'$ y $CA' = A'B'$. Calcule el cociente del área del triángulo PQR entre el área del triángulo ABC.

Problema 66 (11a. OMM). Pruebe que el número 1 se puede escribir de una infinidad de maneras distintas en la forma

$$1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n},$$

donde n y $a_1, a_2, ..., a_n$ son enteros positivos y $5 < a_1 < a_2 < ... < a_n$.

Problema 67 (12a. OMM). Un número es *suertudo* si al sumar los cuadrados de sus cifras y repetir esta operación suficientes veces obtenemos el número 1. Por ejemplo 1900 es suertudo, ya que: $1900 \to 82 \to 68 \to 100 \to 1$.
Encuentre una infinidad de parejas de enteros consecutivos, donde ambos números sean suertudos.

Problema 68 (12a. OMM). Dos rayos l y m parten de un mismo punto, formando un ángulo α, y sea P un punto en l. Para cada circunferencia $\mathcal{C}$ tangente a l en P que corte a m en puntos Q y R, sea T el punto donde la bisectriz del ángulo QPR corta a $\mathcal{C}$. Describe la figura geométrica que forman los puntos T, justifica tu respuesta.

Problema 69 (12a. OMM). Cada uno de los lados y las diagonales de un octágono regular se pintan de rojo o de negro. Demuestre que hay al menos siete triángulos cuyos vértices son vértices del octágono y sus tres lados son del mismo color.

Problema 70 (12a. OMM). Encuentre todos los enteros que se escriben como

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \cdots + \frac{9}{a_9}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_9$ son dígitos distintos de cero que pueden repetirse.

Problema 71 (12a. OMM). Sean B y C dos puntos de una circunferencia, AB y AC las tangentes desde A. Sea Q un punto del segmento AC y P la intersección de BQ con la circunferencia. La paralela a AB por Q corta a BC en J. Demuestre que PJ es paralelo a AC si y sólo si $BC^2 = AC \cdot QC$.

Problema 72 (12a. OMM). Un plano en el espacio es *equidistante* a un conjunto de puntos si la distancia de cada punto al plano es la misma.
¿Cuál es el mayor número de planos equidistantes a 5 puntos de los cuales no hay 4 en un mismo plano?

Problema 73 (13a. OMM). Sobre una mesa se tienen 1999 fichas que son rojas de un lado y negras del otro (no se especifica cuántas con el lado rojo hacia arriba y cuántas con el lado negro hacia arriba).
Dos personas juegan alternadamente. Cada persona en su turno hace una de las siguientes dos cosas:
(a) Retirar cualquier número de fichas, con la condición de que todas las fichas retiradas tengan el mismo color hacia arriba.
(b) Voltear cualquier número de fichas, con la condición de que todas las fichas volteadas tengan el mismo color hacia arriba.

Gana el que toma la última ficha. ¿Cuál jugador puede asegurar que ganará, el primero en jugar o el segundo?

Problema 74 (13a. OMM). Demuestre que no existen 1999 primos en progresión aritmética todos ellos menores que 12345.

Nota: Una colección de números está en progresión aritmética si es de la forma:

$$a, a + r, a + 2r, a + 3r, \ldots, a + br.$$

Problema 75 (13a. OMM). Considere P un punto en el interior del triángulo ABC. Sean D, E y F los puntos medios de AP, BP y CP respectivamente y L, M y N los puntos de intersección de BF con CE, AF con CD y AE con BD.
(a) Muestre que el área del hexágono $DNELFM$ es igual a una tercera parte del área del triángulo ABC.
(b) Muestre que DL, EM y FN concurren.

Problema 76 (13a. OMM). En una cuadrícula de 8×8 se han escogido arbitrariamente 10 cuadritos y se han marcado los centros de éstos. El lado de cada cuadrito mide 1. Demuestre que existen al menos dos puntos marcados que están separados una distancia menor o igual que $\sqrt{2}$, o que existe al menos un punto marcado que se encuentra a una distancia $\frac{1}{2}$ de una orilla de la cuadrícula.

Problema 77 (13a. OMM). $ABCD$ es un trapecio con AB paralelo a CD. Las bisectrices exteriores de los ángulos B y C se intersectan en P. Las bisectrices exteriores de los ángulos A y D se intersectan en Q. Demuestre que la longitud de PQ es igual a la mitad del perímetro del trapecio $ABCD$.

Problema 78 (13a. OMM). Un polígono se dice que es ortogonal si todos sus lados tienen longitudes enteras y cada dos lados consecutivos son perpendiculares. Demuestre que si un polígono ortogonal puede cubrirse con rectángulos de 2×1 (sin que éstos se traslapen) entonces al menos uno de sus lados tiene longitud par.

Problemas de Olimpiadas donde participa México

XI Olimpiada de la Cuenca del Pacífico

Problema 1.
Encuentre el menor entero positivo n con la siguiente propiedad: no existe una progresión aritmética de 1999 términos de números reales conteniendo exactamente n enteros.

Problema 2.
Sea $a_1, a_2, \ldots$ una sucesión de números reales que satisfacen $a_{i+j} \leq a_i + a_j$ para todo $i, j = 1, 2, \ldots$. Pruebe que, para todo entero positivo n, se cumple:

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n} \geq a_n$$

Problema 3.
Sean Γ_1 y Γ_2 dos circunferencias que se intersecan en los puntos P y Q. La tangente común a Γ_1 y Γ_2, más cercana a P, toca a Γ_1 en A y a Γ_2 en B. La tangente de Γ_1 en P interseca a Γ_2 en C, siendo C diferente a P, y la prolongación de AP interseca a BC en R. Pruebe que la circunferencia circunscrita al triángulo PQR es tangente a BP y BR.

Problema 4.
Determine todos los pares (a, b) de números enteros tales que los números $a^2 + 4b$ y $b^2 + 4a$ son ambos cuadrados perfectos.

Problema 5.
Sea S un conjunto de $2n + 1$ puntos en el plano, tales que no existen tres de ellos colineales y no hay cuatro perteneciendo a la misma circunferencia. Un círculo se denomina *bueno* si tiene tres puntos de S en su circunferencia, $n - 1$ puntos de S en su interior y $n - 1$ puntos de S en su exterior. Pruebe que el número de círculos *buenos* tiene la misma paridad de n.

I Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

Problema 1.
Se supone que 5 personas conocen, cada una, informaciones parciales diferentes sobre cierto asunto. Cada vez que la persona A telefonea a la persona B, A le da a B la información que conoce en ese momento sobre el asunto, mientras que B no le dice a A nada de él. ¿Cuál es el mínimo número de llamadas necesarias para que todos sepan todo sobre el asunto? ¿Cuántas llamadas son necesarias si son n personas?

Problema 2.
Encuentre un entero positivo n de 1000 cifras, todas distintas de cero, con la siguiente propiedad: es posible agrupar las cifras de n en 500 parejas de tal manera que si multiplicamos las dos cifras de cada pareja y sumamos los 500 productos obtenemos como resultado un número m que es divisor de n.

Problema 3.
Las cifras de una calculadora (a excepción del 0) están dispuestas en la forma indicada en el cuadro adjunto, donde aparece también la tecla "+":

7	8	9	
4	5	6	
1	2	3	+

Dos jugadores A y B juegan de la manera siguiente: A enciende la calculadora y pulsa una cifra, y a continuación pulsa la tecla +. Pasa la calculadora a B, que pulsa una cifra en la misma fila o columna que la pulsada por A que no sea la misma que la última pulsada por A; a continuación pulsa + y le devuelve la calculadora a A, que repite la operación y así sucesivamente. Pierde el juego el primer jugador que alcanza o supera la suma 31. ¿Cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y cuál es ésta?

Problema 4.
En el trapecio $ABCD$ de base AB y CD, sea M el punto medio del lado DA. Si $BC = a$, $MC = b$ y el ángulo MCB mide 150°. Halle el área del trapecio $ABCD$ en función de a y b.

Problema 5.
Sea a un entero positivo impar mayor que 17, tal que $3a - 2$ es un cuadrado perfecto. Demuestre que existen enteros positivos distintos b y c tales que $a + b, a + c, b + c$ y $a + b + c$ son cuatro cuadrados perfectos.

Problema 6.
Sea S un subconjunto de $\{1, 2, 3, ..., 1000\}$ con la propiedad de que ninguna suma de dos elementos diferentes en S esté en S. Encuentre el número máximo de elementos de S.

XIV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Problema 1.
Halle todos los enteros positivos que son menores que 1000 y cumplen con la siguiente condición: el cubo de la suma de sus dígitos es igual al cuadrado de dicho entero.

Problema 2.
Dadas dos circunferencias M y N, decimos que M biseca a N si la cuerda común es un diámetro de N.
Considere dos circunferencias fijas C_1 y C_2 no concéntricas.
a) Pruebe que existen infinitas circunferencias B tales que B biseca a C_1 y B biseca a C_2.
b) Determine el lugar geométrico de los centros de las circunferencias B.

Problema 3.
Sean n puntos distintos, P_1, P_2,...,P_n, sobre una recta del plano ($n \geq 2$). Se consideran las circunferencias de diámetro $P_iP_j (1 \leq i < j \leq n)$ y coloreamos cada circunferencia con uno de k colores dados. Llamamos (n, k)-nube a esta configuración. Para cada entero positivo k, determine todos los n para los cuales se verifica que toda (n, k)-nube contiene dos circunferencias tangentes exteriormente del mismo color.
Nota: Para evitar ambigüedades, los puntos que pertenecen a más de una circunferencia no llevan color.

Problema 4.
Sea B un entero mayor que 10 tal que cada uno de sus dígitos pertenece al conjunto $\{1, 3, 7, 9\}$. Demuestre que B tiene un factor primo mayor o igual que 11.

Problema 5.
Un triángulo acutángulo ABC está inscrito en una circunferencia de centro O. Las alturas del triángulo son AD, BE y CF. La recta EF corta a la circunferencia en P y Q.
a) Pruebe que OA es perpendicular a PQ.
b) Si M es el punto medio de BC, pruebe que $AP^2 = 2 \cdot AD \cdot OM$

Problema 6.
Sean A y B puntos del plano y C un punto de la mediatriz de AB. Se construye una sucesión C_1, C_2,...,C_n,... de la siguiente manera:
$C_1 = C$ y para $n \geq 1$, si C_n no pertenece al segmento AB, C_{n+1} es el circuncentro del triángulo ABC_n.
Determine todos los puntos C tales que la sucesión C_1, C_2,...,C_n,... está definida para todo n y es periódica a partir de un cierto punto.
Nota: Una secesión $C_1, C_2, ..., C_n$,... es periódica a partir de un cierto punto si existen enteros positivos k y p tales que $C_{n+p} = C_n$ para todo $n \geq k$.

XL Olimpiada Internacional de Matemáticas

Problema 1.
Determine todos los conjuntos finitos S de puntos del plano que tienen por lo menos tres puntos y satisfacen la siguiente condición: para cualesquiera dos puntos distintos A y B de S, la mediatriz del segmento AB es un eje de simetría de S.

Problema 2.
Sea $n \geq 2$ un entero dado.
(a) Determine la menor constante C para la cual se verifica la desigualdad:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \left(x_i^2 + x_j^2\right) \leq C \left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \right)^4$$

para todos los números reales $x_1, ..., x_n \geq 0$.
(b) Para esta constante C, determine cuándo se verifica la igualdad.

Problema 3.
Se considera un tablero cuadrado de $n \times n$, donde n es un entero positivo par. El tablero se divide en n^2 cuadrados unitarios. Decimos que dos cuadrados distintos del tablero son adyacentes si tienen un lado común.
Se marcan N cuadrados unitarios del tablero de tal manera que cada cuadrado (marcado o sin marcar) es *adyacente* a por lo menos un cuadrado marcado. Determine el menor valor posible de N.

Problema 4.
Determine todas las parejas (n, p) de enteros positivos tales que p es primo, $n \leq 2p$, y $(p-1)^n + 1$ es divisible por n^{p-1}.

Problema 5.
Dos circunferencias Γ_1 y Γ_2 están dentro de la circunferencia Γ, y son tangentes a Γ en los puntos distintos M y N respectivamente. La circunferencia Γ_1 para por el centro de la circunferencia Γ_2. La recta que pasa por los dos puntos de intersección de Γ_1 y Γ_2 corta a Γ en los puntos A y B. Las rectas MA y MB cortan a Γ_1 en los puntos C y D respectivamente. Demuestre que CD es tangente a Γ_2.

Problema 6.
Determine todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Soluciones de los Problemas

Soluciones a los Problemas de Concursos Estatales

Solución al Problema 1.
(1) Sean $d_i = a_{i+1} - a_i$ las diferencias, $i = 1, ..., 108$. Por un lado tenemos que: $d_1 + d_2 + \cdots + d_{108} = a_{109} - a_1 \leq 1998 - 1 = 1997$.
Ahora, si $d'_1 \leq d'_2 \leq \cdots \leq d'_{108}$ son las diferencias ordenadas, como d'_1, d'_2, d'_3 son al menos 1; d'_4, d'_5, d'_6 son al menos 2;...; $d'_{106}, d'_{107}, d'_{108}$ son al menos 36, tenemos que: $d_1 + d_2 + \cdots + d_{108} = d'_1 + d'_2 + \cdots + d'_{108} \geq 3\,(1 + 2 + \cdots + 36) = 1998$, lo que da una contradicción.
(2) Considere: $a_1 = 1$ y $a_i = a_1 + d_1 + \cdots + d_{i-1}$, donde $d_1 = d_2 = d_3 = 1$, $d_4 = d_5 = d_6 = 2, ..., d_{106} = d_{107} = d_{108} = 36$.

Solución al Problema 2.
(a) Primero veamos que n es par. Si n fuera impar entonces cada a_i deberá ser impar, pero la suma de un número impar de impares no puede ser igual a cero. Luego n es par.
(b) Ahora veamos que n es múltiplo de 4. Si n fuera de la forma $n = 4m + 2 = 2(2m + 1)$, entonces alguna a_i es 2 y las restantes $n - 1$ son impares, luego, la suma de las a_i impares, es impar (pues $n - 1$ es impar) y si agregamos el 2 tenemos que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ es impar, luego, no podrá ser 0.
Por tanto n debe ser de la forma $4m$.

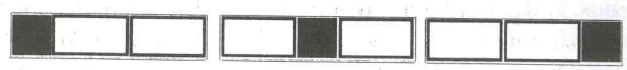
Solución al Problema 3. Hay 105. Primero observemos que: $111, 222, 333$, ..., 999 son equilibrados. Notemos también que si abc es un número equilibrado entonces también lo son: acb, bac, bca, cab y cba, además si dos cifras de un número equilibrado son iguales la tercera cifra es igual a estas, por lo que los números equilibrados de cifras diferentes aparecen de 6 en 6. Finalmente, hay que tener en cuenta que si abc es equilibrado con $c = \frac{a+b}{2}$ entonces a y b deben tener la misma paridad.

Construimos ahora los números equilibrados siguiendo un orden, primero los que tienen la primera cifra igual a 1, después cuando es 2, etc.

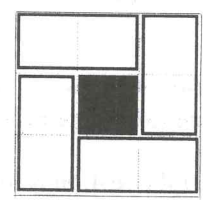
132, 153, 174, 195
243, 264, 285,
354, 375, 396,
465, 486,
576, 597,
687,
798.

Por la observación anterior estos 16 números equilibrados, generan a $16 \cdot 6 = 96$ números y con los 9 primeros, dan los 105 números equilibrados.

Solución al Problema 4. Coloreamos el tablero con dos colores: blanco y negro en forma alternada, de manera que queden 13 negros y 12 blancos. Como una pieza de 2×1 cubre un cuadro blanco y uno negro, al cubrir el tablero con 12 de estas piezas nos quedará sin cubrir un cuadro negro. Veamos que cualquiera de ellos puede quedar sin cubrir.
Dos renglones contiguos siempre se pueden cubrir, así el cuadrado de 4 renglones y 5 columnas que se obtiene al quitar el primer renglón se puede cubrir y en el primer renglón se pueden dejar de cubrir cualquiera de los 3 cuadros negros. Este método funciona también para el tercer y quinto renglón.



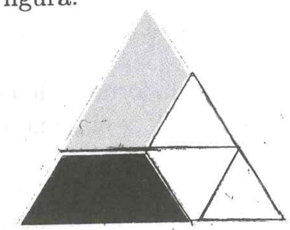
Fijémonos en el cuadro de 3×3 que está en la esquina superior izquierda, éste se puede cubrir dejando el centro descubierto de la siguiente manera:



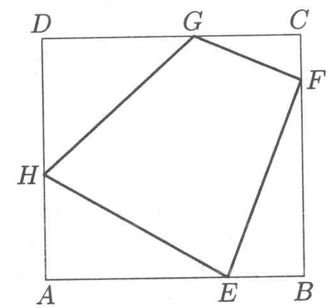
Como el resto del cuadrado de 5×5 se cubre, entonces tenemos manera de cubrir el de 5×5 dejando el cuadrado negro central del subcuadrado de 3×3 que seleccionamos. En forma análoga, se procede para los cuadros negros restantes.

Solución al Problema 5. Los trapecios de lados 1, 1, 1 y 2 son el resultado de "pegar" 3 triángulos equiláteros de lado 1 formando la mitad de un hexágono regular. Un triángulo equilátero de lado n se divide en n^2 triangulitos de lado 1. Por lo tanto, para que un triángulo de lado n se pueda dividir en trapecios como los mencionados, necesariamente n^2 deberá ser múltiplo de 3, es decir, n debe ser múltiplo de 3.

Esto también es suficiente: si n es múltiplo de 3, el triángulo equilátero de lado n puede dividirse en triángulos equiláteros de lado 3 y basta probar que uno de éstos puede dividirse en trapecios de lados 1, 1, 1 y 2. La división necesaria se muestra en la figura.



Solución al Problema 6. Usaremos la desigualdad $\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2} \geq a+b$, válida para a y b positivos. Es fácil de probar: $\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2} \geq a+b \Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2\right) \geq (a+b)^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$.



Ahora, por el teorema de Pitágoras, $EF = \sqrt{BE^2+BF^2}$ y por la desigualdad obtenemos que:

$$\sqrt{2}EF \geq BE+BF$$

Análogamente se obtienen las desigualdades:

$$\sqrt{2}FG \geq CF+CG,\ \sqrt{2}GH \geq DG+DH,\ \sqrt{2}HE \geq AH+AE.$$

Sumando las cuatro desigualdades, resulta que $\sqrt{2}$ (perímetro de $EFGH$)

$$\geq AE+EB+BF+FC+CG+GD+DH+HA = 1+1+1+1 = 4$$

y por lo tanto, (perímetro de $EFGH$) $\geq \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

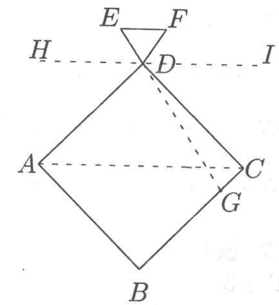
Solución al Problema 7. Solamente para $n=1$ y 3.
$1! = 1$, $1!+2! = 3$, $1!+2!+3! = 9$, $1!+2!+3!+4! = 33$, y como para $k \geq 5$, $k!$ termina en 0, se tiene que $1!+2!+...+k! \equiv 3 \pmod{10}$ para $k \geq 5$.

Solución al Problema 8. Los icosaedros tienen 12 vértices, por lo que hay $\binom{12}{2} = 66$ segmentos que unen pares de vértices. Si a esos 66 segmentos les quitamos las aristas, tendremos el número de diagonales. ¿Cuántas aristas tiene un icosaedro regular? Veamos: tiene 20 caras de 3 aristas cada una y cada arista está en dos caras. Por lo tanto, hay $\frac{20\cdot 3}{2} = 30$ aristas. Entonces, hay $66 - 30 = 36$ diagonales.
Solución alternativa. Usaremos la fórmula de Euler que relaciona el número de aristas A, el número de vértices V y el número de caras C de un poliedro: $V - A + C = 2$.
Como en el icosaedro las caras son triángulos tenemos que $2A = 3C$ ya que cada cara tiene tres aristas y una arista es compartida por dos caras, luego hay 30 aristas. Por la fórmula de Euler el número de vértices es $V = A - C + 2 = 30 - 20 + 2 = 12$ y entonces se tiene que $5V = 2A$, es decir, cada vértice tiene 5 vértices adyacentes. Al unir cada vértice con los 11 vértices restantes y al restar sus 5 vértices adyacentes, tenemos que de cada vértice salen 6 diagonales luego el número de diagonales es $\frac{12\cdot 6}{2} = 36$.

Solución al Problema 9. Si x es la cantidad original, tenemos que al primer hijo le da $1000 + \frac{1}{10}(x - 1000)$ y al segundo $2000 + \frac{1}{10}(x - 3000 - \frac{1}{10}(x - 1000))$ al igualar estas cantidades y resolver tenemos que $x = 81000$ y entonces reparte a cada uno 9000. Luego, tiene 9 hijos.

Solución al Problema 10. No es difícil ver que si el número tiene 90 cifras entonces tiene 12 cifras iguales a a y 78 cifras 2. Como un número es divisible entre 9 si y sólo si la suma de sus cifras es divisible entre 9 y como la suma de las cifras 2 es $2 \cdot 78$ que es divisible entre 9, bastará ver cuando $12a$ es divisible entre 9. Como $12a$ tiene un factor 3, será suficiente que a tenga un factor 3, luego los valores de a son $0, 3, 6$ y 9.

Solución al Problema 11. Trace una línea HI paralela a EF por D $\measuredangle GDI = 60°$ y $\measuredangle CDI = 45°$, luego $\measuredangle GDC = \measuredangle GDI - \measuredangle CDI = 60° - 45° = 15°$. Por lo tanto $\measuredangle DGC = 75°$.



Solución al Problema 12. Como:

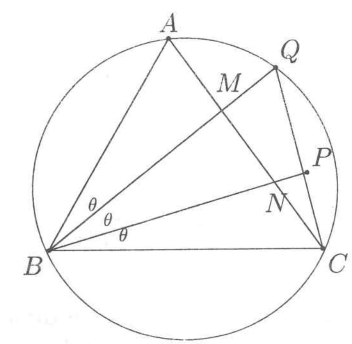
$$\frac{a+b^{-1}}{a^{-1}+b}=\frac{a+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+b}=\frac{\left(\frac{ab+1}{b}\right)}{\left(\frac{ab+1}{a}\right)}=\frac{a}{b},$$

debemos encontrar los a y b tales que $\frac{a}{b}=13$ y $a+b\leq 80$. Como $\frac{a}{b}=13$, $a=13b$, entonces, $a+b=14b\leq 80$. Por lo tanto, b es a lo más 5. Las parejas (a,b) que cumplen son $(13,1),(26,2),(39,3),(52,4),(65,5)$.

Solución al Problema 13. Por el Teorema de la Bisectriz:

$$\frac{MN}{AM}=\frac{BN}{AB}\text{ y }\frac{BC}{QB}=\frac{PC}{QP}$$

Los triángulos ABN y QBC, son semejantes ya que $\measuredangle BAN=\measuredangle BQC$ y $\measuredangle ABN=\measuredangle QBC=2\theta$, por lo tanto, $\frac{BN}{AB}=\frac{BC}{QB}$. Luego $\frac{MN}{AM}=\frac{PC}{QP}$.



Al sumar 1 de ambos lados obtenemos:

$$\frac{AN}{AM}=\frac{QC}{QP}$$

Por tanto,

$$\frac{AM}{AN}+\frac{CP}{CQ}=\frac{QP}{QC}+\frac{CP}{CQ}=\frac{QC}{QC}=1.$$

Solución al Problema 14. El reo número 10, que es el primero en hablar, ve 9 sombreros de dos colores posibles. De un color debe haber un número par y del otro uno impar. Los reos se pueden poner de acuerdo para que el reo número 10 diga el color del que ve un número par, de esta forma el reo número

Solución al Problema 12. Como:

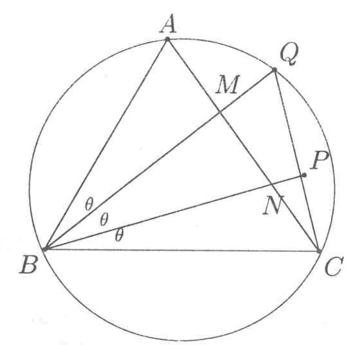
$$\frac{a+b^{-1}}{a^{-1}+b}=\frac{a+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+b}=\frac{\left(\frac{ab+1}{b}\right)}{\left(\frac{ab+1}{a}\right)}=\frac{a}{b},$$

debemos encontrar los a y b tales que $\frac{a}{b}=13$ y $a+b\leq 80$. Como $\frac{a}{b}=13$, $a=13b$, entonces, $a+b=14b\leq 80$. Por lo tanto, b es a lo más 5. Las parejas (a,b) que cumplen son $(13,1),(26,2),(39,3),(52,4),(65,5)$.

Solución al Problema 13. Por el Teorema de la Bisectriz:

$$\frac{MN}{AM}=\frac{BN}{AB}\text{ y }\frac{BC}{QB}=\frac{PC}{QP}$$

Los triángulos ABN y QBC, son semejantes ya que $\measuredangle BAN=\measuredangle BQC$ y $\measuredangle ABN=\measuredangle QBC=2\theta$, por lo tanto, $\frac{BN}{AB}=\frac{BC}{QB}$. Luego $\frac{MN}{AM}=\frac{PC}{QP}$.



Al sumar 1 de ambos lados obtenemos:

$$\frac{AN}{AM}=\frac{QC}{QP}$$

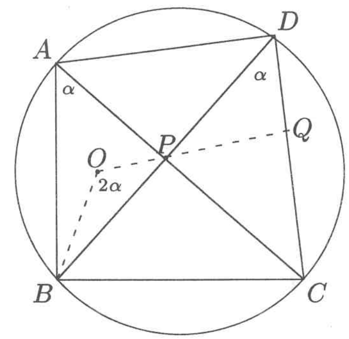
Por tanto,

$$\frac{AM}{AN}+\frac{CP}{CQ}=\frac{QP}{QC}+\frac{CP}{CQ}=\frac{QC}{QC}=1.$$

Solución al Problema 14. El reo número 10, que es el primero en hablar, ve 9 sombreros de dos colores posibles. De un color debe haber un número par y del otro uno impar. Los reos se pueden poner de acuerdo para que el reo número 10 diga el color del que ve un número par, de esta forma el reo número

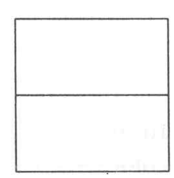
9 sabrá de que color es su sombrero, ya que cuenta el número de sombreros que ve del color que dijo su compañero: si sigue siendo par, su sombrero es del otro color, y si es impar, su sombrero es de ese color.
Así cada uno de los siguientes reos cuenta el número de sombreros que ve del color que dijo el reo número 10 y a ese número le suma la cantidad de veces que sus otros compañeros han dicho el color, si el número que le da es par, entonces su sombrero es del otro color y si es impar, su sombrero es de ese color. (De esta forma el único que quizá no se salva es el reo número 10.)

Solución al Problema 15. Sea Q la intersección de OP con CD. Probar que O, P y H son colineales es equivalente a probar que $PQ \perp CD$. Sea $\alpha = \measuredangle BAC = \measuredangle BDC$. Como O es el circuncentro de ABP, $\measuredangle BOP = 2\alpha$. Como el triángulo BOP es isósceles, $\measuredangle OPB = 90^o - \frac{1}{2}\measuredangle BOP = 90^o - \alpha$. Entonces $\measuredangle DPQ + \measuredangle PDQ = \measuredangle OPB + \alpha = (90^o - \alpha) + \alpha = 90^o$. Por lo tanto, $\measuredangle PQD = 90^o$, es decir, $PQ \perp CD$.

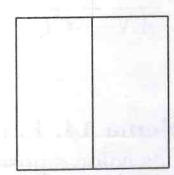


Solución al Problema 16. Supongamos que se dividen los 10 niños en 3 equipos. Uno de los equipos debe tener al menos 4 integrantes. Digamos que Juan es uno de los niños en ese equipo. Juan tiene 7 amigos, pero entre los otros equipos hay a lo más 6 niños, por lo tanto, Juan tiene un amigo en su equipo.

Solución al Problema 17. Fijémonos en la forma de llenar el cuadrito central de 2×2, cada una de las formas de llenarlo dará una forma de llenar toda la cuadrícula.
El cuadrado central se puede llenar con dos fichas de dos maneras:

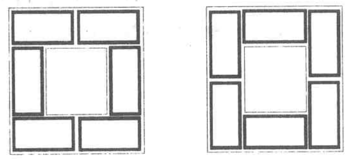


y

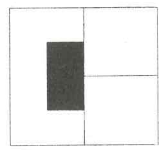


Para cada una de estas formas hay 2 maneras de terminar el llenado de la cuadrícula:

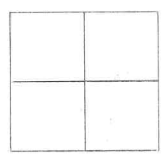
Para cada una de estas formas hay 2 maneras de terminar el llenado de la cuadrícula:



Así hay 4 maneras de llenar la cuadrícula, si iniciamos llenando primero el cuadrado central de 2×2.
Si en el cuadrado central de 2×2 hay solo una ficha completa dentro de él, por ejemplo así:



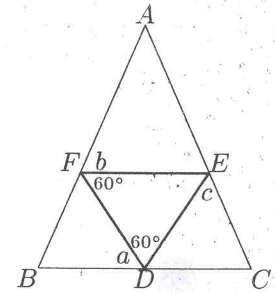
Tenemos que los dos cuadrados de 2×2 de la derecha, tanto el inferior como el superior, se pueden llenar cada uno de 2 maneras y el lado izquierdo de la cuadrícula que falta llenar, se llena de manera forzada.
Luego, hay 4 maneras de llenar la cuadrícula en este caso y si giramos la cuadrícula para considerar los 4 posibles casos de la ficha de 2×1 que se coloca en el cuadro central, tenemos en total en este caso 16 maneras de llenarla.
Finalmente veamos el caso donde no hay una ficha de 2×1, dentro del cuadrado central. Dividimos la cuadrícula en 4 cuadros de 2×2.



Cada uno de estos cuadrados de 2×2 se puede llenar de 2 maneras y entonces en este caso hay 16 maneras de llenar la cuadrícula.
Resumiendo tenemos que hay en total 36 formas de llenar la cuadrícula.

Solución al Problema 18. Si el cuadrilátero es cíclico es conocido que $\alpha + \gamma = \beta + \delta = \pi$, luego $(\alpha + \gamma)(\beta + \delta) = \pi^2$.
Recíprocamente, si $(\alpha + \gamma)(\beta + \delta) = \pi^2$, como $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$, tenemos al hacer $a = \alpha + \gamma$ y $b = \beta + \delta$ que las ecuaciones se reescriben como: $ab = \pi^2$ y $a + b = 2\pi$. La única solución es $a = b = \pi$, lo cual garantiza que el cuadrilátero es cíclico.

Solución al Problema 19. Como $\measuredangle AFD = \measuredangle BDF + \measuredangle FBD$, tenemos que $b + 60^o = a + \measuredangle B$. También, de $\measuredangle BDE = \measuredangle DEC + \measuredangle DCE$ obtenemos que $a + 60^o = c + \measuredangle C$. Restanto las dos ecuaciones y recordando que $\measuredangle B = \measuredangle C$ resulta $b - a = a - c$. Al despejar a se obtiene $a = \frac{b+c}{2}$.



Solución al Problema 20. Supongamos que 1 es rojo y que n es negro. Para $n = 2$ es claro el resultado, supongamos el resultado cierto para $k < n$. Sean a el menor entero coloreado de negro y b el mayor entero coloreado de rojo de entre $\{1, 2, ..., n\}$, así $1, 2, ..., a - 1$ son rojos y $b + 1, b + 2, ..., n$ son negros. Ahora, fijémonos en el conjunto $\{a, a + 1, ..., b\}$ tenemos que inicia con a coloreado de negro y termina en b que es de color rojo, luego, por la hipótesis de inducción el número de parejas consecutivas de diferente color en este conjunto es impar. Sumando los dos cambios de color que hay entre $a - 1$ y a y entre b y $b + 1$, el total también es impar.

Solución al Problema 21. Supongamos que el cuadro 1 se llena con una ficha de dominó vertical (ver figura).

1	2						
	3	4					
		5	6				
			7	8			
				9	10		
					11	12	
						13	14

Si 2 también se llena con una ficha vertical, terminamos. Supongamos entonces que 2 se cubre con una ficha horizontal. Ahora, si 3 se cubre con una horizontal acabamos; supongamos que se cubre con una vertical. Del mismo modo vemos que $1, 3, 5, 7, 9, 11$ y 13 se deben llenar con fichas verticales y $2, 4, 6, 8, 10, 12$ con fichas horizontales. Esto obliga a cubrir 14 con una ficha vertical formando un cuadrado de 2×2 con la ficha que cubre 13. Por lo tanto, siempre hay dos fichas que forman un cuadro de 2×2.

Solución alternativa. Supongamos que no hay 2 fichas que formen un cuadrado de 2×2. Contaremos el número de parejas (C, D) en el tablero donde C es un cuadro de 2×2 y D es una ficha de dominó contenida completamente en C. Como cada cuadro de 2×2 contiene a lo más una ficha, el número de parejas es a lo más 49, el número de cuadros de 2×2 en un tablero de 8×8. Por otra parte, cada ficha que no esté contenida totalmente en el marco de ancho 1, está contenida en dos cuadrados de 2×2. Por lo tanto, si hay m fichas en el marco, hay $m + 2(32 - m) = 64 - m$ parejas de las que contamos. Entonces, $64 - m$ es menor o igual que 49 y por lo tanto $m \geq 15$. Pero no puede haber 15 fichas en el marco, pues el marco tiene sólo 28 cuadritos. Esta contradicción prueba que debe haber 2 fichas en un cuadro de 2×2.

Solución al Problema 22. Para $j = 6$, se tiene que $2^2+2^5+2^6 = 4+32+64 = 100 = 10^2$. Veamos que es el único caso.

$$2^2 + 2^5 + 2^j = 2^2 + 2^2 \cdot 2^3 + 2^j = 9 \cdot 2^2 + 2^j = r^2$$

luego: $2^j = r^2 - 9 \cdot 2^2 = (r+6)(r-6)$, así $r + 6 = 2^n$ y $r - 6 = 2^m$ para n, m con $n + m = j$ y desde luego $n > m$.
Como $2^n - 2^m = (r+6) - (r-6) = 12 = 2^2 \cdot 3$, se tiene que $2^m(2^{n-m} - 1) = 2^2 \cdot 3$ por lo que $m = 2$ y $n - m = 2$. Luego $n = 4$, lo que implica que $j = 6$.

Solución al Problema 23. Hay tres tipos de paralelepípedos: (i) paralelepípedos con todas las aristas iguales (cubos), de éstos hay 10, que corresponde a la manera de elegir la longitud de la arista entre los 10 números. (ii) paralelepípedos con dos longitudes de aristas iguales y una distinta, hay 10 formas de elegir la longitud de las aristas iguales y 9 formas de elegir la otra longitud, por lo que hay en éste caso $10 \cdot 9 = 90$ paralelepípedos distintos. (iii) paralelepípedos con tres longitudes de aristas distintas, aquí se deben escoger las tres longitudes distintas entre las 10 posibles estos se hace de $\binom{10}{3} = 120$ maneras. Por lo que en total hay $10+90+120 = 220$ paralelepípedos distintos.
Solución alternativa. Ordenando los lados del paralelepípedo de menor a mayor evitamos repeticiones. Entonces, el número de paralelepípedos rectangulares *distintos* con lados enteros entre 1 y 10 es igual al número de tercias de enteros (a, b, c) que satisfacen $1 \leq a \leq b \leq c \leq 10$. Afirmamos que el número de tercias es $\binom{12}{3}$, el número de subconjuntos de 3 elementos del conjunto $1, 2, 3, \ldots, 12$. De la condición que deben cumplir las tercias se obtiene $1 \leq a < b + 1 < c + 2 \leq 12$, por lo que a, $b + 1$ y $c + 2$ son números del 1 al 12 diferentes entre sí. Entonces, a cada tercia (a, b, c) le podemos hacer corresponder el conjunto $\{a, b+1, c+2\}$. Y viceversa, para obtener una de las tercias a partir de cualquier subconjunto de 3 elementos de $\{1, 2, 3, \ldots, 12\}$, basta con ordenar los elementos del conjunto, digamos $x < y < z$ y formar la tercia $(x, y - 1, z - 2)$. Como x, y y z están entre 1 y 12 y se cumple que

Solución alternativa. Supongamos que no hay 2 fichas que formen un cuadrado de 2×2. Contaremos el número de parejas (C, D) en el tablero donde C es un cuadro de 2×2 y D es una ficha de dominó contenida completamente en C. Como cada cuadro de 2×2 contiene a lo más una ficha, el número de parejas es a lo más 49, el número de cuadros de 2×2 en un tablero de 8×8. Por otra parte, cada ficha que no esté contenida totalmente en el marco de ancho 1, está contenida en dos cuadrados de 2×2. Por lo tanto, si hay m fichas en el marco, hay $m + 2(32 - m) = 64 - m$ parejas de las que contamos. Entonces, $64 - m$ es menor o igual que 49 y por lo tanto $m \geq 15$. Pero no puede haber 15 fichas en el marco, pues el marco tiene sólo 28 cuadritos. Esta contradicción prueba que debe haber 2 fichas en un cuadro de 2×2.

Solución al Problema 22. Para $j = 6$, se tiene que $2^2+2^5+2^6 = 4+32+64 = 100 = 10^2$. Veamos que es el único caso.

$$2^2 + 2^5 + 2^j = 2^2 + 2^2 \cdot 2^3 + 2^j = 9 \cdot 2^2 + 2^j = r^2$$

luego: $2^j = r^2 - 9 \cdot 2^2 = (r + 6)(r - 6)$, así $r + 6 = 2^n$ y $r - 6 = 2^m$ para n, m con $n + m = j$ y desde luego $n > m$.
Como $2^n - 2^m = (r+6) - (r-6) = 12 = 2^2 \cdot 3$, se tiene que $2^m (2^{n-m} - 1) = 2^2 \cdot 3$ por lo que $m = 2$ y $n - m = 2$. Luego $n = 4$, lo que implica que $j = 6$.

Solución al Problema 23. Hay tres tipos de paralelepípedos: (i) paralelepípedos con todas las aristas iguales (cubos), de éstos hay 10, que corresponde a la manera de elegir la longitud de la arista entre los 10 números. (ii) paralelepípedos con dos longitudes de aristas iguales y una distinta, hay 10 formas de elegir la longitud de las aristas iguales y 9 formas de elegir la otra longitud, por lo que hay en éste caso $10 \cdot 9 = 90$ paralelepípedos distintos. (iii) paralelepípedos con tres longitudes de aristas distintas, aquí se deben escoger las tres longitudes distintas entre las 10 posibles estos se hace de $\binom{10}{3} = 120$ maneras. Por lo que en total hay $10+90+120 = 220$ paralelepípedos distintos.
Solución alternativa. Ordenando los lados del paralelepípedo de menor a mayor evitamos repeticiones. Entonces, el número de paralelepípedos rectangulares *distintos* con lados enteros entre 1 y 10 es igual al número de tercias de enteros (a, b, c) que satisfacen $1 \leq a \leq b \leq c \leq 10$. Afirmamos que el número de tercias es $\binom{12}{3}$, el número de subconjuntos de 3 elementos del conjunto $1, 2, 3, \ldots, 12$. De la condición que deben cumplir las tercias se obtiene $1 \leq a < b + 1 < c + 2 \leq 12$, por lo que a, $b + 1$ y $c + 2$ son números del 1 al 12 diferentes entre sí. Entonces, a cada tercia (a, b, c) le podemos hacer corresponder el conjunto $\{a, b+1, c+2\}$. Y viceversa, para obtener una de las tercias a partir de cualquier subconjunto de 3 elementos de $\{1, 2, 3, \ldots, 12\}$, basta con ordenar los elementos del conjunto, digamos $x < y < z$ y formar la tercia $(x, y - 1, z - 2)$. Como x, y y z están entre 1 y 12 y se cumple que

$x < y < z$, tenemos que $1 \leq x \leq y-1 \leq z-2 \leq 10$, de modo que la tercia propuesta efectivamente cumple la condición requerida.
Esta correspondencia muestra que el número de tercias que cumplen la condición (que es igual al de paralelepípedos buscados) es igual al número de subconjuntos de $\{1,2,3,\ldots,12\}$ de 3 elementos, es decir, $\binom{12}{3}$.

Solución al Problema 24. Sean (O_i, r_i) $i = 1,2,\ldots,6$ las circunferencias y A el punto común. De los ángulos O_iAO_j considere el menor, digamos que es O_aAO_b. Entonces este ángulo es menor o igual a $60°$ y O_aO_b es entonces menor que el mayor de AO_a y AO_b, si por ejemplo AO_b es el mayor, (O_b, r_b) es la circunferencia buscada.

Solución al Problema 25. Si (w,x,y,z) es solución del sistema, entonces es solución de la ecuación: $yz - w - x + wx - y - z = 0$, que es equivalente a $(w-1)(x-1) + (y-1)(z-1) = 2$.
Encontremos las soluciones enteras de esta última ecuación y comprobemos si son soluciones del sistema original. Como las soluciones son enteras tenemos tres casos:
(a) $(w-1)(x-1) = 2$, y $(y-1)(z-1) = 0$
que admite soluciones: $(2,3,1,5)$, $(3,2,1,5)$, $(2,3,5,1)$ y $(3,2,5,1)$.
(b) $(w-1)(x-1) = 1$ y $(y-1)(z-1) = 1$
cuya única solución es: $(2,2,2,2)$
(c) $(w-1)(x-1) = 0$ y $(y-1)(z-1) = 2$
que tiene soluciones: $(1,5,2,3)$, $(1,5,3,2)$, $(5,1,2,3)$ y $(5,1,3,2)$.
Es fácil comprobar que cualquiera de estas 9 cuartetas es solución del sistema original.

Solución al Problema 26. Sí es posible. Para ver esto, sean $\sum_c$, $\sum_v$ y $\sum_a$ las sumas de los números asignados a las caras, vértices y aristas, respectivamente.
Como cada cara está formada por tres aristas, tenemos que:

$$2\sum\nolimits_a = 3\sum\nolimits_c \text{ ....(1)}$$

y como cada vértice es común a tres aristas, tenemos que:

$$2\sum\nolimits_a = 3\sum\nolimits_v \text{ .....(2)}$$

Además, $\sum_c + \sum_v + \sum_a = 1 + 2 + \cdots + 14 = 105$. ....(3)
Resolviendo el sistema formado por (1), (2) y (3) tenemos que:

$$\sum\nolimits_c = \sum\nolimits_v = 30 \text{ y } \sum\nolimits_a = 45.$$

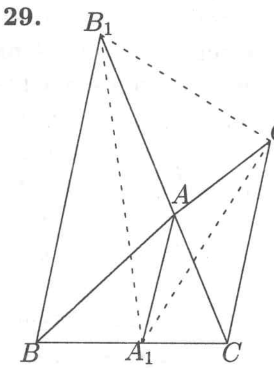
Para que el número asignado a una arista sea entero, debemos tener que los números asignados a las caras adyacentes a la arista deben ser de la misma paridad y los números asignados a los vértices que determina la arista también

deben ser de la misma paridad. Pero si un vértice es par (impar) lo serán también los demás vértices, esto mismo sucede con las caras.
Los conjuntos de cuatro números con la misma paridad, cuya suma sea 30 y sean elementos de $\{1, 2, 3, ..., 14\}$, son los siguientes ocho conjuntos:
$\{1,5,11,13\}$, $\{1, 7, 9, 13\}$, $\{3, 5, 9, 13\}$, $\{3, 7, 9, 11\}$, $\{2, 4, 10, 14\}$, $\{2, 6, 8, 14\}$, $\{2, 6, 10, 12\}$, $\{4, 6, 8, 12\}$.
Uno de estos conjuntos debe ser usado para numerar las caras y otro para numerar los vértices. Puesto que ningún promedio debe ser elemento del conjunto, los únicos conjuntos que satisfacen (después de promediar por parejas los números de cada conjunto de todas las maneras posibles) son: $\{1, 5, 11, 13\}$ y $\{2, 4, 10, 14\}$. Ambos dan el mismo conjunto para numerar las aristas. A saber: $\{3, 6, 7, 8, 9, 12\}$.
Así, tenemos dos soluciones dependiendo de que conjunto se utilice para numerar las caras y cual para numerar los vértices.
Notemos que cada solución es el dual de la otra, ya que en la primera los números asignados a las caras son los números asignados a los vértices de la segunda y viceversa.

Solución al Problema 27. Supongamos que los números primos son: $p, p+6, p+12, p+18, p+24$ al tomar congruencias módulo 5 tenemos que estos números son congruentes a $p, p+1, p+2, p+3, p+4$ respectivamente, pero entre cinco números consecutivos siempre hay uno que es divisible entre 5 y como p debe ser primo no hay otra opción mas que $p = 5$, y los números primos son $5, 11, 17, 23$ y 29.

Solución al Problema 28. En el triángulo BCD, BE y CE son bisectrices interiores del triángulo, estas se intersectan en E que es el incentro del triángulo, como las bisectrices de un triángulo son concurrentes, se debe tener que DE es bisectriz de $\measuredangle BDC$, por lo que $\measuredangle BDE = \measuredangle CDE$.

Solución al Problema 29.



El triángulo $A_1B_1C_1$ se divide en los triángulos AA_1B_1, AA_1C_1 y AB_1C_1. Como BB_1 es paralela a AA_1, $(AA_1B_1) = (AA_1B)$ (si pensamos que la base de ambos triángulos es AA_1, tiene también la misma altura: la distancia de AA_1 a BB_1). Análogamente, $(AA_1C_1) = (AA_1C)$. Por lo tanto, $(AA_1B_1) + (AA_1C_1) = (AA_1B) + (AA_1C) = (ABC)$. Veamos ahora el triángulo AB_1C_1: como BB_1 es paralela a CC_1, $(BB_1C_1) = (BB_1C)$. Restando (BB_1A) a cada lado de esa igualdad se obtiene que $(AB_1C_1) = (ABC)$. Por lo tanto, $(A_1B_1C_1) = (AB_1C_1) + ((AA_1B_1) + (AA_1C_1)) = 2(ABC) = 3998$.

Solución al Problema 30. Hacemos solamente el inciso *ii*), pues es más general. ¿Qué necesitan cumplir x, y y z para que (x, y, z) esté en el triángulo de vértices $(n, 0, 0)$, $(0, n, 0)$ y $(0, 0, n)$? El plano del triángulo tiene ecuación $x + y + z = n$, de modo que esa es una condición. Las condiciones restantes se pueden hallar notando que el triángulo está en el octante positivo, $x, y, z \geq 0$. Lo que se debe cortar al triángulo para formar un hexágono regular es: en cada esquina un triángulo de la tercera parte del tamaño. En otras palabras, aquellos puntos que cumplan alguna de las desigualdes $x > \frac{2n}{3}$, $y > \frac{2n}{3}$, $z > \frac{2n}{3}$. Debemos, pues, contar el número de ternas de enteros (x, y, z), $0 \leq x, y, z \leq \frac{2n}{3}$, tales que $x + y + z = n$. Eliminando z, resulta que debemos contar los pares de enteros (x, y), $0 \leq x, y \leq \frac{2n}{3}$, tales que $\frac{n}{3} \leq x + y \leq n$. Consideraremos tres casos dependiendo del residuo módulo 3 de n.

$n = 3k$: Las condiciones son $0 \leq x, y \leq 2k$ y $k \leq x+y \leq 3k$. Consideraremos sólo los $(2k+1)^2$ pares que cumplen la primera condición, de esos debemos quitar los que cumplan $x + y < k$ y los que cumplan $x + y > 3k$. De los pares considerados hay $m+1$ tales que $x+y = m$. Sumando para $m = 0, 1, \ldots k-1$, resultan $\frac{k(k+1)}{2}$ pares que debemos quitar por tener suma menor que k. Hay $m+1$ con suma $4k - m$ y entonces son otros $\frac{k(k+1)}{2}$ que debemos quitar por tener suma mayor que $3k$. Por lo tanto, en este caso hay $(2k+1)^2 - k(k+1) = 3k^2 + 3k + 1$ puntos en el hexágono.

$n = 3k + 1$: Las condiciones son $0 \leq x, y \leq 2k$ y $k + 1 \leq x + y \leq 3k + 1$. Consideramos, como en el caso anterior, sólo los $(2k+1)^2$ pares que cumplen la primera condición, y quitamos los que cumplan $x+y < k+1$ y los que cumplan $x + y > 3k + 1$. De los pares considerados hay $m + 1$ tales que $x + y = m$. Sumando para $m = 0, 1, \ldots k$, resultan $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ pares que debemos quitar por tener suma menor que k. Hay $m+1$ con suma $4k - m$ y entonces son otros $\frac{k(k-1)}{2}$ que debemos quitar por tener suma mayor que $3k$. Por lo tanto, en este caso hay $(2k+1)^2 - \frac{(k+1)(k+2)}{2} - \frac{k(k-1)}{2} = 3k^2 + 3k$ puntos en el hexágono.

$n = 3k + 2$: Las condiciones son $0 \leq x, y \leq 2k + 1$ y $k + 1 \leq x + y \leq 3k + 2$. Consideramos, como arriba, sólo los $(2k+2)^2$ pares que cumplen la primera condición, y quitamos los que cumplan $x + y < k + 1$ o $x + y > 3k + 2$. De los pares considerados hay $m + 1$ tales que $x + y = m$. Sumando para $m = 0, 1, \ldots k$, resultan $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ pares que debemos quitar por tener suma menor que k. Hay $m + 1$ con suma $4k + 2 - m$ y entonces son otros $\frac{k(k+1)}{2}$ que debemos quitar por tener suma mayor que $3k$. Por lo tanto, en este caso hay $(2k+2)^2 - \frac{(k+1)(k+2)}{2} - \frac{k(k+1)}{2} = 3k^2 + 6k + 3$ puntos en el hexágono.

Solución al Problema 31. Un punto de intersección se logra cuando se han tomado 2 cuerdas que se cortan dentro del círculo. Observemos que cada vez que tomamos 4 de los 19 puntos se logra un punto de intersección dentro del círculo, entonces hay $\binom{19}{4} = 3876$ puntos de intersección.

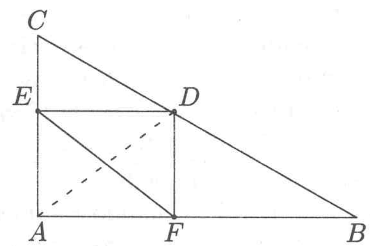
Solución al Problema 32.
(a) Si x es múltiplo de 19, digamos $x = 19m$, $S(x) = m+2m+3m+\cdots+18m = \frac{18\cdot 19}{2}m = 9\cdot 19m = 9x$ que es múltiplo de 9. Supongamos, entonces, que x no es múltiplo de 19; como 19 es primo, esto quiere decir que es primo relativo con x. Sea r_k el residuo de dividir kx entre 19, es decir, $0 \leq r_k < 19$ y $r_k \equiv kx \pmod{19}$. Como x es primo relativo con 19, entonces $r_1, r_2, \ldots, r_k$ es una permutación de $1, 2, \ldots, 18$. Tenemos que $\lfloor \frac{kx}{19} \rfloor = \lfloor \frac{kx-r_k}{19} + \frac{r_k}{19} \rfloor = \frac{kx-r_k}{19}$. Por lo tanto, $S(x) = \frac{x}{19} + \frac{2x}{19} + \cdots + \frac{18x}{19} - \frac{r_1}{19} - \frac{r_2}{19} - \cdots - \frac{r_{18}}{19} = \frac{(1+2+\cdots+18)}{19}(x-1) = 9(x-1)$ que es evidentemente múltiplo de 9.
(b) Estudiemos como se comporta $S(x)$ cuando x aumenta de 0 a 19. Primero, es claro que $S(x)$ es siempre un número entero y que crece con x. Luego, sólo puede aumentar cuando al menos uno de los sumandos aumenta, esto sucede cuando alguno de los números $\frac{kx}{19}$ se vuelve entero. Brevemente, $S(x)$ aumenta cuando x toma alguno de los valores $\frac{19m}{k}$ con m y k enteros y $1 \leq k \leq 18$. También hay restricciones para m: como $0 \leq x \leq 19$, m cumple $0 \leq m \leq k$. Si agregamos la restricción de que m y k sean primos relativos, no repetiremos fracciones. Por lo tanto, si $\phi(k)$ denota cuantas m, $1 \leq m \leq k$ son primas relativas con k, el número de valores distintos de $S(x)$ es $1 + \phi(1) + \phi(2) + \cdots + \phi(18) = 103$ (el uno al principio es por $S(0) = 0$).

Solución al Problema 33.
(a) Si n es impar, tomamos $a = 0$, $b = \frac{n+1}{2}$ y $c = \frac{n-1}{2}$. Si n es múltiplo de cuatro, tomamos $a = 0$, $b = \frac{n+4}{4}$ y $c = \frac{n-4}{4}$. Finalmente, si n es de la forma $4k+2$, tomamos $a = 1$, $b = \frac{n}{2}$ y $c = \frac{n-2}{2}$.
b) Probaremos primero que $n = a^2 + b^2 + c^2$ no tiene soluciones enteras si n es de la forma $4^t(8k+7)$. Un cuadrado perfecto es congruente con 0, 1 o 4 módulo 8. Haciendo todas las posible sumas módulo 8 de tres 0s, 1s y 4s, vemos que $a^2+b^2+c^2$ nunca es congruente con 7 módulo 8. También podemos comprobar que no es múltiplo de 4 (o sea, congruente con 0 o 4 módulo 8) a menos que a, b y c sean los tres pares. Por lo tanto, si $a^2+b^2+c^2 = 4^t(8k+7)$, no podemos tener $t = 0$. Pero si $t \geq 1$, a, b y c deben ser pares, digamos $2a_1$, $2b_1$ y $2c_1$. Sustituyendo hallamos que $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 4^{t-1}(8k+7)$, que es la misma ecuación con t reducida en 1. Repetiendo el argumento suficientes veces llegamos a $t = 0$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, $n = a^2 + b^2 + c^2$ no tiene soluciones si n es de la forma $4^t(8k+7)$.

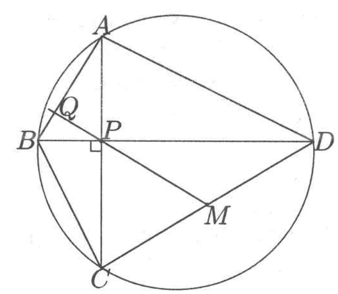
Contemos cuantas $n < 1999$ son de esa forma:
Con $t = 0$ hay 249, $k = 0, 1, \ldots, 248$.
Con $t = 1$ hay 62, $k = 0, 1, \ldots, 61$.
Con $t = 2$ hay 15, $k = 0, 1, \ldots, 14$.

Con $t = 3$ hay 4, $k = 0, 1, 2, 3$.
Con $t = 4$ hay 1, $k = 0$.
En total son 331 números de esa forma, por lo que hay a lo más $1998 - 331 = 1667$ enteros menores que 1999 que son suma de tres cuadrados.

Solución al Problema 34. Notemos que $DEAF$ es un rectángulo, por lo que $EF = AD$. El punto D para el cual AD es mínimo es el pie de la altura desde A.



Solución al Problema 35. Sea M el punto medio de CD y l' la recta por P y M.



Si probamos que $l' \perp AB$, entonces $l = l'$ y l pasará por M. Como el triángulo PCD es rectángulo, M es el circuncentro de PCD. Entonces, $MP = MC$ y $\measuredangle PCM = \measuredangle MPC$. Sea Q la intersección de l' y AB.
$l' \perp AB \Leftrightarrow \measuredangle QAP + \measuredangle APQ = 90^o \Leftrightarrow \measuredangle BAC + \measuredangle MPC = 90^o \Leftrightarrow \measuredangle BDC + \measuredangle PCM = 90^o$, lo cual es cierto puesto que PCD es un triángulo rectángulo.

Solución al Problema 36. Ponemos en cada vértice indicado con A, $\sqrt{2}$ y en cada vértice indicado con B, $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ahora, sobre cada lado, el número escrito es el producto de los números puestos en los vértices. El producto de los números escritos sobre los lados es el cuadrado del producto de los números asignados a los vértices, pues cada vértice pertenece a dos lados. Por lo tanto, el producto buscado es $\left((\sqrt{2})^a \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^b\right)^2 = 2^{a-b}$.

Solución al Problema 37. El problema se puede dividir en tres casos.
Caso 1. Si entre los franceses hay $4, 1, 1$ lugares, tenemos $(6)(3)(4)(2) = (2^4)(3^2)$ formas. En efecto, en el espacio de 4 lugares debemos acomodar 2 mexicanos y 2 americanos alternadamente. Consideremos los dos espacios de un lugar: para el primero hay 6 candidatos, para el segundo únicamente 3, pues debe ser de la otra nacionalidad. Tenemos entonces, para los 2 espacios de un lugar, $6 \cdot 3$ posibilidades. Los 2 mexicanos y los dos americanos restantes se deben acomodar en el espacio de 4 lugares. Para el primer lugar hay 4 candidatos y para el segundo únicamente 2 ya que debe ser de la otra nacionalidad. Los últimos dos lugares del espacio de 4 están determinados por lo que hay $4 \cdot 2$ posibilidades para llenar el espacio de 4. Por lo tanto, en este caso hay $6 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 = 2^4 \cdot 3^2$ formas de acomodarlos.
Caso 2. Si entre los franceses hay $3, 2, 1$ lugares, tenemos $(6)(3)(2^3) = (2^4)(3^2)$ formas.
Caso 3. Si entre los franceses hay $2, 2, 2$ lugares, tenemos $(2)(3^2)(2^4) = (2^5)(3^2)$ formas.
En el caso 1 sólo hay una manera de elegir los asientos ocupados por los franceses y hay 6 formas de asignarle a los franceses sus asientos. En el caso 2 hay dos formas de elegir los asientos de los franceses: siguiendo las manecillas del reloj los espacios pueden ser de 1,2 y 3 lugares o de 1,3 y 2 lugares. Para cualquiera de estas 2 posibilidades hay 6 formas de sentar a los franceses, por lo tanto, hay 12 posibilidades para el caso 2. En el caso 3 hay una única manera de elegir los asientos de los franceses y estos se pueden sentar de dos formas: en el orden ABC o en el orden ACB.
En total hay $6 \cdot 2^4 \cdot 3^2 + 12 \cdot 2^4 \cdot 3^2 + 2 \cdot 2^5 \cdot 3^2 = 22 \cdot 2^4 \cdot 3^2 = 3168$ formas de sentarse.

Solución al Problema 38. Trabajaremos la ecuación módulo 9, primero observemos que:

$$20002 \equiv 4 \, (\text{mod} 9)$$

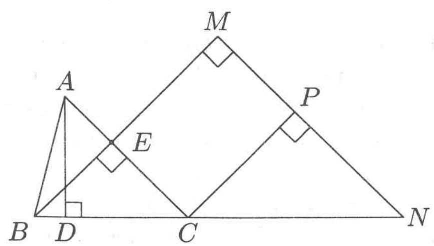
Recordemos también que los residuos de los números n^3 (mod9) son:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
n^3	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1

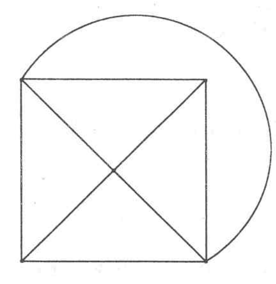
Luego, como x, y, z son enteros, los residuos módulo 9 de sus cubos sólo pueden ser 0, 1 ó -1, entonces los únicos posibles residuos módulo 9 de $x^3 + y^3 + z^3$ son: $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ y 3. Entonces, como 4 no es residuo, la ecuación no tiene soluciones enteras.

Solución al Problema 39. Como MN y AC son perpendiculares a MB, se tiene que $MN \parallel AC$. Sea P en MN tal que $CP \perp MN$, entonces $PMEC$ es un rectángulo, $PC = ME = AD$ y $\angle MPC = \pi/2 = \angle ECP$. Como $PN \| CE$

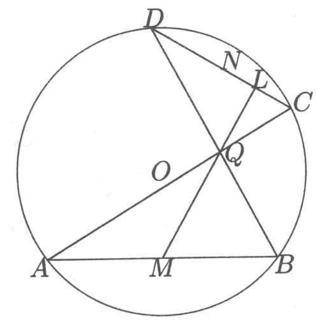
se tiene que $\angle DCE = \angle CNP$, y entonces los triángulos PNC y DCA tienen todos sus ángulos iguales y un lado igual, por tanto, son congruentes y entonces $NC = CA$. Luego el triángulo NCA es isósceles.



Solución al Problema 40. Observemos que si construimos una serie de vías como se pide tendremos al final una gráfica con 5 vértices y vías que no se cruzan, dando una gráfica plana. Para una gráfica de este tipo hay una fórmula debida a Euler que relaciona el número de vértices V, el número de aristas A y el número de caras C, a saber: $V - A + C = 2$.
Como en este caso cada cara tiene 3 o más aristas y como cada arista es frontera de dos caras tenemos que $2A \geq 3C$. Luego $2A \geq 3C = 3(A - V + 2)$ y entonces $A \leq 3V - 6$. Si $V = 5$ se debe tener que $A \leq 15 - 6 = 9$, luego 9 es el máximo de vías que se pueden construir. El siguiente dibujo muestra que sí es posible construir 9 vías entre las 5 ciudades.

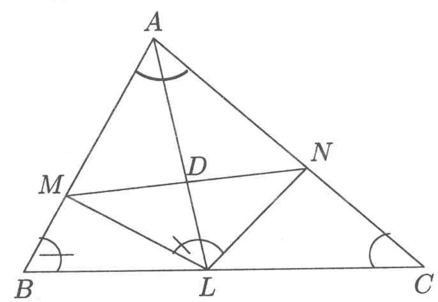


Solución al Problema 41. Si N es el punto medio CD se tiene que los triángulos rectángulos AMO y OND son congruentes (tienen lados 3, 4 y 5). Luego $\angle AQB = \frac{1}{2}\angle AOB + \frac{1}{2}\angle COD = \angle AOM + \angle DOM = 90°$, entonces ABQ es un triángulo rectángulo.
Ahora, si M es el punto medio de AB, se tiene que $\angle QAM = \angle MQA$.
Veamos ahora que los triángulos CQD y CLQ son semejantes (donde L es la intersección de QM con CD) , lo que implicará que QL es perpendicular a CD. Son semejantes por tener el ángulo C en común y porque $\angle CDQ = \angle CQL$. En efecto $\angle CDQ = \angle QAB$ (ya que abren el mismo arco de círculo) y $\angle QAB = \angle QAM = \angle MQA = \angle CQL$ por ser opuestos por el vértice.



Solución al Problema 42. Los triángulos ALN y ACL son semejantes, por lo que: $AL^2 = AN \cdot AC$.
También ALM y ABL son semejantes por lo que: $AL^2 = AM \cdot AB$.
Luego

$$AL^4 = AB \cdot AC \cdot AN \cdot AM. \quad (1)$$



Por otro lado el cuadrilátero $AMLN$ es cíclico ya que $\measuredangle MAN + \measuredangle MLN = 180°$, luego los ángulos $\measuredangle AMN$ y $\measuredangle ALN$ son iguales y entonces son semejantes los triángulos ADM y ANL, por lo que:

$$AD \cdot AL = AN \cdot AM. \quad (2)$$

De (1) y (2) tenemos que $AL^3 = AB \cdot AC \cdot AD$.

Solución al Problema 43. Trace desde Q la tangente a la circunferencia de centro A y radio 1, y sea P' el punto de intersección de ésta con BC. Veamos que $\measuredangle P'AQ = 45°$, lo que implicará que $P' = P$, con lo que se justificará la parte (a).
Sea T el punto de tangencia, como $TQ = QD$ se tiene que los triángulos rectángulos AQD y AQT son congruentes, por lo que $\measuredangle TAQ = \measuredangle DAQ = \beta$.

Análogamente, $\measuredangle BAP' = \measuredangle TAP' = \alpha$ y como $2\alpha + 2\beta = 90°$ tenemos que $\measuredangle P'AQ = \alpha + \beta = 45°$.
Del triángulo rectángulo ATE tenemos que $AE = \frac{1}{\cos 2\alpha}$.

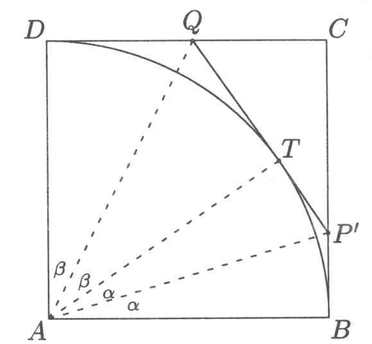
Del triángulo rectángulo ATF tenemos que $AF = \frac{1}{\cos 2\beta}$.

Luego, $AE + AF = \frac{1}{\cos 2\alpha} + \frac{1}{\cos 2\beta} = \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{\cos 2\alpha \ \cos 2\beta}$.
Como $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ tenemos que $\frac{1}{ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2}$, esta desigualdad aplicada a la identidad anterior nos da:

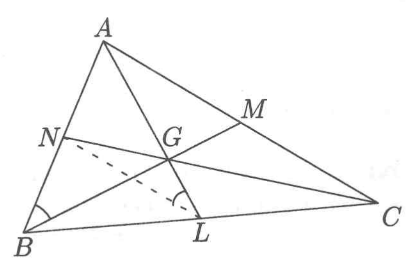
$$AE + AF \geq \frac{4}{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}$$

Como la función $\cos x$ satisface que $\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{\cos x + \cos y}{2}$, tenemos:

$$AE + AF \geq \frac{4}{\cos 2\alpha + \cos 2\beta} \geq \frac{2}{\cos\left(\frac{2\alpha+2\beta}{2}\right)} = \frac{2}{\cos 45°} = 2\sqrt{2}.$$



Solución al Problema 44. Sea G el centroide, es decir, el punto de intersección de las medianas AL, BM y CN.



Como LN es paralela a CA, tenemos que $\measuredangle LAC = \measuredangle ALN$.

Luego, $\measuredangle MBA = \measuredangle LAC = \measuredangle ALN \Leftrightarrow BLGN$ es cíclico $\Leftrightarrow \measuredangle CNA = \measuredangle ALB$.

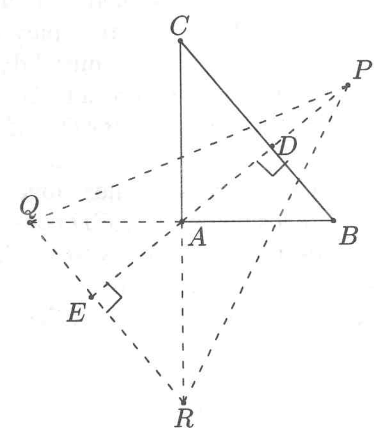
Solución al Problema 45. Observemos primero que:

$$\frac{a^2}{a+b} = \frac{a(a+b)-ab}{a+b} = a - \frac{ab}{a+b}$$

Como $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, tenemos que $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}$, luego $-\frac{ab}{a+b} \geq -\frac{a+b}{4}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} &= \left(a - \frac{ab}{a+b}\right) + \left(b - \frac{bc}{b+c}\right) + \left(c - \frac{ca}{c+a}\right) \\
&\geq a+b+c - \left(\frac{a+b}{4} + \frac{b+c}{4} + \frac{c+a}{4}\right) \\
&= \frac{a+b+c}{2} = 1.
\end{aligned}$$

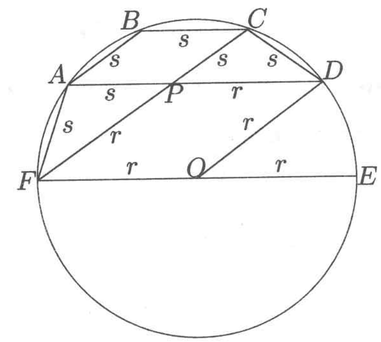
Solución al Problema 46. Sea A el ángulo recto. Por construcción $AQ = AB$ y $AR = AC$, además como $\measuredangle CAB = \pi/2 = \measuredangle QAR$, los triángulos ABC y AQR son congruentes y de lados paralelos, por lo que BC y RQ son iguales y paralelos. Como sabemos que $AP \| BC$ resulta que $AP \perp RQ$.



Sean D y E las intersecciones de AP con BC y RQ respectivamente. AE es altura del triángulo AQR, y $AD = AE$. Por construcción $AD = DP$, entonces $PE = 3AD$. Calculemos el área del triángulo PQR : $(PQR) = \frac{1}{2}RQ \cdot PE = \frac{1}{2}RQ \cdot (3DA) = \frac{3}{2}BC \cdot AD = 3\,(ABC)$. Entonces

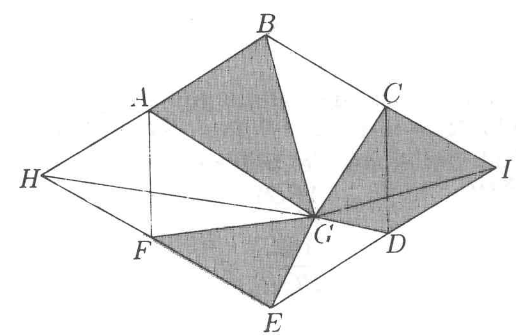
$$\frac{(ABC)}{(PQR)} = \frac{1}{3}.$$

Solución al Problema 47. Tomemos el trapecio $ABCD$ inscrito en la circunferencia y tracemos otro trapecio $ABCF$ congruente al $ABCD$, como se muestra en la siguiente figura.



Llamemos P al punto de intersección de las líneas AD y CF. Como $ABCP$ resulta ser un paralelogramo $AP = PC = s$. Y entonces $FP = PD = r$. Si P resulta el centro de la circunferencia entonces se tendría que $s = r$, lo cual no es posible por hipótesis en el problema. Por lo tanto, al unir los puntos F y D al centro O de la circunferencia, obtenemos un paralelogramo $FPDO$. Al prolongar la línea FO hasta cortar nuevamente la circunferencia en E, se tiene que $DE = AF = s$, por ser AD y EF cuerdas paralelas. Como EF es un diámetro tenemos que la figura $ABCDEF$ es la mitad de un decágono regular de lado s. Así que bastará encontrar los ángulos internos del decágono, lo que nos da que: $\measuredangle ABC = \measuredangle BCD = 144°$ y que $\measuredangle BAD = \measuredangle ADC = 36°$.

Solución al Problema 48. Consideremos el hexágono $ABCDEF$ coloreado como indica el problema. Sobre los lados AF y CD construimos los triángulos equiláteros AFH y CID respectivamente, como se ve en la figura, sus áreas son iguales. En el triángulo BGH tenemos que $(AHG) = (BAG)$ por tener la misma base y la misma altura. Análogamente, $(CBG) = (CIG)$, $(DIG) = (EDG)$ y $(FEG) = (HFG)$.



Luego $(AHFG) + (EDG) + (CBG) = (CGDI) + (BAG) + (FEG)$.

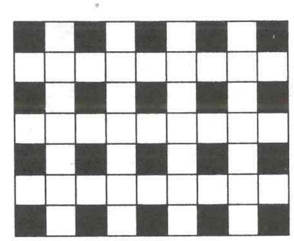
Si restamos de esta ecuación las áreas que no nos interesan (los triángulos que construimos al principio), tenemos que:
$(AHFG)-(AFH)+(EDG)+(CBG)=(CGDI)-(CID)+(BAG)+(FEG)$,
luego, $(AFG)+(EDG)+(CBG)=(DCG)+(BAG)+(FEG)$.

Solución al Problema 49. Es claro que a quien más dulces le tocan es al niño número 20, de hecho, en cada paso es al último que se le da dulce. Hallar los que reciben la segunda cantidad mayor de dulces es más difícil. En el paso k la maestra le da dulces a los niños cuyo número es de la forma $jk \pmod{20}$ con j entero. Entonces, el número de dulces que le tocaron al niño de número m, es igual al número de valores k, $1 \leq k \leq 20$, para los cuales existe j tal que $m \equiv jk \pmod{20}$. Sea d el máximo común divisor de k y 20. La congruencia es imposible si m no es múltiplo de d. Si sí lo es, la congruencia equivale a $\frac{m}{d} \equiv j\frac{k}{d} \pmod{\frac{20}{d}}$. Esta última siempre tiene solución para j puesto que $\frac{k}{d}$ y $\frac{20}{d}$ son primos relativos. En resumen, el número de dulces que le tocan al niño m es igual al número de ks, $1 \leq k \leq 20$, tales que $\text{mcd}(k,20)|m$. Como necesariamente $\text{mcd}(k,20)|20$, la condición $\text{mcd}(k,20)|m$ es equivalente a $\text{mcd}(k,20)|\text{mcd}(m,20)$. Es decir, al niño m le toca la misma cantidad de dulces que al niño de número $\text{mcd}(m,20)$. Por eso, podemos limitarnos a revisar las m que dividen a 20 para hallar las cantidades de dulces. Es fácil calcular el número de ks, $1 \leq k \leq 20$, tales que $\text{mcd}(k,20)|m$ para los divisores de 20:

m	1	2	4	5	10	20
Número de dulces	8	12	16	10	15	20

El segundo número mayor de dulces recibidos es 16 y los niños que reciben 16 dulces son los que tienen un número cuyo máximo común divisor con 20 es 4, a saber: 4, 8, 12 y 16.

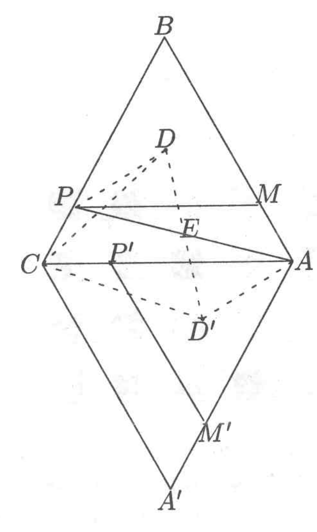
Solución al Problema 50. La estrategia que deberá seguir el primer jugador, es repetir la última jugada del segundo jugador.
Para explicar esto, sólo basta colorear el tablero de la siguiente manera:



Así, con la estrategia descrita, como el primer jugador siempre comienza en una casilla , (por la paridad del tablero) podemos asegurar que siempre llegará en sus turnos a una casilla de las que quedaron coloreadas, y que llegará primero a la casilla superior derecha del tablero, puesto que está coloreada también. El segundo jugador solamente podrá llegar en sus turnos a casillas blancas, jamás podrá llegar a las casillas coloreadas.

Solución al Problema 51. Sean $n, n+1, \ldots, n+9$ diez enteros consecutivos. Si dos de ellos, $n+i$, $n+j$ $(0 \leq i < j < 10)$, tienen divisor primo p en común, entonces $p|(n+j)-(n+i)=j-i$. Ahora bien, $j-i$ está entre 1 y 8, de modo que p sólo puede ser 2, 3, 5 ó 7. Por lo tanto, si $n+i$ no es múltiplo de 2, 3, 5 ó 7, $n+i$ será primo relativo con los otros nueve de los enteros consecutivos. Entonces basta para cada n dar una i, $0 \leq i < 10$, tal que $n+i$ no sea múltiplo de 2, 3, 5 ó 7. Para eso sólo necesitamos tomar en cuenta el valor de n módulo $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$, así que basta hallar una i adecuada para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 209$. Si n es un primo mayor que 7, podemos tomar $i = 0$. Eso nos da una i para $n =$ 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199. Si $i = 0$ funciona para $n = m$, entonces $i = k$ funciona para $n = m - k$ con $0 < k < 10$, por eso, donde en la lista anterior los "huecos" sean de longitud 10 o menos podemos hallar una i apropiada para n del "hueco". Hay sólo 3 huecos de longitud mayor que 10: del principio al 11, del 113 al 127, del 199 al final. Los podemos llenar notando que $i = 0$ funciona también para $n =$ 1, 121, 209. Esto concluye la prueba.

Solución al Problema 52. Cada punto X del plano lo giramos 60^o alrededor de C (en el sentido de las manecillas del reloj) para obtener X', por ejemplo, $B' = A$. Por la construcción, CDD' es equilátero. Probaremos que E es el punto medio de DD', de modo que los ángulos de CDE son 30^o, 60^o y 90^o.



Si probamos que $PDAD'$ es un paralelogramo habremos terminado (porque las diagonales de un paralelogramo se bisecan). $P'D'$ hace un ángulo de 60^o con PD, así que $\measuredangle P'D'A = 120^o$ y $PD \| D'A$. Además, es claro que $PD = D'A$. Por lo tanto, $PDAD'$ es un paralelogramo, que es lo que nos faltaba probar.

Solución al Problema 53. Queremos hallar las n tales que $2n^3 \equiv 1 (\text{mod } 1999)$. Como $2 \cdot 1000 \equiv 1$ (las congruencias siempre serán módulo 1999), esto equivale a $n^3 \equiv 1000$. Factorizando, esto es $(n-10)(n^2+10n+100) \equiv 0$. Como 1999 es primo, o bien $n \equiv 10$, o bien $n^2 + 10n + 100 \equiv 0$.
Pero $n^2 + 10n + 100 = (n+5)^2 + 75$, por lo que $n^2 + 10n + 100 \equiv 0$ si y sólo si $(n+5)^2 \equiv -75$.
Veamos ahora los números $1999k - 75$, buscando un cuadrado perfecto. El primero es $1999 \cdot 4 - 75 = 89^2$.
Entonces debemos resolver $(n+5)^2 \equiv 89^2$, es decir, $(n+5-89)(n+5+89) \equiv 0$.
Las soluciones son $n \equiv -94$ y $n \equiv 84$. Por lo tanto, las soluciones de $2n^3 \equiv 1$ son las $n \equiv 10, 84$ ó -94 (mod 1999).

Solución al Problema 54. El mínimo es $\binom{11}{5}$ cerraduras.
Veamos primero que se necesita al menos ese número de cerraduras. Para cada conjunto A de 5 miembros del comité debe haber al menos una cerradura para la que ninguno de los 5 tenga llave (de lo contrario podrían abrir la caja fuerte), sea c_A una de esas cerraduras. Si hay menos de $\binom{11}{5}$ ce-rraduras, debe haber dos conjuntos distintos de 5 miembros del comité, digamos A y B, tales que $c_A = c_B$. Debe haber al menos un miembro del comité en B que no esté en A, digamos que es Gertrudis. Entonces, $A \cup \{\text{Gertrudis}\}$ es un conjunto de 6 miembros del comité que no pueden abrir la caja fuerte pues ninguno tiene llave para la cerradura $c_A = c_B$. Por lo tanto, debe haber al menos $\binom{11}{5}$ cerraduras.
Ese número es suficiente, una manera de verlo se presenta a continuación. Supongamos que son $\binom{11}{5}$ cerraduras. Como hay el mismo número de cerraduras que de conjuntos de 5 miembros del comité, podemos establecer una correspondencia entre las cerraduras y los conjuntos de 5 miembros del comité. Sea c_A la cerradura correspondiente al conjunto A. Asignamos llaves a los miembros del comité así: a x le asignamos las llaves de las cerraduras c_A tales que $x \notin A$ (así a cada quien le tocan $\binom{10}{5}$ llaves). Cada vez que se junten 5 miembros del comité, no pueden abrir la cerradura: si A es el conjunto de los 5, ninguno tiene la llave de la cerradura c_A. También, cada vez que se juntan 6, pueden abrirla: en efecto, si c_A es una cerradura, de los 6 miembros reunidos debe haber alguno que no pertenezca a A y él o ella tiene la llave que abre c_A.

Solución al Problema 55. Si k es el elemento mayor de un subconjunto A de 7 elementos de $\{1, 2, 3, ..., 10\}$, entonces $A \setminus \{k\} \subset \{1, 2, 3, ..., k-1\}$.

Por lo tanto hay $\binom{k-1}{6}$ subconjuntos de 7 elementos de $\{1,2,3,...,10\}$ cuyo máximo elemento es k. Cada uno de esos $\binom{k-1}{6}$ subconjuntos contribuye k a la suma, por lo que la suma deseada es:

$$\sum_{k=7}^{10} k\binom{k-1}{6} = \sum_{k=1}^{10} k \cdot \frac{(k-1)!}{6!(k-7)!} = \sum_{k=1}^{10} 7 \cdot \frac{k!}{7!(k-7)!} = 7\sum_{k=7}^{10}\binom{k}{7} = 7\binom{11}{8}.$$

(Aquí usamos la fórmula $\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$. Esto se puede probar viendo que $\binom{n+1}{m+1}$ es el número de subconjuntos de $m+1$ elementos de $\{1,2,...,n+1\}$ y que $\binom{k}{m}$ cuenta cuantos de ellos tienen como máximo elemento a $k+1$.)

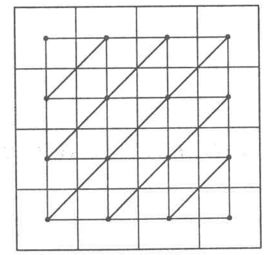
Solución al Problema 56. Hay 2^n subconjuntos de N incluyendo el conjunto vacío, 2^{n-1} de los cuales contienen a n y 2^{n-1} que no contienen a n. Además se corresponden: si A es un conjunto que tiene a n, el conjunto $A \setminus \{n\}$ no lo contiene. La suma S de un conjunto A que contiene a n es de la forma $S = n - a + b - c...$ y la suma S' de su conjunto asociado (que no contiene a n) es de la forma $S' = a - b + c.....$ Luego $S + S' = n$ y hay 2^{n-1} de estas sumas, por lo tanto, la suma total es $n \cdot 2^{n-1}$.

Solución al Problema 57. Reescribimos los números de la cuadrícula en la siguiente forma:

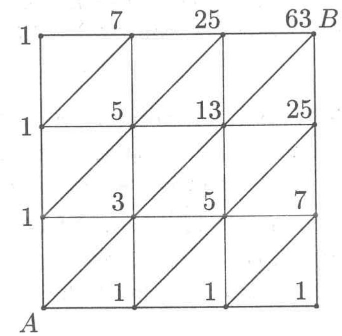
$$\begin{array}{ccccc} 0+1 & 0+2 & 0+3 & 0+4 & 0+5 \\ 5+1 & 5+2 & 5+3 & 5+4 & 5+5 \\ 10+1 & 10+2 & 10+3 & 10+4 & 10+5 \\ 15+1 & 15+2 & 15+3 & 15+4 & 15+5 \\ 20+1 & 20+2 & 20+3 & 20+4 & 20+5 \end{array}$$

Cada número es de la forma $5a+b$, con $0 \leq a \leq 4$ y $1 \leq b \leq 5$.
Después de hacer los cambios de signos tenemos que en cada renglón hay dos números negativos, si en cada renglón hacemos la suma sólo de las partes $\pm 5a$, tenemos que la suma de ese renglón es $5a$ (ya que hay tres $5a$ y dos -$5a$) y la suma de todos los renglones considerando solamente los números $\pm 5a$, es: $5+10+15+20+25 = 50$.
Ahora tomemos en consideración los números $\pm b$. En cada columna hay dos números b que cambiaron de signo y tres que no, por lo que la suma de los números de esa columna es b y la suma de las columnas considerando solamente las partes $\pm b$, es: $1+2+3+4+5 = 15$. Luego, la suma total es siempre 65.

Solución al Problema 58. Asignemos a la cuadrícula una red de caminos que conectan los cuadritos adyacentes como señala el problema. A los nodos de la línea inferior y los de la lateral izquierda se puede llegar de una única manera. A los demás se puede llegar a través de 3 nodos "anteriores" y el



número de maneras de llegar es igual a la suma del número de maneras de llegar a los nodos "anteriores".
Ahora podemos ir señalando en cada nodo el número de maneras de llegar a él, como muestra la figura.



Solución al Problema 59. Observemos primero que los números $2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$ y $2^a 3^b 5^c$ cuando se multiplican dan un cuadrado perfecto si y sólo si $\alpha \equiv a, \beta \equiv b, \gamma \equiv c \pmod 2$. Cada tercia de enteros (α, β, γ) es "congruente" módulo 2 a una de las siguiente 8 tercias: $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,0)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$. Por el principio de las casillas si tenemos 11 números de la forma $2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$ hay 2 cuyas ternas (α, β, γ) son congruentes, a estos dos números digamos a y b, los separamos. De los 9 restantes, otra vez por el principio de las casillas, hay 2 con ternas congruentes digamos que sean c y d, como ab y cd son cuadrados perfectos también lo es $abcd$.

Solución al Problema 60. Sean $a = AB = CD = DE$ la longitud del lado, $b = AC = CE$ la longitud de la diagonal menor y $c = AD = AE$ la longitud de la diagonal mayor. Por el Teorema de Ptolomeo aplicado al cuadrilátero

$ACDE$, tenemos que $ab + ac = bc$, ecuación que al dividir entre abc, da el resultado.

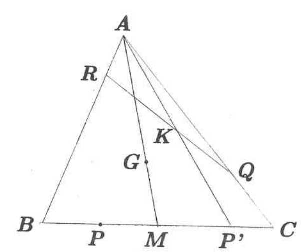
Soluciones a los Problemas de Concursos Nacionales

Solución al problema 61. Para $p = 5$ tenemos que $8p^4 - 3003 = 1997$, que es primo. Ahora veamos que es la única posibilidad. Sea p un número primo distinto de 5 y supongamos que $8p^4 - 3003$ es primo. Ahora procedamos de la siguiente manera: tenemos que

$$8p^4 - 3003 \equiv 3p^4 - 3 \equiv 3\left(p^4 - 1\right) \pmod{5},$$

Pero $p^4 - 1 \equiv 0 \pmod{5}$ para cualquier primo $p \neq 5$ (Esto se comprueba fácilmente analizando los posibles residuos de p), así que $8p^4 - 3003$ es divisible entre 5 y, como estamos suponiendo que es primo, la única posibilidad es $8p^4 - 3003 = 5$, lo cual es un absurdo pues $\frac{3008}{8} = 376$ no tiene raíz cuarta entera.

Solución al problema 62. Usando el teorema de Tales tenemos que $QP' \parallel AB$, puesto que estos segmentos están cortados por las transversales CA y CB, y se tiene que $\frac{CQ}{QA} = \frac{CP'}{P'B}$. Entonces los triángulos CQP' y CAB son semejantes con razón de semejanza $\frac{CQ}{QA}$; de aquí que $QP' = AR$. Tenemos entonces que los triángulos AKR y $P'KQ$ son iguales, de donde K es el punto medio de AP'. Sea M el punto medio de BC.



Aquí podemos proceder de dos maneras:
1^{era} *forma.* Notemos que M también es punto medio de PP' y como $AG = 2GM$, entonces G también es centroide de $\triangle APP'$, de donde la mediana PK pasa por G, y así P, G y K están alineados.
2^{a} *forma.* Usemos el teorema de Menelao en el $\triangle AMP'$ para deducir la colinealidad de P, G y K:

$$\frac{AG}{GM} \cdot \frac{MP}{PP'} \cdot \frac{P'K}{KA} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 = -1.$$

Solución al problema 63. (i) A continuación se muestra una posibilidad para acomodar los números de manera que en cuadros adyacentes la diferencia de los números que aparecen es menor o igual a 4.

1	3	6	10
2	5	9	13
4	8	12	15
7	11	14	16

(ii) Supongamos que sí es posible colocar los números y analicemos como deben estar acomodados. En la lista de seis números $1, 4, 7, 10, 13, 16$, entre dos números consecutivos hay una diferencia de 3, de manera que en cualquier colocación de los números en la cuadrícula de 4×4 en la que las diferencias en casillas adyacentes fueran menores o iguales que 3, los números 1 y 16 deberían estar a una separación de, por lo menos, 6 casillas; esto sólo es posible si uno está en una esquina y el otro en cualquiera de los tres cuadritos de la esquina opuesta. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que 1 aparece en la esquina superior izquierda; entonces el 16 debe quedar en cualquiera de las 3 casillas más lejanas, como se indica en el esquema siguiente.

1			
			16
		16	16

Supongamos que 16 no aparece en la esquina. Esto forzaría a que en cualquier "camino" que usara seis casillas adyacentes entre los cuadritos donde se encontrarán el 1 y el 16, aparecieran exactamente los números de la lista; sin embargo, hay más de un camino entre las dos casillas (ver el ejemplo en la figura, abajo), lo que forzaría a que hubiera repetición de números.

1	4	7	10
4	7	10	13
		13	16

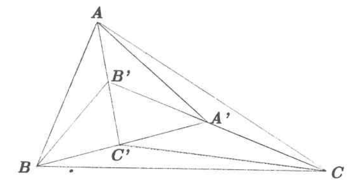
Entonces, el 16 aparece en la esquina inferior derecha. Ahora observamos que en dos cuadritos diagonales que compartan un vértice, la diferencia máxima que puede haber es 5, puesto que en cuadros adyacentes la diferencia máxima debe ser 6, pero los números no pueden estar repetidos. Como del 1 al 16 se llega en 4 pasos con diferencias de 5: $1 - 6 - 11 - 16$, la única posibilidad es que estos números queden en la diagonal, como se indica en la figura abajo. Además, en las casillas adyacentes al 1 deben aparecer el 3 y 4, puesto que con ambos 1 y 6 la diferencia debe ser a lo más 3. Sin pérdida de generalidad aparecen como en el esquema.

1	3		
4	6		
		11	
			16

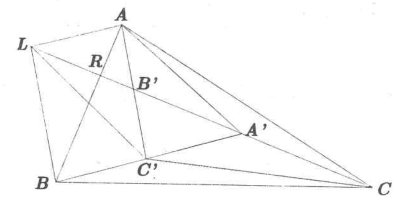
Entonces las casillas que sobran para acomodar el 2 quedan todas a una distancia a lo más de 4 de la casilla donde está el 16; sin embargo, para llegar del 2 al 16 con diferencia a lo más de 3 se necesitan por lo menos 4 números intermedios, así que no es posible la colocación.

Solución al problema 64. Supongamos que tenemos 6 puntos no coplanares en el espacio de manera que no hay tres alineados. Tenemos varios casos:
(I) Si 5 de ellos son coplanares. Entonces estos determinan un plano y el otro punto determina un plano más con cada pareja de los coplanares; como son $\binom{5}{2} = 10$ parejas, en total se determinan 11 planos.
(II) Si no hay 5 coplanares pero sí 4. Sean A, B, C y D los cuatro puntos coplanares, sea P el plano que determinan y sean X y Y los otros puntos. Tenemos tres subcasos:
(IIa) Si X y Y no son coplanares con ninguna pareja de A, B, C y D. Entonces cada pareja de A, B, C y D determina un plano con cada uno de X y Y y además tenemos P, así que en este caso se determinan por lo menos $1+2\binom{4}{2} =$ 13 planos.
(IIb) Si X y Y son coplanares con exactamente una de las parejas de A, B, C y D, digamos con (A, B). Entonces tenemos $2 + 2\left[\binom{4}{2} - 1\right] = 12$ planos, pues cada uno de X y Y determina un plano con cada una de las parejas de A, B, C y D distintas de (A, B) (esto es, tenemos los planos: (A, B, C, D), (X, Y, A, B), (X, A, C), (X, A, D),(X, B, C) , (X, B, D) , (X, C, D), (Y, A, C), (Y, A, D), (Y, B, C), (Y, B, D) y (Y, C, D).
(IIc) Si X y Y son coplanares con dos de las parejas de A, B, C, y D. Observemos que las parejas deben ser ajenas, pues X y Y no pertenecen a P. Sin pérdida de generalidad, las parejas son (A, B) y (C, D). Este caso es como el anterior sólo que aquí hay un plano repetido: (X, C, D) coincide con (Y, C, D), así que en este caso son 11 planos.
(III) Si no hay 4 coplanares. En este caso, cada terna determina un plano, así que son $\binom{6}{3} = 20$.
Hemos analizado todos los casos y con ello probado que el menor número de planos posible es 11.

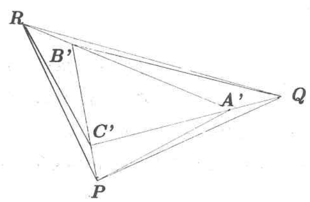
Solución al problema 65. Observemos primero que el triángulo ABC se parte en los 7 triángulos de la misma área que se indican en la figura. (Por ejemplo, $(AB'A') = (AA'C)$ pues $B'A' = A'C$ y la altura en A es la misma).



Construyamos un paralelogramo $BLAC'$, como se indica en la figura.



Entonces, como $LA = BC' = C'A'$, también $LAA'C'$ es paralelogramo, así que sus diagonales se intersectan en el punto medio que es B' (pues $AB' = B'C'$). También las diagonales de $LABC'$ se intersectan en su punto medio, así que en el triángulo ALC', AR es mediana, pero como también lo es LB', tenemos que R es centroide de este triángulo, de donde $RB' = \frac{1}{3}LB' = \frac{1}{3}B'A'$. Análogamente, $C'P = \frac{1}{3}B'C'$ y $A'Q = \frac{1}{3}C'A'$. Partamos el triángulo PQR como se indica.



Como antes, los triángulos $RB'C'$, $PA'C'$ y $QA'B'$ tienen área $\frac{1}{3}\,(A'B'C')$ y los triángulos PRC', PQA' y RQB' tienen área $\frac{1}{9}\,(A'B'C')$. Entonces

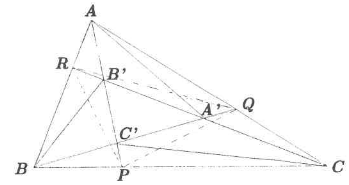
$$(PQR) = (A'B'C') + 3\left(\frac{1}{3}\,(A'B'C')\right) + 3\left(\frac{1}{9}\,(A'B'C')\right)$$

$$= \frac{7}{3}\,(A'B'C') = \frac{7}{3}\cdot\frac{1}{7}\,(ABC) = \frac{1}{3}\,(ABC)$$

Solución alternativa. Aplicando el Teorema de Menelao al triángulo ABC' y a la recta RA' tenemos que:

$$-1 = \frac{AR}{RB}\cdot\frac{BA'}{A'C'}\cdot\frac{C'B'}{B'A} = \frac{AR}{RB}\cdot(-2)\cdot 1,$$

de donde $\frac{AR}{RB} = \frac{1}{2}$; por tanto $AR = \frac{1}{3}AB$. Análogamente $AQ = \frac{2}{3}AC$.



Ahora,

$$(ARQ) = \frac{AQ \cdot AR \cdot sen\measuredangle A}{2} = \frac{\frac{1}{3}AB \cdot \frac{2}{3}AC \cdot sen\measuredangle A}{2} = \frac{2}{9}(ABC).$$

Análogamente, $(PQC) = \frac{2}{9}(ABC)$ y $(BRP) = \frac{2}{9}(ABC)$. Entonces

$$(PQR) = \left(1 - 3 \cdot \frac{2}{9}\right)(ABC) = \frac{1}{3}(ABC)$$

Solución al problema 66. Observemos que si n es cualquier natural, entonces $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$, de donde

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} \qquad (*).$$

Usando esto y que $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6} = 1$, podemos hacer las sustituciones $\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$ por $\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$ y $\frac{1}{6}$ por $\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$, para obtener una nueva expresión en la que los denominadores son más grandes. Luego podemos repetir el procedimiento hasta lograr una expresión en la que el denominador más chico sea 5 y no haya repetidos:

$$\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{6}\right) + \left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{12}\right) + \left(\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{42}\right) = 1,$$

$$\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{12}\right) + \left(\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{42}\right) + \left(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{20}\right) + \left(\tfrac{1}{13}+\tfrac{1}{156}\right) + \left(\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{56}\right) + \left(\tfrac{1}{43}+\tfrac{1}{1806}\right) = 1.$$

Ahora sólo sustituimos $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{20}$ y los ordenamos:
$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{20}+\frac{1}{21}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{43}+\frac{1}{56}+\frac{1}{156}+\frac{1}{420}+\frac{1}{1806} = 1.$
Hemos logrado entonces una expresión de las requeridas. Para probar que hay una infinidad basta observar que al sustituir el término que tenga el denominador mayor (usando (*)) se obtienen denominadores aún mayores.

Solución al problema 67. Claramente 10 es suertudo y como $1^2+3^2 = 3^2+1^2 = 10$, tenemos que 13 y 31 también lo son. Sucede que $3^2+2^2 = 13$, por lo que 32 es suertudo. Entonces, 31 y 32 son dos suertudos consecutivos y por lo tanto para cualquier $N \geq 1$,

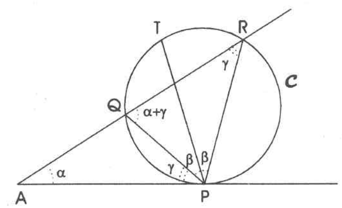
$$\underbrace{111\ldots1}_{31 \text{ unos}}\underbrace{000\ldots0}_{N\text{ceros}} \text{ y } \underbrace{111\ldots1}_{31 \text{ unos}}\underbrace{000\ldots0}_{N-1 \text{ ceros}}1$$

son dos enteros suertudos consecutivos.
Alternativamente, si n y $n+1$ son ambos suertudos, también lo son

$$\underbrace{111\ldots1}_{n \text{ unos}}0 \text{ y } \underbrace{111\ldots1}_{n+1 \text{ unos}}.$$

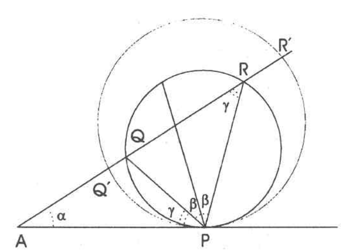
Y repitiendo la construcción, hallamos una infinidad de parejas de enteros suertudos consecutivos.

Solución al Problema 68.



Sea A el punto de donde parten los rayos, β el ángulo QPT que es igual al ángulo TPR y γ el ángulo QRP que es igual al ángulo QPA. El ángulo PQR es un ángulo externo al triángulo APQ, y es igual a $\alpha+\gamma$. Considerando el triángulo PQR, $\alpha+2\beta+2\gamma=\pi$, de donde $\beta+\gamma=\frac{\pi-\alpha}{2}$, y entonces la figura buscada consta de todos los puntos del rayo que parte de P y que forma con m un ángulo $\frac{\pi-\alpha}{2}$, a partir de la intersección de este rayo con m.
Solución alternativa para ver la mediada del ángulo APT. Supongamos que una circunferencia Γ es tangente a l en P y corta a m en Q y en R y que otra circunferencia Γ' también es tangente a l en P y que corta a m en Q' y en R' con los puntos sobre m en el orden Q', Q, R, R'. Sea A el punto del que parten los rayos l y m. Como l es tangente a Γ, $\angle QPA = \angle QRP$ y análogamente, $\angle Q'PA = \angle Q'R'P$. Entonces,

$$\angle QPQ' = \angle QPA - \angle Q'PA = \angle QRP - \angle QR'P = \angle RPR'.$$



Entonces, los ángulos QPR y $Q'PR'$ tienen la misma bisectriz y por lo tanto la bisectriz de QPR no depende de la circunferencia Γ que se trace. Podemos entonces calcular el ángulo entre la bisectriz y el rayo tomando la circunferencia que es tangente a l en P y tangente a m en $Q = R$. Como APQ es un triángulo isósceles, el ángulo buscado es $\angle APQ = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

Solución al Problema 69. Con triángulo nos referimos a un triángulo con vértices en el octágono y con ángulo, a dos lados de un triángulo. Un ángulo es bicolor si sus lados son de color distinto. Nos fijamos en un vértice del octágono, si k de las líneas que lo unen con los otros vértices son de un color (y $7-k$ del otro), entonces es vértice de $k(7-k) \leq 3 \cdot 4$ ángulos bicolor. Luego el número de ángulos bicolor es $\angle_b \leq 8 \cdot 3 \cdot 4$. Cada triángulo bicolor tiene exactamente dos ángulos bicolor, así el número de triángulos bicolor es $\frac{1}{2}\angle_b$ y por lo tanto el número de triángulos monocromáticos es $\triangle_m = \binom{8}{3} - \frac{1}{2}\angle_b \geq \binom{8}{3} - \frac{1}{2}8 \cdot 3 \cdot 4 = 8$. Entonces siempre hay 8 triángulos monocromáticos (se pide probar que hay al menos 7).
Solución alternativa. Probaremos primero que en un hexágono se forman dos triángulos monocromáticos. Desde luego hay uno: nos fijamos en un vértice A cualquiera del hexágono, de él salen cinco líneas de las cuales al menos tres son de un color, supongamos que AB, AC y AD son rojas. Si una de BC, CD o DB fuera roja, entonces uno de los triángulos ABC, ACD o ABD sería un triángulo rojo y si las tres son negras, BCD sería un triángulo negro. De cualquier forma hay un triángulo monocromático, sea V uno de sus vértices. Los otros cinco vértices del hexágono forman un pentágono, si en el pentágono hay un triángulo monocromático, en el hexágono hay dos. Si en el pentágono no hay un triángulo monocromático, de cada vértice deben salir dos líneas de cada color y el pentágono se puede descomponer en dos ciclos: uno rojo y uno negro. Al considerar el vértice V es fácil ver que en este caso también hay dos triángulos monocromáticos.
Ahora veremos que en un heptágono se forman cuatro triángulos monocromáticos. Sean $ABCDEFG$ los vértices del heptágono. En el hexágono $BCDEFG$ sabemos que hay dos triángulos monocromáticos, supongamos que B es uno de los vértices de uno de esos triángulos. Como en el hexágono $ACDEFG$ hay dos triángulos monocromáticos, en el heptágono hay tres: esos dos y el que tiene a B como vértice. Algún vértice del heptágono tiene que ser vértice de dos de esos triángulos, supongamos que es G. En el hexágono $ABCDEF$ hay dos triángulos monocromáticos y por lo tanto en el heptágono hay cuatro: esos dos y los dos de vértice G.
Finalmente, mostraremos que en un octágono se forman siete triángulos monocromáticos. Sea $ABCDEFGH$ el octágono. En el heptágono $BCDEFGH$ hay cuatro triángulos monocromáticos, dos de ellos comparten un vértice, digamos B. Ahora, en el heptágono $ACDEFGH$, hay cuatro triángulos monocromáticos distintos de los otros dos. Un vértice del octágono debe estar

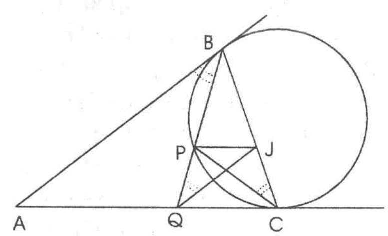
en tres de los seis triángulos monocromáticos, digamos H. En el heptágono $ABCDEFG$ hay cuatro triángulos monocromáticos y con los tres que tienen a H como vértice tenemos siete triángulos monocromáticos.

Solución al Problema 70. Los enteros de esa forma son los del 5 al 45. Con $a_1 = a_2 = \ldots = a_9 = 1$, obtenemos el mayor de esos números, 45. Con $a_1 = a_2 = \ldots = a_9 = 9$, obtenemos el menor, 5. Como $\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\ldots+\frac{7}{7} = \frac{28}{7} = 4$, se pueden escribir $6, 7, 8$ y 9 así:

$$\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\ldots+\frac{7}{7}+\frac{8}{a_8}+\frac{9}{a_9} = \begin{cases} 6 & \text{si } a_8 = 8, a_9 = 9 \\ 7 & \text{si } a_8 = 4, a_9 = 9 \\ 8 & \text{si } a_8 = 8, a_9 = 3 \\ 9 & \text{si } a_8 = 2, a_9 = 9 \end{cases}$$

Si tomamos cada $a_i = i$, cada fracción es 1 y obtenemos 9. Si cambiamos alguna a_i de i a 1, la suma aumenta $\frac{i}{1} - \frac{i}{i} = i-1$, entonces podemos conseguir aumentos (independientes) de $1, 2, 3, \ldots, 8$ y así formamos los números del 10 al 45.

Solución al Problema 71. Como JQ es paralela a AB, $\measuredangle JQP = \measuredangle QBA$ y $\measuredangle QBA = \measuredangle JCP$ por que abren el mismo arco en la circunferencia. Por lo tanto, $JPQC$ es un cuadrilátero cíclico.

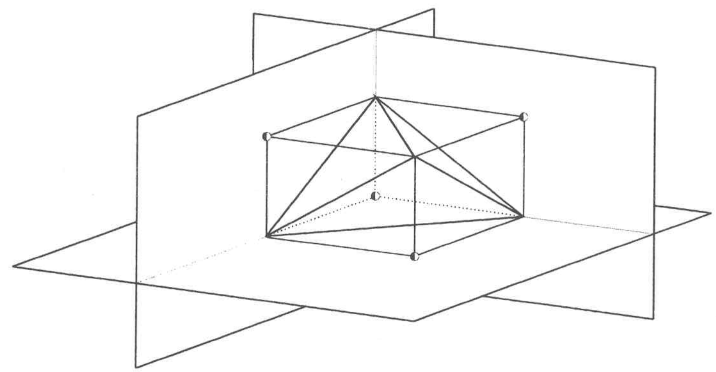


Por otro lado:
$BC^2 = AC \cdot QC$

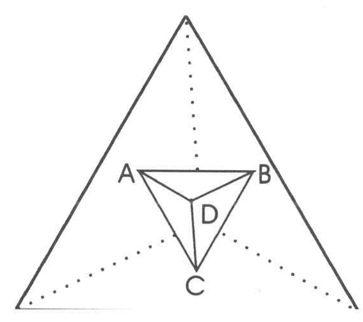
$$\begin{aligned}
\iff \quad & \frac{BC}{AC} = \frac{QC}{BC} \\
\iff \quad & \triangle BCA \sim \triangle QCB \ (\triangle BCA \text{ y } \triangle QCB \text{ comparten el ángulo } C) \\
\iff \quad & \angle PQC = \angle JCQ \ (\text{porque } \triangle BCA \text{ es isósceles}) \\
\iff \quad & JPQC \text{ es un trapecio isósceles (porque } JPQC \text{ es cíclico)} \\
\iff \quad & JP \text{ es paralelo a } QC \quad (\text{otra vez porque } JPQC \text{ es cíclico})
\end{aligned}$$

Donde usamos dos veces que los únicos trapecios cíclicos son los isósceles.

Solución al Problema 72. Para cada plano equidistante P, los cinco puntos A, B, C, D, E están en dos planos paralelos a P, dos en uno y tres en el otro. Recuerde que no hay cuatro puntos en un mismo plano.
Tomemos cuatro de los puntos digamos A, B, C, D y veamos donde puede colocarse el quinto punto E para obtener la mayor cantidad de planos equidistantes.
Si los cinco puntos se deben dividir en dos conjuntos uno de dos elementos y otro de tres, tenemos que hay 2 posibilidades: (1) que E esté en un conjunto de tres elementos, y (2) que E esté en un conjunto de dos elementos.



En el caso (1), formemos primero un paralelepípedo de caras paralelas al plano que determinan aristas opuestas del tetraedro $ABCD$. El punto E deberá unirse a un par de puntos del conjunto $\{A, B, C, D\}$ y entonces determinará un plano que será paralelo tanto al otro plano que pasa por los otros dos puntos como al plano equidistante correspondiente, esto se puede hacer de $\binom{4}{2} = 6$ maneras y los planos que se determinan así son los planos que contienen a las caras del paralelepípedo, siendo la cara paralela la otra donde se encuentran los otros dos puntos y determinando como plano equidistante el plano paralelo a los anteriores que pasa por los puntos medios de las cuatro aristas que no estan sobre los dos primeros planos, así en éste caso solamente hay tres posibles planos equidistantes y estos se logran cuando el punto E es cualquier vértice del paralelepípedo diferente de A, B, C, D.



En el caso (2), E deberá unirse a uno de los puntos A, B, C, D y los restantes 3 estarán en un plano paralelo al equidistante, esto se puede hacer de cuatro maneras y los planos donde E puede estar son los planos paralelos a las caras del tetraedro $ABCD$ que pasan por el vértice que no esta en la cara que se está considerando, estos planos forman otro tetraedro semejante al $ABCD$. Claramente E no puede estar en los cuatro planos, pero si en tres, cuando E es uno de los vértices de este nuevo tetraedro, en cuyo caso se obtienen también tres planos equidistantes.

Solución al Problema 73. El primer jugador tiene estrategia ganadora. Como 1999 es impar, el número de fichas con el lado rojo hacia arriba y el número de fichas con el lado negro hacia arriba son distintos. Entonces, el primer jugador en su turno puede hacer que el número de fichas rojas sea igual al número de fichas negras quitando de las que haya más. No importa qué haga el segundo jugador, dejará cantidades diferentes de fichas rojas y negras. Después el primer jugador vuelve a hacer que haya el mismo número de fichas rojas que negras. Como al segundo siempre le toca jugar cuando hay la misma cantidad de rojas que negras, no puede evitar dejar cantidades diferentes de fichas rojas y negras, por lo tanto gana el primero.

Solución al Problema 74. Supongamos que sí los hay, y sea p el primer primo y r la diferencia de la progresión. Así, la progresión es:

$$p, p+r, p+2r, ..., p+1998r.$$

El primo p no puede ser ninguno de los primeros primos: $2, 3, ..., 1997$, ya que si es alguno de estos entonces $p + pr$, que está en la progresión, no es primo. Luego $p \geq 1999$.

Como p es impar y $p+r$ es primo, entonces r es par. Todos los números pares son de la forma $6n$ o $6n + 2$ o $6n - 2$. Veamos ahora que r no puede ser ni de la forma $6n+2$ ni de la forma $6n-2$. En efecto, como p es primo, éste es de la forma $6k + 1$ o $6k - 1$. En cualquiera de los cuatro casos hay en la progresión un múltiplo de 3:

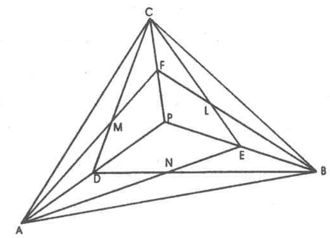
$p + r = (6k + 1) + (6n + 2)$
$p + 2r = (6k + 1) + 2(6n - 2)$
$p + 2r = (6k - 1) + 2(6n + 2)$
$p + r = (6k - 1) + (6n - 2)$.

Por lo tanto, r es de la forma $6n$ y entonces la progresión es:

$$p,\ p + 6n, ..., p + 1998(6n)$$

Pero $p \geq 1999$ y $n \geq 1$ implican que $p + 1998(6n) \geq 1999 + 11988 > 12345$. Así los números $p + jr$ no pueden ser todos menores que 12345.

Solución al Problema 75.



(a) Como en el triángulo ABP, BD y AE son medianas se tiene que N es el centroide del triángulo ABP y como las medianas dividen al triángulo en seis triángulos de la misma área se tiene que:

$$(PDNE) = \tfrac{1}{3}(ABP)$$

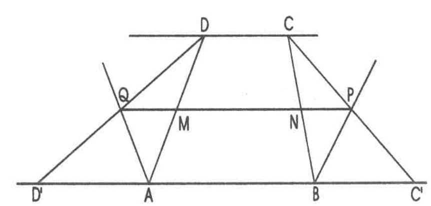
Análogamente $(PELF) = \frac{1}{3}(BCP)$ y $(PFMD) = \frac{1}{3}(CAP)$ por lo que concluimos que:

$$(DNELFM) = \tfrac{1}{3}(ABC).$$

(b) Considere el triángulo CDE. Como $\frac{CM}{MD} = \frac{CL}{LE}$ se tiene que ML y DE son paralelas, si Q es el punto de intersección de DL y EM se tiene que los triángulos QDE y QLM son semejantes, por lo que: $\frac{DQ}{QL} = \frac{EQ}{QM} = \frac{3}{2}$ esto es DL y EM se cortan en el punto Q que divide a los segmentos en razón $3:2$. Con el mismo argumento se muestra que FN y DL, se corta en un punto que los divide en razón $3:2$, luego el resultado.

Solución al Problema 76. Supongamos que no hay puntos marcados a distancia $\frac{1}{2}$ de la orilla de la cuadrícula. Probaremos que hay dos puntos marcados a distancia menor o igual que $\sqrt{2}$. Como no hay puntos marcados a distancia $\frac{1}{2}$ de la orilla, entonces todos los marcados están en la cuadrícula central de 6×6. Dividimos esta cuadrícula en 9 cuadrados de 2×2. Al haber 10 puntos marcados forzosamente habrá dos en un mismo cuadrado de 2×2. Esos dos puntos están a distancia menor o igual que $\sqrt{2}$.

Solución al Problema 77.



Sean C' y D' los puntos de intersección de CP con AB y de DQ con AB. Como AB es paralela a CD y por ser CP bisectriz tenemos que $\measuredangle PCB = \measuredangle BC'P$,

luego BCP y $BC'P$ son congruentes, por lo que son rectángulos y $CP = PC'$. Análogamente ADQ y $AD'Q$ son triángulos rectángulos congruentes por lo que $DQ = QD'$.
Entonces $PQ \parallel AB$, además si M y N son los puntos de intersección de PQ con AD y BC respectivamente, se tiene que M y N son puntos medios y que $MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$.
Como M es punto medio de la hipotenusa del triángulo ADQ tenemos que $QM = AM = \frac{1}{2}AD$, análogamente $NP = BN = \frac{1}{2}BC$, por lo tanto $PQ = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA)$.

Solución al Problema 78. Podemos acomodar un polígono ortogonal de modo que sus lados caigan sobre las líneas de una cuadrícula. Pintamos la cuadrícula como tablero de ajedrez. Como cada rectángulo de 2×1 cubre un cuadro negro y uno blanco, si el polígono ortogonal puede llenarse con rectángulos de 2×1, entonces son iguales N y B, los números de cuadros negros y blancos en el polígono. Probaremos que si todos los lados son impares, entonces $|N - B| = \frac{1}{4}n$ donde n es el número de lados del polígono. A cada cuadro negro le asignamos 4 unidades, 1 por cada lado y a cada cuadro blanco -4, -1 por cada lado. La suma de los valores de los cuadros del polígono es $4N - 4B$. Por otra parte, cada segmento de longitud 1 interior al polígono vale 0 (1 por el cuadro negro del que es lado y -1 por el blanco), de modo que el valor total del polígono es la suma de los valores de los segmentos sobre los lados. El valor de un lado impar es 1 si tiene más negros que blancos adyacentes a él y -1 en caso contrario, pero si todos los lados son impares, todos tienen el mismo valor, luego $4N - 4B$ es igual en valor absoluto al número de lados, por tanto $|N - B| = \frac{1}{4}n$.

Bibliografía

[C] Comité Organizador de la Olimpiada Matemática Mexicana, *Olimpiada de Matemáticas, 140 problemas*. Academia de la Investigación Científica, México 1993.

[G] E. Gentile, *Aritmética Elemental*, Monografía No. 25 de la Serie de Matemáticas del Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico de la OEA. Ediciones de la OEA, 1988.

[Gr] R. Grimaldi, *Matemáticas Discreta y Combinatoria.* Addison-Wesley Iberoamericana, México 1989.

[GL] V. Gusiev, V. Litvinenko, A. Mordkovich, *Prácticas para Resolver Problemas de Matemáticas, (Geometría)*. Editorial Mir, Moscú 1969.

[LM] V. Litvinenko, A. Mordkovich, *Prácticas para Resolver Problemas de Matemáticas, (Algebra y Trigonometría)*. Editorial Mir, Moscú 1989.

[NZ] I. Niven, H. Zuckerman, *Introducción a la Teoría de los Números.* Limusa-Wiley, México 1972.

[S] H. Shariguin, *Problemas de Geometría*, Colección Ciencia Popular. Editorial Mir, Moscú 1989.

[V] N. Vilenkin, *¿De Cuántas Formas? (Combinatoria)*. Editorial Mir, Moscú 1972.