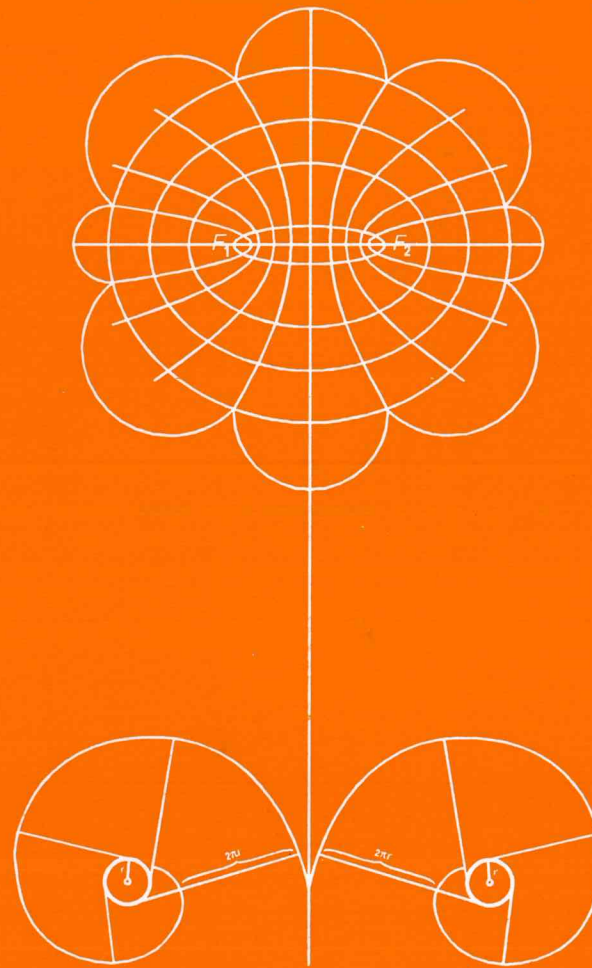


PROBLEMAS PARA LA 15a.
Olimpiada Mexicana de
MATEMATICAS
(Problemas Avanzados)



2001



Problemas para la
15^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Juan José Alba González
Omar Antolín Camarena

2001

Juan José Alba González

Estudiante de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

Omar Antolín Camarena

Estudiante de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

Contenido

Presentación	1
Etapas de la Olimpiada	2
Resumen de Resultados	2
Enunciados de los Problemas	5
Problemas de Concursos Estatales	5
Problemas de Concursos Nacionales de la OMM	13
Problemas de Olimpiadas donde participa México . . .	17
XV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas .	17
XLI Olimpiada Internacional de Matemáticas . .	18
Soluciones de los Problemas	19
Soluciones a los Problemas de Concursos Estatales . . .	19
Soluciones a los Problemas de Concursos Nacionales . .	36
Bibliografía	46

Presentación

La Sociedad Matemática Mexicana organiza la 15a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los ganadores en ella formarán las selecciones que participarán en las distintas olimpiadas internacionales del año 2002: la XLII Olimpiada Internacional que se llevará a cabo en Inglaterra durante el mes de julio, la XVI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas a celebrarse en septiembre en Uruguay y la IV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe que se llevará a cabo en México en el mes de julio.

En la 15ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas pueden participar los estudiantes de México nacidos después del 1º de agosto de 1982. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2001-2002, y para el 21 de julio del año 2002 no deberán haber iniciado estudios de nivel universitario.

Los problemas que aparecen en este folleto, aparecieron en concursos de las diferentes etapas de las olimpiadas de matemáticas. La intención del folleto es que sirva como orientación a los alumnos que desean participar en estas olimpiadas. Como se puede ver, los problemas que aparecen aquí no son ejercicios rutinarios o en los que se apliquen directamente los conocimientos que se adquieren en la escuela. Son problemas que requieren de una buena dosis de ingenio y de esfuerzo para ser resueltos. Como en todos los aspectos del aprendizaje de las matemáticas, el esfuerzo individual y el enfrentamiento solitario con los problemas son importantes, pero también es muy importante la discusión con los compañeros y los profesores.

Una forma de manifestar creatividad en matemáticas es resolviendo problemas. Otra forma, que a veces requiere de más madurez, es inventándolos. Invitamos a todos los lectores de este folleto: profesores, estudiantes, olímpicos y exolímpicos a que nos envíen problemas con solución. Las aportaciones serán consideradas para su inclusión en exámenes o futuros folletos.

Este folleto incluye problemas de los exámenes estatales de: Baja California, Chiapas, Chihuahua, Coahuila, Colima, Guanajuato, Hidalgo, Jalisco, Morelos, Puebla, Querétaro, Quintana Roo, Sinaloa, Sonora, Tabasco, Tamaulipas, Tlaxcala, Veracruz y Yucatán.

Etapas de la Olimpiada

Como ya es tradición, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas consta de tres etapas:

Exámenes Estatales. Estos exámenes servirán para formar las selecciones estatales que asistirán al Concurso Nacional.

Concurso Nacional. Este concurso se llevará a cabo en el Estado de Morelos en noviembre de 2001, y en él se elegirá a la preselección mexicana.

Entrenamientos. A los alumnos de la preselección que surjan del Concurso Nacional se les entrenará intensivamente durante el primer semestre del año 2001, también se les aplicarán exámenes para determinar a los que representarán a México en las olimpiadas internacionales.

La participación en las tres etapas mencionadas es individual.

Resumen de Resultados

En el año de 1987 la Sociedad Matemática Mexicana organizó la Primera Olimpiada Mexicana de Matemáticas. A partir de esa fecha, los concursos nacionales se han celebrado anualmente en la ciudades de Xalapa, Hermosillo, Metepec, Guanajuato, Oaxtepec, La Trinidad, Acapulco, Guadalajara, Colima, Mérida, Monterrey, Querétaro, Oaxaca y Morelia.

Los resultados de las Delegaciones Mexicanas en Olimpiadas Iberoamericanas, Internacionales y Centroamericana y del Caribe han sido los siguientes:

Olimpiada Internacional de Matemáticas

Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1988	Australia	49	37
1989	Rep. Fed. De Alemania	50	31
1990	Rep. Popular de China	54	36
1991	Suecia	55	35
1992	Rusia	56	49
1993	Turquía	73	63
1994	Hong Kong	69	65
1995	Canadá	74	59
1996	India	75	53
1997	Argentina	82	32
1998	Taiwan	75	44
1999	Rumania	81	52
2000	Corea	82	30

En 2000, la delegación que representó a México en la Olimpiada Internacional estuvo integrada por los alumnos: Ernesto Alarcón (de Veracruz), Mauricio Chacón (de Chiapas), Alfonso de la Cruz (de Jalisco), Samuel Estala (de More-

los), Raúl Gómez (de Coahuila) y Carlos Villalvazo (de Jalisco). Se obtuvo una medalla de plata (Carlos Villalvazo), tres de bronce (Ernesto Alarcón, Mauricio Chacón y Raúl Gómez) y una mención honorífica (Samuel Estala). En total, en las Olimpiadas Internacionales se han obtenido 3 medallas de plata, 13 medallas de bronce y 15 menciones honoríficas.

Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1989	Cuba	13	3
1990	España	15	3
1991	Argentina	16	5
1992	Venezuela	16	6
1993	México	16	9
1994	Brasil	16	6
1995	Chile	18	9
1996	Costa Rica	17	2
1997	México	17	3
1998	República Dominicana	18	5
1999	Cuba	20	3
2000	Venezuela	21	2

Los cuatro integrantes de la delegación mexicana que participaron en la Olimpiada Iberoamericana de 2000 obtuvieron medalla: dos de oro (Javier Chávez y Carlos Villalvazo, ambos de Jalisco) y dos de bronce (Mauricio Chacón, de Chiapas y Alfonso de la Cruz, de Jalisco). En total, en las Olimpiadas Iberoamericanas México ha obtenido 7 medallas de oro, 17 medallas de plata, 17 medallas de bronce y tres menciones honoríficas. En la 11ª Olimpiada Iberoamericana, celebrada en Costa Rica, México obtuvo la Copa Puerto Rico, que se da cada año al país con el mayor progreso relativo.

Olimpiada Centroamericana y del Caribe

Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1999	Costa Rica	10	2
2000	El Salvador	9	2

Todos nuestros alumnos ganaron medalla en la II Olimpiada Centroamericana y del Caribe: una de oro (Mauricio Chacón, de Chiapas) y dos de plata (Miguel Raggi, de Michoacán y Edgardo Roldán de Morelos). En total, en la Olimpiada Centroamericana y del Caribe, México ha obtenido una medalla de oro y 5 medallas de plata.

Resultados del Concurso Nacional de la 14a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas

los), Raúl Gómez (de Coahuila) y Carlos Villalvazo (de Jalisco). Se obtuvo una medalla de plata (Carlos Villalvazo), tres de bronce (Ernesto Alarcón, Mauricio Chacón y Raúl Gómez) y una mención honorífica (Samuel Estala). En total, en las Olimpiadas Internacionales se han obtenido 3 medallas de plata, 13 medallas de bronce y 15 menciones honoríficas.

Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1989	Cuba	13	3
1990	España	15	3
1991	Argentina	16	5
1992	Venezuela	16	6
1993	México	16	9
1994	Brasil	16	6
1995	Chile	18	9
1996	Costa Rica	17	2
1997	México	17	3
1998	República Dominicana	18	5
1999	Cuba	20	3
2000	Venezuela	21	2

Los cuatro integrantes de la delegación mexicana que participaron en la Olimpiada Iberoamericana de 2000 obtuvieron medalla: dos de oro (Javier Chávez y Carlos Villalvazo, ambos de Jalisco) y dos de bronce (Mauricio Chacón, de Chiapas y Alfonso de la Cruz, de Jalisco). En total, en las Olimpiadas Iberoamericanas México ha obtenido 7 medallas de oro, 17 medallas de plata, 17 medallas de bronce y tres menciones honoríficas. En la 11ª Olimpiada Iberoamericana, celebrada en Costa Rica, México obtuvo la Copa Puerto Rico, que se da cada año al país con el mayor progreso relativo.

Olimpiada Centroamericana y del Caribe

Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1999	Costa Rica	10	2
2000	El Salvador	9	2

Todos nuestros alumnos ganaron medalla en la II Olimpiada Centroamericana y del Caribe: una de oro (Mauricio Chacón, de Chiapas) y dos de plata (Miguel Raggi, de Michoacán y Edgardo Roldán de Morelos). En total, en la Olimpiada Centroamericana y del Caribe, México ha obtenido una medalla de oro y 5 medallas de plata.

Resultados del Concurso Nacional de la 14a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas

En noviembre de 2000 se llevó a cabo en la ciudad de Morelia, Michoacán, el 14º Concurso Nacional, con la participación de todos los Estados de la República. Los 17 alumnos ganadores del primer lugar fueron:

Humberto Montalván Gámez de Puebla,
Mauricio Esteban Chacón Tirado de Chiapas,
Miguel Raggi Pérez de Michoacán,
Emiliano Cruz León de Morelos,
Juan Antonio Aguilera Mendoza de Chihuahua,
Andrei Rodríguez Paredes de Baja California,
Edgardo Roldán Pensado de Morelos,
Diego Villamil Pesqueira del Distrito Federal,
Luciano Alberto Camacho Alcalá de Sinaloa,
Jesús Puente Arrubarrena del Distrito Federal,
Josué Enmanuel Magaña Valencia de Campeche,
Miguel Ángel Camarillo Sepúlveda de Querétaro,
Julián Fernando Chagoya Saldaña de Veracruz,
David José Mireles Morales del Distrito Federal
Hugo Villanueva Méndez de Puebla,
Iván Barona González del Distrito Federal,
Juan Pablo Maldonado López de Michoacán

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado a cabo los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los Estados que ocuparon los primeros 10 lugares en el 14º. Concurso Nacional:

1. Morelos
2. Puebla
3. Distrito Federal
4. Chihuahua
5. Michoacán
6. Baja California
7. Jalisco
8. Querétaro
9. Nuevo León
10. Chiapas

**COMITE ORGANIZADOR DE LA
OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS**

Enero de 2001

Enunciados de los Problemas

Problemas de Concursos Estatales

Problema 1. Se tienen 8 piezas de ajedrez: 2 torres, 2 alfiles, 2 caballos y 2 peones. De cada uno de los cuatro tipos de pieza, una es blanca y la otra negra. ¿De cuántas formas se pueden acomodar las 8 piezas en una columna del tablero de manera que no queden dos piezas del mismo color juntas?

Problema 2. Se tienen 5 puntos sobre una recta. Se agregan a esos puntos los puntos medios de todos los segmentos que se pueden formar con dos de los cinco puntos como extremos.

¿Cuál es el máximo número de puntos que se tienen al final?

¿Cuál es el mínimo número de puntos?

Problema 3. El perímetro de un triángulo rectángulo es 24 y la hipotenusa mide 10. Calcula su área.

Problema 4. Un conejo es perseguido por un perro. El conejo lleva una ventaja inicial de 50 de sus saltos. El conejo da 5 saltos mientras el perro da 2, pero el perro en tres saltos avanza tanto como el conejo en ocho saltos. ¿Cuántos saltos debe dar el perro para alcanzar al conejo?

Problema 5. Encuentra todas las tercias de números tales que el producto de cualesquiera dos de ellos sumado con el otro da 1.

Problema 6. Dados tres números positivos se pueden realizar seis diferentes cocientes con ellos. Encuentra todas las ternas de números enteros positivos consecutivos tales que la suma de los seis posibles cocientes es un entero.

Problema 7. Sea $ABCD$ un paralelogramo. Se construyen triángulos equiláteros ABF y ADE hacia el exterior de $ABCD$. Prueba que el triángulo FCE es equilátero.

Problema 8. Denotamos con $d(n)$ a la cantidad de divisores de n . Demuestra que existen una infinidad de números n tales que n es múltiplo de $d(n)$.

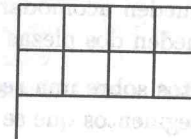
Problema 9. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones para x y y positivos:

$$\begin{aligned}x^{x+y} &= y \\ y^{x+y} &= x^2 y.\end{aligned}$$

Problema 10. Se sabe que la ecuación $x^3 - x + k = 0$ tiene tres soluciones que son números enteros. Encuentra todos los posibles valores de k .

Problema 11. Sean C y D dos circunferencias que se intersectan en dos puntos distintos P y Q . Una recta que pasa por el punto P intersecta a dichas circunferencias en los puntos A y B respectivamente. Sea Y el punto medio de AB , y sean X y Z los puntos de intersección de QY con C y D respectivamente. Prueba que Y es también el punto medio de XZ .

Problema 12. ¿Cuántas formas hay de colorear una bandera formada por dos bandas horizontales, dividida en 8 cuadros como se muestra en la figura, utilizando a lo más 4 colores de manera que dos cuadros que tengan un lado en común no tengan el mismo color?



Problema 13. Por el punto A de la cuerda común AB de dos circunferencias, se traza una recta que corta a una de ellas en el punto C y a la otra en el punto D . Las tangentes a dichas circunferencias en los puntos C y D , se intersectan en el punto M . Muestra que los puntos B , C , D y M están sobre una circunferencia.

Problema 14. Sea n un número natural. Demuestra que si $2n + 1$ y $3n + 1$ son cuadrados perfectos, entonces n es divisible entre 40.

Problema 15. Un niño corta un cuadrado de 3 días por 3 días de la página de un calendario. Si la suma de las nueve fechas es divisible entre 13, ¿cuál es la fecha de la esquina inferior izquierda?

Problema 16. Se escriben siete enteros positivos alrededor de un círculo. Sabemos que de cada par de números vecinos, uno de ellos divide al otro. Demuestra que hay dos números no vecinos con la misma propiedad (esto es, que uno de ellos divide al otro).

Problema 17. Sea ABC un triángulo y sean L y N las intersecciones de la bisectriz del ángulo en A con el lado BC y el circuncírculo de ABC respectivamente. Construimos la intersección M del circuncírculo de ABL con el segmento AC . Prueba que los triángulos BMN y BMC tienen la misma área.

Problema 18. En una cuadrícula de 1000×1000 te puedes mover sobre las aristas de la siguiente forma:

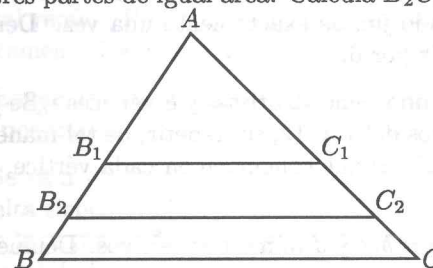
- (a) Sólo puedes avanzar hacia arriba o hacia la derecha.
- (b) La primera vez que avanzas lo haces solamente un espacio, la segunda vez avanzas 2 y así sucesivamente.
- (c) Inicias en la esquina inferior izquierda.

¿Existirá una forma de llegar a la esquina superior derecha?

Problema 19. ¿Cuál es el dígito de las unidades de la suma de todos los números de seis cifras que se pueden formar con los dígitos del uno al nueve?

Problema 20. Un entero positivo N tiene 2000 cifras. De estas cifras, 20 son iguales a cero y los números de veces que aparecen las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 están en razón $1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9$, respectivamente. ¿Puede ser N un cuadrado perfecto?

Problema 21. En la figura B_1C_1 y B_2C_2 son paralelas a BC que dividen al triángulo ABC en tres partes de igual área. Calcula B_2C_2 en términos de BC .



Problema 22. Prueba que la ecuación $x^2 + y^2 + 1 = z^2$ tiene una infinidad de soluciones enteras.

Problema 23. Demuestra que en cualquier colección de 7 o más enteros siempre hay dos cuya suma o diferencia es divisible entre 11.

Problema 24. Encuentra todos los cuadrados perfectos menores o iguales a 1000 que tienen un número primo de divisores positivos.

Problema 25. Una cuadrícula de 8×8 se numera del 1 al 64 en la forma usual. Decimos que 8 casillas de la cuadrícula forman un *arreglo mitológico* si no hay dos de las 8 en el mismo renglón o en la misma columna. Demuestra que la suma de los números de las casillas de cualquier arreglo mitológico es 260.

Problema 26. Demuestra que para toda n mayor o igual que 5, se pueden dividir los enteros del 1 al n en dos grupos, de tal forma que el producto de los números del primer grupo sea igual a la suma de los números del segundo grupo.

Problema 27. Di si es posible o no, ordenar los números del 1 al 9 en una fila de manera que entre el 1 y el 2 haya una cantidad impar de números, también entre el 2 y el 3, entre el 3 y el 4, ..., entre el 8 y el 9. Explícame tu respuesta.

Problema 28. Sea ABC un triángulo, G su gravicentro e I su incentro. Demuestra que $BC + AB = 2AC$ si y sólo si IG es paralelo a AC .

Problema 29. Se tiene un candado cuyas posibles combinaciones van de 0000 al 9999. Sabemos que cada una de las combinaciones 1932, 2748 y 92 tiene exactamente un dígito correcto. ¿Cuál es el mínimo número de combinaciones que se deben checar para tener la seguridad de abrir el candado?

Nota. Suponiendo que la combinación correcta fuera 3564, entonces la combinación 7586 tendría sólo un dígito correcto: el 5.

Problema 30. Demuestra que el radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo, trazado a uno de los vértices de él es perpendicular a la recta que une los pies de las alturas desde los otros dos vértices del triángulo.

Problema 31. Cada noche tres personas de un grupo de n personas salen a cenar juntas. Después un cierto número de días, se observa que cada par de personas han cenado juntas exactamente una vez. Demuestra que n de residuo 1 o 3 al dividir por 6.

Problema 32. Un cubo tiene 12 aristas y 8 vértices. ¿Se pueden numerar las aristas, con los números del 1 al 12, sin repetir, de tal manera que al sumar los números en las tres aristas que concurren en cada vértice, se obtenga siempre el mismo resultado?

Problema 33. Sean a, b, c y d números positivos. Demuestra que

$$\frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{b+c+a} + \frac{c}{c+d+b} + \frac{d}{d+a+c}$$

nunca es un entero.

Problema 34. Un triángulo acutángulo ABC está inscrito en un círculo con centro O . Sea D la intersección de la bisectriz del ángulo BAC con el segmento BC y supongamos que la perpendicular al segmento OA que pasa por D interseca a la recta AC en un punto interior, P , al segmento AC . Demuestra que $AB = AP$.

Problema 35. Hace muchos años, un profesor puso como ejercicio a sus alumnos, la tarea de sumar todos los números enteros del 1 al 100. Uno de estos alumnos encontró un método simple de realizar la suma. Dicho método queda condensado en la fórmula:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Como en nuestros tiempos los jóvenes son más listos, ahora te pedimos que demuestres que la suma de los números primos entre 1 y 2000 es menor que 667222.

Problema 36. En una reunión hay 201 personas de cinco nacionalidades diferentes. Se sabe que en cada grupo de seis, al menos dos tienen la misma edad. Demuestra que hay al menos cinco personas del mismo país, de la misma edad y del mismo sexo.

Problema 37. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en un circunferencia, y tal que las diagonales AC y BD son perpendiculares. Prueba que $AD^2 + BC^2 = 4r^2$, donde r es el radio de la circunferencia.

Problema 38. En cada vértice de un cuadrado hay una semilla. La hormiga atómica sale de un vértice y camina por los lados del cuadrado arrastrando una enorme bolsa de semillas y sólo se detiene en los vértices. Cuando llega a un vértice, si viajaba en el sentido de las manecillas del reloj, agrega tantas semillas como las que hay en el vértice del que venía; y si viajaba en el sentido contrario a las manecillas del reloj, quita semillas, agrega semillas, o no hace nada, de manera que en ese vértice quede la misma cantidad de semillas que en el vértice del cual venía. ¿Puede la hormiga atómica organizar su viaje para tener al final exactamente 2000 semillas en cada vértice?

Problema 39. Encuentra todos los primos p y q tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{pq} = \frac{1}{n}$, para algún entero positivo n .

Problema 40. Se va a viajar a una isla lejana por avión desde México. Los vuelos de ida y vuelta tienen la misma duración. El vuelo sale desde México el lunes a las 6:25 de la mañana (hora de México) y llega a las 2:10 de la tarde del martes (hora local de la isla). Después sale de la isla a la 1:35 de la tarde del jueves (hora local de la isla) y llega el mismo jueves a las 3:20 de la tarde (hora de México). Cuando en México son las 4:00 de la tarde del sábado, ¿qué hora es en la isla y de qué día?

Problema 41. De un cuadrado $ABCD$, sólo quedaron los puntos A , P , Q : A era un vértice, P estaba sobre el lado BC y Q estaba sobre el lado CD . Reconstruye el cuadrado usando regla y compás.

Problema 42. Sea a y b dos enteros positivos con $a \leq b$ que satisfacen:

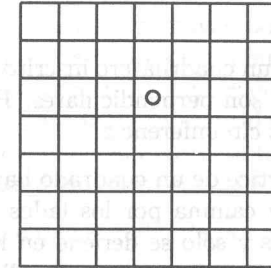
$$(a, b) + [a, b] = a + b.$$

Prueba que a divide a b .

Nota: (a, b) denota al máximo común divisor de a y b y $[a, b]$ denota su mínimo común múltiplo.

Problema 43. En una circunferencia está inscrito el triángulo equilátero ABC . En el arco BC se ha tomado al azar el punto M y se han trazado las cuerdas AM , BM y CM . Demuestra que $AM = BM + CM$.

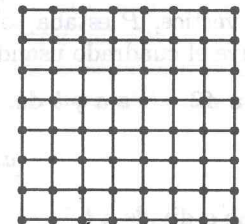
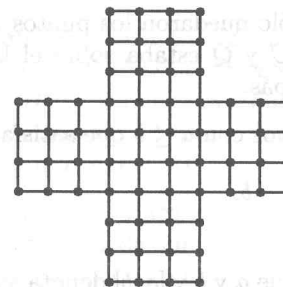
Problema 44. La figura muestra un laberinto cuadrado de ratón con 49 cuartos. Dos cuartos vecinos (que comparten una pared) están conectados con una puerta. Los cuartos están diseñados de tal manera que cuando el ratón sale de uno de ellos las puertas se cierran automáticamente sin permitir que el ratón pueda entrar de nuevo. ¿Podrá el ratón recorrer todos los cuartos si empieza en el cuarto marcado?



Problema 45. Demuestra que para cualquier entero n , $n^9 - n^7 - n^5 + n^3$ es múltiplo de 360.

Problema 46. La bisectriz del ángulo A de un triángulo ABC intersecta a la circunferencia circunscrita en el punto N y al lado BC en el punto L . Se toma N como centro y NB como radio y se traza una circunferencia, la cual intersecta a los lados AB y AC en los puntos P y Q respectivamente. Demuestra que P , L y Q son colineales.

Problema 47. En las figuras de abajo, cada segmento tiene longitud 1. Se colocarán guardias en algunos de los puntos y diremos que un punto está vigilado si hay un guardia en ese punto o en algún punto a distancia 1. Para la figura de la izquierda, demuestra que todos los puntos pueden vigilarse con 16 guardias pero que 12 no son suficientes. Para la figura de la derecha, demuestra que 13 guardias no pueden vigilar todos los puntos, pero 16 si pueden.



Problema 48. Considera 2000 números naturales impares sin divisores primos mayores que 18. Prueba que existen tres de estos números cuyo producto es un cubo.

Problema 49.

- (a) ¿Pueden las casillas de un tablero de 3×3 llenarse con números del conjunto $\{-1, 0, 1\}$, de manera que la suma de los números en cada renglón, columna y diagonal sean diferentes?
- (b) ¿Pueden las casillas de un tablero de 3×3 llenarse con números del conjunto $\{-1, 0, 1\}$, de manera que la suma de los números en cada renglón y columna sean diferentes?

Problema 50. Sobre la tangente por B a una circunferencia de diámetro AB , se toman dos puntos C y D . Si AC corta a la circunferencia en F y AD corta a la circunferencia en E , demuestra que $AC \cdot AF = AD \cdot AE$.

Problema 51. Pablito tiene un gran número de cuadrados blancos y negros y quiere construir un cuadrado de lado n , con la siguiente propiedad: los cuatro cuadrados de las esquinas de cualquier subrectángulo del cuadrado grande no deben ser todas del mismo color. ¿Para qué valores de n es esto posible?

Problema 52. Sean a , b , y c las longitudes de los lados de un triángulo de perímetro 1. Demuestra que

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < \frac{1}{2}.$$

Problema 53. Dados m , n , k enteros positivos, tales que $n > m \geq k$. Prueba que

$$\sum_{j=k}^n \binom{j-1}{k-1} \binom{n-j}{m-k} = \binom{n}{m}.$$

Problema 54. En una circunferencia está inscrito el triángulo isósceles ABC ($AB = BC$). En el arco AB se toma al azar el punto K y se une por medio de cuerdas con los vértices del triángulo. Muestra que $AK \cdot KC = AB^2 - KB^2$.

Problema 55. Sea C una circunferencia de centro O y sea D una circunferencia que pasa por O y corta a C en A y B y cuyo centro se encuentra en el interior de C . Sea D (distinto de O) un punto que está en el interior de la circunferencia C . La recta AD corta nuevamente a la circunferencia C en E . Demuestra que $DB = DE$.

Problema 56. A una convención interplanetaria asistieron 2000 embaajadores. Durante los 6 días que duró la convención, cada uno de ellos se entrevistó con cada uno de los otros 1999 y las entrevistas son mutuas (es decir, si A se entrevista con B , se considera que B ya se entrevistó con A). Demuestra que existen 3 embaajadores tales que las tres entrevistas entre dos de ellos ocurrieron el mismo día.

Problema 57. Sea f una función que a cada entero entre 0 y 2000 le asigna un número entero no negativo, tal que:

$$f(3m) = f(m)$$

$$f(3m+1) = f(3m) + 1$$

$$f(3m+2) = f(3m)$$

Si $f(0) = 0$, ¿cuál es el valor máximo que puede tomar f ?

Problema 58. ¿Cuál es el mayor número de casillas que se pueden elegir en un tablero de 4×4 de modo que no haya tres cuyos centros formen un triángulo isósceles?

Problema 59. Demuestra que dados cualesquiera seis puntos que están en un rectángulo de 3×4 , hay al menos dos que están a distancia a lo más $\sqrt{5}$.

Problema 60. Martín tiene la lista de todos los números de 25 dígitos que se pueden formar utilizando sólo los dígitos 1, 2, 3 y 4 y que tienen el mismo número de unos que de doses. Jorge tiene la lista de todos los números de 50 cifras formados por 25 unos y 25 doses. Demuestra que la lista de Martín tiene la misma cantidad de números que la de Jorge.

Problemas de Concursos Nacionales de la OMM

Problema 61. (12a. OMM) Un número es *suertudo* si al sumar los cuadrados de sus cifras y repetir esta operación suficientes veces obtenemos el número 1. Por ejemplo 1900 es suertudo, ya que: $1900 \rightarrow 82 \rightarrow 68 \rightarrow 100 \rightarrow 1$. Encuentra una infinidad de parejas de enteros consecutivos, donde ambos números sean suertudos.

Problema 62. (12a. OMM) Dos rayos l y m parten de un mismo punto, formando un ángulo α , y sea P un punto en l . Para cada circunferencia C tangente a l en P que corte a m en puntos Q y R , sea T el punto donde la bisectriz del ángulo QPR corta a C . Describe la figura geométrica que forman los puntos T , justifica tu respuesta.

Problema 63. (12a. OMM) Cada uno de los lados y las diagonales de un octágono regular se pintan de rojo o de negro. Demuestra que hay al menos siete triángulos cuyos vértices son vértices del octágono y sus tres lados son del mismo color.

Problema 64. (12a. OMM) Encuentra todos los enteros que se escriben como

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \cdots + \frac{9}{a_9}$$

donde $a_1, a_2, \dots, a_9$ son dígitos distintos de cero que pueden repetirse.

Problema 65. (12a. OMM) Sean B y C dos puntos de una circunferencia, AB y AC las tangentes desde A . Sea Q un punto del segmento AC y P la intersección de BQ con la circunferencia. La paralela a AB por Q corta a BC en J .

Demuestra que PJ es paralelo a AC si y sólo si $BC^2 = AC \cdot QC$.

Problema 66. (12a. OMM) Un plano en el espacio es *equidistante* a un conjunto de puntos si la distancia de cada punto al plano es la misma. ¿Cuál es el mayor número de planos equidistantes a 5 puntos de los cuales no hay 4 en un mismo plano?

Problema 67. (13a. OMM) Sobre una mesa se tienen 1999 fichas que son rojas de un lado y negras del otro (no se especifica cuántas con el lado rojo hacia arriba y cuántas con el lado negro hacia arriba).

Dos personas juegan alternadamente. Cada persona en su turno hace una de las siguientes dos cosas:

- Retirar cualquier número de fichas, con la condición de que todas las fichas retiradas tengan el mismo color hacia arriba.
- Voltear cualquier número de fichas, con la condición de que todas las fichas volteadas tengan el mismo color hacia arriba.

Gana el que toma la última ficha. ¿Cuál jugador puede asegurar que ganará, el primero en jugar o el segundo?

Problema 68. (13a. OMM) Demuestre que no existen 1999 primos en progresión aritmética todos ellos menores que 12345.

Nota: Una colección de números está en progresión aritmética si es de la forma:

$$a, a + r, a + 2r, a + 3r, \dots, a + br.$$

Problema 69. (13a. OMM) Considere P un punto en el interior del triángulo ABC . Sean D, E y F los puntos medios de AP, BP y CP respectivamente y L, M y N los puntos de intersección de BF con CE , AF con CD y AE con BD .

(a) Muestre que el área del hexágono $DNELFM$ es igual a una tercera parte del área del triángulo ABC .

(b) Muestre que DL, EM y FN concurren.

Problema 70. (13a. OMM) En una cuadrícula de 8×8 se han escogido arbitrariamente 10 cuadritos y se han marcado los centros de éstos. El lado de cada cuadrito mide 1. Demuestre que existen al menos dos puntos marcados que están separados una distancia menor o igual que $\sqrt{2}$, o que existe al menos un punto marcado que se encuentra a una distancia $\frac{1}{2}$ de una orilla de la cuadrícula.

Problema 71. (13a. OMM) $ABCD$ es un trapecio con AB paralelo a CD . Las bisectrices exteriores de los ángulos B y C se intersectan en P . Las bisectrices exteriores de los ángulos A y D se intersectan en Q . Demuestre que la longitud de PQ es igual a la mitad del perímetro del trapecio $ABCD$.

Problema 72. (13a. OMM) Un polígono se dice que es ortogonal si todos sus lados tienen longitudes enteras y cada dos lados consecutivos son perpendiculares. Demuestre que si un polígono ortogonal puede cubrirse con rectángulos de 2×1 (sin que éstos se traslapen) entonces al menos uno de sus lados tiene longitud par.

Problema 73. (14a. OMM) Sean A, B, C y D circunferencias tales que A es tangente exteriormente a B en P , B es tangente exteriormente a C en Q , C es tangente exteriormente a D en R y D es tangente exteriormente a A en S . Supón además que A y C no se intersectan, ni tampoco B y D .

(a) Prueba que los puntos P, Q, R y S están todos sobre una circunferencia.

(b) Supón además que A y C tienen radio 2, B y D tienen radio 3 y la distancia entre los centros de A y C es 6. Determina el área del cuadrilátero $PQRS$.

Problema 74. (14a. OMM) Se construye un triángulo como el de la figura, pero empezando con los números del 1 al 2000. Cada número del triángulo — excepto los del primer renglón — es la suma de los dos números arriba de él. ¿Cuál es el número que ocupa el vértice inferior del triángulo?

Nota: Escribe tu respuesta final como producto de primos.

1	2	3	4	5
	3	5	7	9
		8	12	16
			20	28
				48

Problema 75. (14a. OMM) Dado un conjunto A de enteros positivos, construimos el conjunto A' poniendo todos los elementos de A y todos los enteros positivos que se pueden obtener de la siguiente manera: Se escogen algunos elementos de A , sin repetir, y a cada uno de esos números se le pone el signo $+$ o el signo $-$; luego se suman esos números con signo y el resultado se pone en A' . Por ejemplo, si $A = \{2, 8, 13, 20\}$ entonces algunos elementos de A' son 8 y 14 (pues 8 es elemento de A y $14 = 20 + 2 - 8$). A partir de A' construimos A'' de la misma manera que A' se construye a partir de A . Encontrar el mínimo número de elementos que necesita tener A si queremos que A'' contenga a todos los enteros del 1 al 40 (inclusive).

Problema 76. (14a. OMM) Para a y b enteros positivos no múltiplos de 5, se construye una lista de números como sigue: El primer número es 5 y, a partir del segundo número, cada número se obtiene multiplicando el número que le precede (en la lista) por a y sumándole b . (Por ejemplo, si $a = 2$ y $b = 4$, entonces los primeros tres números de la lista serían: 5, 14, 32 (pues $14 = 5 \cdot 2 + 4$ y $32 = 14 \cdot 2 + 4$).) ¿Cuál es la máxima cantidad de primos que se pueden obtener antes de obtener el primer número no primo?

Problema 77. (14a. OMM) Se tiene un tablero de $n \times n$ pintado como tablero de ajedrez. Está permitido efectuar la siguiente operación en el tablero:

Escoger un rectángulo en la cuadrícula tal que las longitudes de sus lados sean ambas pares o ambas impares, pero que no sean las dos iguales a 1 al mismo tiempo, e invertir los colores de los cuadritos de ese rectángulo (es decir, los cuadritos del rectángulo que eran negros se convierten en blancos y los que eran blancos, se convierten en negros).

Encuentra para qué n 's es posible lograr que todos los cuadritos queden de un mismo color después de haber efectuado la operación el número de veces que sea necesario.

Nota: Las dimensiones de los rectángulos que se escogen pueden ir cambiando.

Problema 78. (14a. OMM) Sea ABC un triángulo en el que $\angle B > 90^\circ$ y en el que un punto H sobre AC tiene la propiedad de que $AH = BH$, y BH es perpendicular a BC . Sean D y E los puntos medios de AB y BC , respectivamente. Por H se traza una paralela a AB que corta a DE en F . Prueba que $\angle BCF = \angle ACD$.

Problemas de Olimpiadas donde participa México

XV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Problema 1. Se construye un polígono regular de n lados ($n \geq 3$) y se enumeran sus vértices de 1 a n . Se trazan todas las diagonales del polígono. Demostrar que si n es impar, se puede asignar a cada lado y a cada diagonal un número entero entre 1 y n , tal que cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

- (a) El número asignado a cada lado o diagonal sea distinto al de los vértices que los une.
- (b) Para cada vértice, todos los lados y diagonales que compartan dicho vértice tengan números diferentes.

Problema 2. Sean S_1 y S_2 dos circunferencias de centros O_1 y O_2 , respectivamente, secantes en M y N . La recta t es la tangente común a S_1 y S_2 , más cercana a M . Los puntos A y B son los respectivos puntos de contacto de t con S_1 y S_2 ; C el punto diametralmente opuesto a B y D el punto de intersección de la recta O_1O_2 con la recta perpendicular a la recta AM que pasa por B . Demostrar que M , D y C están alineados.

Problema 3. Encontrar todas las soluciones de la ecuación

$$(x+1)^y - x^z = 1$$

para x, y, z enteros mayores que 1.

Problema 4. De una progresión aritmética infinita $1, a_1, a_2, \dots$ de números reales se eliminan términos, obteniéndose una progresión geométrica infinita $1, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$ de razón q . Encontrar los posibles valores de q .

Problema 5. Hay un montón de 2000 piedras. Dos jugadores se turnan para retirar piedras, alternadamente, de acuerdo a las siguientes reglas:

- (a) En cada jugada se pueden retirar 1, 2, 3, 4, ó 5 piedras del montón.
- (b) En cada jugada se prohíbe que el jugador retire la misma cantidad de piedras que retiró su oponente en la jugada previa.

Pierde el jugador que en su turno no pueda realizar una jugada válida. Determinar cuál jugador tiene estrategia ganadora y encontrarla.

Problema 6. Un hexágono convexo se denomina *bonito* si tiene cuatro diagonales de longitud 1, cuyos extremos incluyen todos los vértices del hexágono.

- (a) Dado cualquier número k , mayor que 0 y menor o igual que 1, encontrar un hexágono bonito de área k .
- (b) Demostrar que el área de cualquier hexágono bonito es menor que $\frac{3}{2}$.

XLI Olimpiada Internacional de Matemáticas

Problema 1. Dos circunferencias Γ_1 y Γ_2 se cortan en M y N . Sea l la tangente común a Γ_1 y Γ_2 tal que M está más cerca de l que N . La recta l es tangente a Γ_1 en A y a Γ_2 en B . La recta paralela a l que pasa por M corta de nuevo a Γ_1 en C y a Γ_2 en D . Las rectas CA y DB se intersectan en E ; las rectas AN y CD se intersectan en P ; las rectas BN y CD se intersectan en Q . Demostrar que $EP = EQ$.

Problema 2. Sean a, b, c números reales positivos tales que $abc = 1$. Demostrar que

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

Problema 3. Sea $n \geq 2$ un número entero positivo. Inicialmente hay n pulgas en una recta horizontal, y no todas están en el mismo punto. Para un número real positivo λ , definimos un *salto* como sigue: Se eligen dos pulgas cualesquiera situadas en puntos A y B con A a la izquierda de B ; luego, la pulga situada en A salta hasta el punto C de la recta, ubicado a la derecha de B , tal que $\frac{BC}{AB} = \lambda$.

Determinar todos los valores de λ tales que, para cualquier punto M de la recta y cualesquiera posiciones iniciales de las n pulgas, existe una sucesión finita de saltos que permite situar a todas las pulgas a la derecha de M .

Problema 4. Un mago tiene cien tarjetas numeradas del 1 al 100. Las coloca en tres cajas, una roja, una blanca y una azul, de modo que cada caja contiene por lo menos una tarjeta.

Una persona del público selecciona dos de las tres cajas, elige una tarjeta de cada una, y anuncia a la audiencia la suma de los números de las dos tarjetas elegidas. Al conocer esta suma, el identifica la caja de la cual no se eligió ninguna tarjeta.

¿De cuántas maneras se pueden distribuir todas las tarjetas en las cajas de modo que este truco siempre funcione?

(Dos maneras de distribuir se consideran distintas, si hay al menos una tarjeta que es colocada en una caja diferente en cada distribución.)

Problema 5. Determinar si existe un entero positivo n tal que exactamente 2000 números primos diferentes dividen a n , y n divide a $2^n + 1$.

Problema 6. Sean AH_1 , BH_2 , CH_3 las alturas de un triángulo acutángulo ABC . La circunferencia inscrita en el triángulo ABC es tangente a los lados BC , CA , AB en los puntos T_1 , T_2 , T_3 respectivamente.

Sea l_1 la recta que es simétrica a H_2H_3 con respecto a T_2T_3 , l_2 la recta que es simétrica a H_3H_1 con respecto a T_3T_1 , l_3 la recta que es simétrica a H_1H_2 con respecto a T_1T_2 .

Demostrar que l_1 , l_2 , l_3 determinan un triángulo cuyos vértices son puntos de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC .

Soluciones de los Problemas

Soluciones a los Problemas de Concursos Estatales

Solución al problema 1. Tenemos 8 maneras de elegir una pieza para la primer casilla, 4 para la segunda (pues debe ser del color opuesto a la de la primer casilla), 3 para la tercera (debe tener el mismo color que la primer pieza elegida y no puede ser esa), etc. Vemos que hay $8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 1152$ formas de acomodar las piezas.

Solución Alternativa. Como tenemos cuatro piezas de cada color, tenemos que alternar piezas blancas y negras en la columna. El orden de las piezas negras se puede elegir de $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ y también el de las blancas. Tenemos dos opciones para elegir el color de la pieza en la primer casilla de la columna. Por lo tanto, tenemos $2(24)^2 = 1152$ formas de acomodar las piezas.

Solución al problema 2. El número máximo puntos que se pueden agregar se presenta cuando se agrega un punto diferente por cada pareja de números. Hay 10 parejas posibles, de modo que se tienen al final a lo más 15 puntos (10 que se agregan más los cinco originales). Es fácil ver que los puntos se pueden acomodar de manera que realmente se alcance este máximo.

Si A, B, C, D y E son los puntos en el orden que aparecen en la recta, cuando menos agregamos los puntos medios de los segmentos AB, BC, CD y DE . Por lo tanto, se tienen al final, al menos 9 puntos. Si acomodamos los puntos de modo que $AB = BC = CD = DE$, se agregan sólo cuatro puntos, por lo que el mínimo buscado es 9.

Solución al problema 3. Sean a y b las longitudes de los catetos. Como la hipotenusa mide 10, $\sqrt{a^2 + b^2} = 10$. Como el perímetro es 24, $a + b = 14$. Entonces, el área es $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{4}[(a + b)^2 - (a^2 + b^2)] = \frac{1}{4}(14^2 - 10^2) = 24$.

Solución al problema 4. Sea x el número de saltos que debe dar el perro para alcanzar al conejo. En el tiempo que el perro da x saltos, el conejo da $\frac{5}{2}x$. La distancia que recorrida por el conejo en $\frac{5}{2}x + 50$ saltos debe ser la misma

que la recorrida por el perro en x saltos. Por lo tanto, $\frac{\frac{5}{2}x+50}{8} = \frac{x}{3}$, de donde $x = 300$.

Solución al problema 5. Sean x, y y z números que cumplan las condiciones, es decir, tales que $xy + z = xz + y = yz + x = 1$. De $xz + y = yz + x$ deducimos que $(x - y)(z - 1) = 0$. Por lo tanto, o bien $x = y$, o bien $z = 1$. Análogamente tenemos que $x = z$ o $y = 1$, y que $y = z$ o $x = 1$.

Si $x = y = z$, entonces las tres ecuaciones originales se convierten en una: $x^2 + x - 1 = 0$. Esto nos da dos soluciones: $x = y = z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ y $x = y = z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Ahora supongamos que no son las tres iguales, digamos que $x \neq z$. Entonces, $y = 1$. Las tres ecuaciones originales se reducen a dos: $xz = 0$ y $x + z = 1$. Tenemos aquí dos soluciones: $x = 0, y = 1, z = 1$ y $x = 1, y = 1, z = 0$. Hicimos el caso $x \neq z$, los otros son análogos y vemos que si no son las tres iguales, dos de ellas deben ser 1 y la otra 0.

Solución al problema 6. Si los tres enteros consecutivos son $n - 1, n$ y $n + 1$, la suma de los posibles cocientes es

$$S = \frac{n}{n-1} + \frac{n+1}{n-1} + \frac{n-1}{n} + \frac{n+1}{n} + \frac{n-1}{n+1} + \frac{n}{n+1}.$$

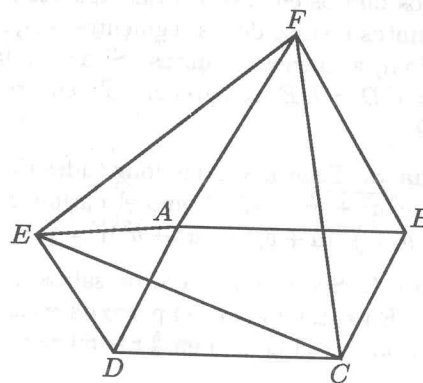
Simplificando, vemos que

$$S = 6 + \frac{3}{n-1} - \frac{3}{n+1} = 6 + \frac{6}{n^2 - 1},$$

por lo que S es entero si y sólo si $n^2 - 1$ es un divisor de 6. Esto ocurre únicamente para $n = 2$, pues para $n = 3$, $n^2 - 1$ ya pasa de 6.

Por lo tanto, la única terna de enteros consecutivos que cumple es $(1, 2, 3)$.

Solución al problema 7. Consideremos los triángulos CDE y FBC . Claramente $FB = CD$ y $BC = DE$. Además, $\angle FBC = 60^\circ + \angle ABC = 60^\circ + \angle ADC = \angle CDE$. Por lo tanto, CDE y FBC son congruentes. Entonces, $FC = EC$ y $\angle FCE = \angle BCD - (\angle FCB + \angle DCB) = \angle BCD - (\angle FCB + \angle CFB) = \angle BCD - (180^\circ - \angle FBC) = \angle BCD + \angle FBC - 180^\circ = 60^\circ$. Por lo tanto, FCE es equilátero.



Solución al problema 8. Para toda k mayor igual que 1, $n = 2^{2^k - 1}$ cumple. En efecto, $d(n) = 2^k$ divide a n , pues $k \leq 2^k - 1$. También podemos tomar $n = 2^{3^k - 1} 3^{2^k - 1}$, etc.

Solución al problema 9. Multiplicando las ecuaciones se obtiene $(xy)^{x+y} = (xy)^2$, de donde $x+y = 2$. Entonces, la primer ecuación nos da $x^2 = y = 2-x$, o sea, $(x-1)(x+2) = 0$. Como $x > 0$, $x = 1$ y como $x+y = 2$, $y = 1$, también.

Solución al problema 10. Sean a , b y c las soluciones de la ecuación. Entonces, $x^3 - x + k = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$, de donde,

$$a + b + c = 0$$

$$ab + bc + ca = -1$$

$$abc = -k.$$

De la primer ecuación, $c = -(a+b)$, sustituyendo esto en la segunda, $-1 = ab + (a+b)c = ab - (a+b)^2$. Esto equivale a $(2a+b)^2 + 3b^2 = 4$. Entonces, $b = -1, 0$ o 1 (si no, $3b^2 > 4$). Hallaremos los valores de k en los tres casos. Notemos que $k = ab(a+b)$.

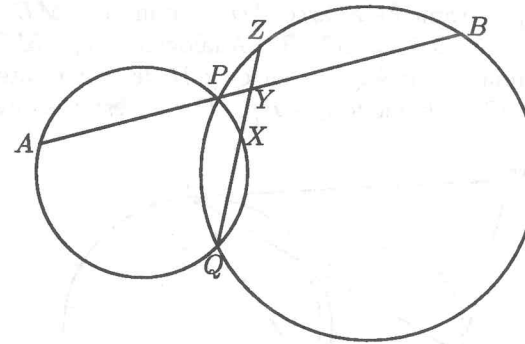
Si $b = -1$, $(2a-1)^2 = 1$, de donde $a = 0$ o 1 y $k = 0$ en ambos casos.

Si $b = 0$, $k = 0$ sin importar el valor de a .

Si $b = 1$, $(2a+1)^2 = 1$, de donde $a = 0$ o -1 y $k = 0$ en ambos casos.

Por lo tanto, k debe ser 0.

Solución al problema 11. La potencia de Y con respecto a C es $YP \cdot YA = YQ \cdot YX$ y con respecto a D es $YP \cdot YB = YQ \cdot YZ$. Como $YA = YB$, deducimos que $YX = YZ$.



Solución al problema 12. Designemos por una letra a cada cuadro.

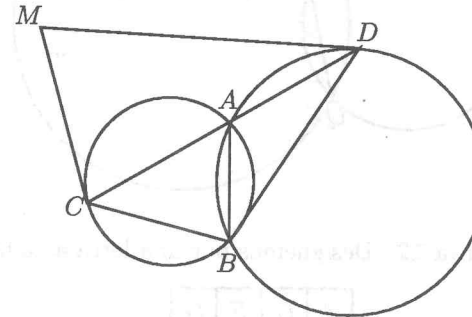
A	C	E	G
B	D	F	H

Ahora pasemos a colorear los cuadros C y D. Tenemos dos casos:

- En este caso tenemos $2 \times 2 = 2^2 = 4$ formas de colorear C y D.

Para colorear E y F tenemos los mismos dos casos anteriores, por lo que se pueden colorear también de 7 formas y para G y H tenemos la misma situación. Entonces el número total de formas es:

Solución al problema 13. Tenemos que $\angle MDA = \angle ABD$, por ser semisecreto e inscrito respectivamente al arco AD . Entonces, $\angle MDB = \angle MDA + \angle ADB = \angle ABD + \angle ADB = \angle CAB$. Análogamente, $\angle MCB = \angle DAB$. Por lo tanto, la suma de los ángulos en C y D del cuadrilátero $BCMD$ es $\angle CAB + \angle DAB = 180^\circ$, de modo que B, C, D y M están sobre una circunferencia.



22

n termina en 0, 1, 3, 5 o 6. Por lo tanto, n termina en 0 o 5, es decir, n es múltiplo de 5.

Los cuadrados de números impares son siempre de la forma $8k + 1$, ya que $(2s + 1)^2 = 4s(s + 1) + 1$ y $s(s + 1)$ siempre es par. Como $2n + 1$ es el cuadrado de un impar, es de la forma $8k + 1$, o sea, $n = 4k$. Si n no fuera múltiplo de 8, sería de la forma $8r + 4$, pero entonces, $3n + 1 = 8(3r + 1) + 5$ no podría ser cuadrado. Esta contradicción muestra que n es múltiplo de 8.

Por ser múltiplo de 5 y de 8, n es múltiplo de 40.

Solución al problema 15. Sea a la fecha de la esquina inferior izquierda. Entonces, el cuadro arrancado es:

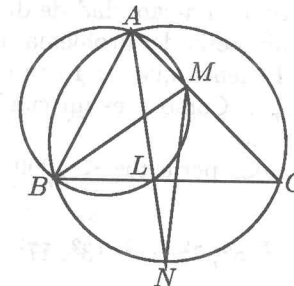
$a - 14$	$a - 13$	$a - 12$
$a - 7$	$a - 6$	$a - 5$
a	$a + 1$	$a + 2$

La suma de las fechas es $9(a - 6)$, que es múltiplo de 13 si y sólo si $a - 6$ es múltiplo de 13. Como a es una fecha de por lo menos la tercer semana de un mes, $15 \leq a$. Además, hay dos días después de a en el mes, por lo que $a \leq 29$. En ese rango, el único valor de a tal que $a - 6$ es múltiplo de 13 es 19.

Solución al problema 16. Sean a, b, c, d, e, f y g los siete números alrededor del círculo, nombrados en el sentido de las manecillas del reloj. O bien a divide a b , o bien b divide a a . Supongamos que a divide a b , el otro caso es análogo. Si b divide a c , también a divide a c y terminamos pues a y c tienen la propiedad pedida. Supongamos, pues, que b no divide a c . Entonces, c debe dividir a b . Ahora repetimos el argumento. Si d divide a c , también divide a b y terminamos. De lo contrario, c divide a d . De la misma forma vemos que terminamos a menos que e divida a d y a f y que además g divida a f . Ahora terminamos en cualquier caso, pues si a divide a g , a divide a f ; y si g divide a a , g divide a b .

Solución al problema 17. Como los triángulos BMN y BMC comparten la base BM , basta ver que tienen alturas iguales, es decir, que NC es paralela a BM . Como $ABLM$ es cíclico, $\angle AMB = \angle ALB$. Del triángulo ABL vemos que $\angle ALB = 180^\circ - \angle BAL - \angle ABL = 180^\circ - \frac{\angle A}{2} - \angle B = \angle C + \frac{\angle A}{2}$.

Por otra parte, $\angle ACN = \angle C + \angle BCN = \angle C + \angle BAN = \angle C + \frac{\angle A}{2}$, pues $ABNC$ es cíclico. Como $\angle AMB = \angle ACN$, concluimos que BM es paralela a NC , como faltaba probar.



Solución al problema 18. No hay forma de llegar. En efecto, supongamos que la hay y que se lleva n pasos (de un espacio el primero, dos el segundo, etc.). Entonces, $1 + 2 + \dots + n$ es el número de espacios avanzados en total. Se avanzan 1000 hacia la derecha y 1000 hacia arriba, de donde $\frac{n(n+1)}{2} = 2000$. Pero entonces $(2n+1)^2 = 4n(n+1) + 1 = 8 \cdot 2000 + 1 = 16001$, lo cual es absurdo pues 16001 no es un cuadrado perfecto.

Solución al problema 19. Para cada dígito a del uno al nueve, en la suma, hay 9^5 números que terminan en a ; la suma de esos 9^5 números termina en el mismo dígito que $9^5 a$. Entonces, la suma buscada termina en el mismo dígito que $9^5(1 + 2 + \dots + 9) = 9^5 \cdot 45$, que termina en 5 por ser un múltiplo impar de 5.

Solución Alternativa. Agrupamos los sumandos en parejas: el número con dígitos $abcdef$ con el $a'b'c'd'e'f'$ donde $a' = 10 - a$, $b' = 10 - b$, etc. (por ejemplo, una pareja la forman 459122 y 651988). La suma de los dos números de cada pareja termina en cero. El único número sin pareja es 555555, por lo que la suma total termina en 5.

Solución al problema 20. Sea a el número de veces que aparece el 1 en los dígitos de N . Entonces 2 aparece $2a$ veces; 3, $3a$ veces, etc. Como N tiene 2000 dígitos, $2000 = 20 + a + 2a + \dots + 9a = 20 + 45a$, de donde $a = 44$. La suma de los dígitos de N es $20 \cdot 0 + a + 2^2 a + 3^2 a + \dots + 9^2 a = 285a = 12540$, que es múltiplo de 3, pero no de 9, por lo que N también es múltiplo de 3, pero no de 9. Entonces, N no es un cuadrado perfecto.

Solución al problema 21. Como los triángulos ABC y AB_2C_2 son semejantes, $\frac{2}{3} = \frac{(AB_2C_2)}{(ABC)} = \left(\frac{B_2C_2}{BC}\right)^2$, de donde $B_2C_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}BC$.

Solución al problema 22. Para cualquier entero k , $x = 2k^2$, $y = 2k$ y $z = 2k^2 + 1$ es una solución.

Solución al problema 23. Consideremos 7 enteros cualesquiera. Si dos de ellos son múltiplos de once, esos dos cumplen lo pedido. Supongamos ahora que hay al menos seis que *no* son múltiplos de 11. Agrupamos en parejas sus posibles residuos al dividir entre 11: $\{1, 10\}$, $\{2, 9\}$, $\{3, 8\}$, $\{4, 7\}$, $\{5, 6\}$. Dos de los seis números deben tener residuos iguales o de la misma pareja, y entonces, su resta o su suma respectivamente, es múltiplo de 11.

Solución al problema 24. Cualquier número se puede escribir en la forma $x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ con p_k primo. La cantidad de divisores de x es $P = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1)$, las hipótesis del problema nos dicen que P es primo, luego, todos los factores de P tienen que ser 1 con excepción de uno, digamos el r -ésimo. Entonces $x = p_r^{\alpha_r}$. Como x es un cuadrado perfecto, α_r es par. También, $\alpha_r + 1$ debe ser primo.

Por lo tanto, hay 16 cuadrados perfectos ≤ 1000 con un número primo de divisores. Estos son:

$$2^2, 2^4, 2^6, 3^2, 3^4, 3^6, 5^2, 5^4, 7^2, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2, 29^2 \text{ y } 31^2.$$

Solución al problema 25. El número en la casilla del renglón i y la columna j es $8(i-1)+j$. Decimos que la contribución de la columna es j y la del renglón es $8(i-1)$.

Consideremos un arreglo mitológico cualquiera. Como debe haber una casilla del arreglo en cada columna, la contribución de las columnas del arreglo es $1+2+\dots+8=36$. Análogamente la contribución de los renglones es $8(1-1)+8(2-1)+\dots+8(8-1)=8(1+\dots+7)=224$. Por lo tanto, la suma de los números de las casillas del arreglo es $36+224=260$.

Solución al problema 26. Buscamos que el primer grupo tenga a 1, a y b (con $1 < a < b \leq n$). El producto de esos números es ab . La suma de los números del segundo grupo es $1+2+\dots+n-(1+a+b)=\frac{n(n+1)}{2}-(1+a+b)$. Así que basta ver que existen enteros a y b tales que $1 < a < b \leq n$ y $\frac{n(n+1)}{2}=1+a+b+ab=(a+1)(b+1)$.

Si n es par, tomamos $a=\frac{n}{2}-1$ y $b=n$.

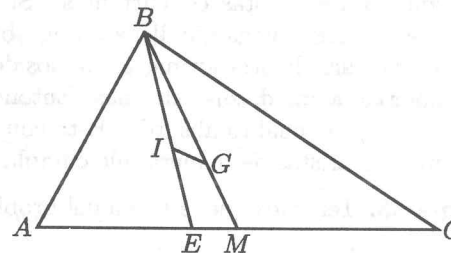
Si n es impar, tomamos $a=\frac{n+1}{2}-1$ y $b=n-1$.

En ambos casos, usando que $n > 4$, se puede ver que $1 < a < b \leq n$.

Solución al problema 27. Si acomodamos al 1 en una posición impar (es decir, en el primer, tercer, quinto, séptimo o noveno lugar), por las condiciones del problema, deberíamos acomodar también el 2, 3, ..., 9 en una posición impar. Esto es imposible pues sólo hay cinco posiciones impares. Si acomodamos el 1 en una posición par, los demás números también deben acomodarse en las posiciones pares, pero sólo hay cuatro de ellas. Por lo tanto, no es posible acomodar los números cumpliendo las condiciones.

Solución al problema 28. Sea E la intersección de BI con AC . Por el teorema de la bisectriz, $\frac{AE}{EC}=\frac{AB}{BC}$. Tenemos también la relación obvia, $AE+EC=AC$. De estas dos podemos despejar $AE=\frac{AB \cdot AC}{AB+BC}$. Ahora notemos que AI es bisectriz del triángulo BAE . Entonces, nuevamente por el teorema de la bisectriz, $\frac{BI}{IE}=\frac{AB}{AE}=\frac{AB+BC}{AC}$.

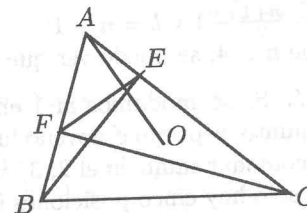
Sea M el punto medio de AC . Sabemos que $\frac{BG}{GM}=2$. Sólo resta observar que, por el teorema de Tales, IG es paralelo a AC si y sólo si $\frac{BI}{IE}=\frac{BG}{GM}$, es decir, si y sólo si $\frac{AB+BC}{AC}=2$.



Solución al problema 29. Notemos que en cualquiera de las cuatro posiciones las combinaciones 1932, 2748 y 9215 tienen dígitos diferentes (es decir, sus primeros dígitos son diferentes, sus segundos dígitos son diferentes, etc.).

¿Cuáles combinaciones pueden ser la correcta? La combinación correcta debe coincidir con cada una de esas tres combinaciones en alguna posición, y en la posición restante, no puede tener ninguno de los tres dígitos que aparecen en esa posición en esas tres combinaciones. Podemos elegir de 4 formas en qué posición coincide con 1932, luego de 3 formas en qué posición coincide con 2748, luego de dos formas en qué posición coincide con 9215, y después, podemos elegir de 7 formas el dígito de la posición restante. Por lo tanto, hay $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 = 168$ combinaciones que podrían ser la correcta según la información del problema; como no podemos saber cuál de ellas es la correcta, el mínimo número de combinaciones a checar para abrir el candado es 168.

Solución al problema 30. Sea ABC un triángulo, O su circuncentro, E y F los pies de las alturas desde B y C respectivamente. Como $BCEF$ es cíclico, $\angle AEF = \angle B$. El triángulo AOC es isósceles y $\angle AOC = 2\angle B$, de modo que $\angle OAE = 90^\circ - \angle B$. Por lo tanto, AO es perpendicular a EF .



Solución al problema 31. Supongamos que después de k noches que se hizo la observación. Ha habido hasta entonces, $3k$ pares de personas que salen a cenar juntas (cada noche hay 3 pares). Por lo tanto, $3k = \binom{n}{2}$, o sea, $n(n-1) = 6k$. De esta relación es fácil ver que n deja residuo 0, 1, 3 o 4 al dividir por 6. Sea A una de las n personas. Cada noche que A está entre las tres personas que salen a cenar juntas, A cena con dos personas. Como sabemos que A no repite compañeros (cada dos personas cenar juntas exactamente una vez), $n-1$ debe ser par. Entonces, n no puede dejar residuo 0 o 4 al dividir por 6, por lo tanto, deja residuo 1 o 3.

Solución al problema 32. Supongamos que es posible y sea S la suma de los números de cualesquiera tres aristas concurrentes. Si para cada vértice sumamos los números de las tres aristas que llegan a él, obtenemos $8S$. Esta misma suma la podemos calcular de otra forma: sumamos dos veces el número de cada arista, una vez por cada uno de sus extremos. Entonces, $8S = 2(1+2+\dots+12) = 156$, o sea, $S = \frac{39}{2}$, lo cual es absurdo. Esta contradicción muestra que es imposible numerar las aristas de manera que cumplan lo pedido.

Solución al problema 33. Tenemos que la suma del problema es mayor que

$$\frac{a}{a+b+d+c} + \frac{b}{b+c+a+d} + \frac{c}{c+d+b+a} + \frac{d}{d+a+c+b} = \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = 1,$$

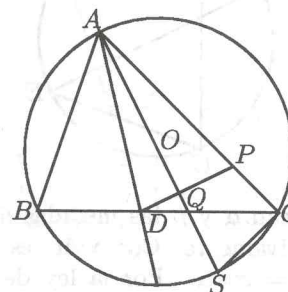
y es menor que

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+a} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+c} =$$

$$\frac{a+b}{a+b} + \frac{c+d}{c+d} = 2,$$

por lo que no puede ser entera.

Solución al problema 34. Sea S la intersección de OA con la circunferencia, y sea Q la intersección de OA con PD . Como SA es diámetro, $\angle ACS = 90^\circ$.



Los triángulos APQ y ASC son semejantes ya que comparten $\angle CAS$ y $\angle ACS = \angle AQP = 90^\circ$; luego, $\angle APD = \angle ASC$. Entonces, los triángulos APD y ABD son congruentes, ya que, $\angle PAD = \frac{1}{2}\angle A = \angle DAB$ y $\angle APD = \angle ASC = \angle ABD$ y comparten el lado AD . Por lo tanto, $AP = AB$.

Solución Alternativa. Probamos sólo que $\angle APD = \angle ABD$, el resto es como en la primera solución. Tenemos que $\angle APD = 90^\circ - \angle PAO = 90^\circ - \angle CAO = \angle B$, ya que el triángulo AOC es isósceles y $\angle AOC = 2\angle B$.

Solución al problema 35. Todos los primos mayores que 3 son de la forma $6k \pm 1$. Por lo tanto, la suma de los primos menores que 2000 es a lo más

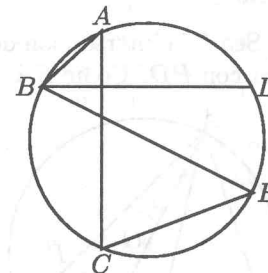
$$2 + 3 + (6 \cdot 1 - 1) + (6 \cdot 1 + 1) + (6 \cdot 2 - 1) + (6 \cdot 2 + 1) + \dots + (6 \cdot 333 - 1) + (6 \cdot 333 + 1)$$

$$= 2 + 3 + 12(1 + 2 + \dots + 333) = 5 + 12 \frac{333 \cdot 334}{2} = 667337.$$

Esto es casi el resultado que queremos, podemos mejorarlo notando que en la suma incluimos a $133 = 6 \cdot 22 + 1$ que no es primo, por lo que la suma de los primos menores que 2000 es a lo más $667337 - 133 = 667204$.

Solución al problema 36. Primero notemos que hay a lo más cinco edades diferentes entre los asistentes a la reunión: si por el contrario, hubiera seis o más, podríamos encontrar seis personas tales que no hubiera dos de ellas de la misma edad, lo cual viola una de las condiciones del problema. Como hay a lo más cinco edades distintas, hay a lo más $5 \cdot 5 \cdot 2 = 50$ combinaciones posibles de nacionalidad, edad y sexo. Como $201 > 4 \cdot 50$, alguna de las combinaciones debe ocurrir al menos cinco veces.

Solución al problema 37. Sea E el punto diametralmente opuesto a B en la circunferencia que pasa por A, B, C y D . Como BE es un diámetro de la circunferencia, el triángulo BCE es rectángulo. Entonces, $\angle CBE = 90^\circ - \angle BEC = 90^\circ - \angle BAC = \angle ABD$. Por lo tanto, los arcos subtendidos por CE y AD son iguales, y como consecuencia, $CE = AD$. Por el teorema de Pitágoras, $BC^2 + CE^2 = BE^2$, o sea, $BC^2 + AD^2 = (2r)^2$.



Solución Alternativa. Sean α y β las medidas de los ángulos inscritos en los arcos BC y AD respectivamente. Como AC es perpendicular a BD , $\alpha + \beta = 90^\circ$, de donde $\sin \beta = \cos \alpha$. Por la ley de senos, $BC = 2r \sin \alpha$ y $AD = 2r \sin \beta$. Entonces, $BC^2 + AD^2 = 4r^2 \sin^2 \alpha + 4r^2 \sin^2 \beta = 4r^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 4r^2$.

Solución al problema 38. Si en cada vértice hay a semillas y la hormiga atómica recorre el cuadrado primero en el sentido de las manecillas del reloj y después en el sentido contrario, entonces dejará $5a$ semillas en cada vértice. A este tipo de recorrido le llamamos *jitterbug*.

Si en cada vértice hay a semillas y la hormiga atómica camina al siguiente vértice en el sentido de las manecillas del reloj y después, desde ese vértice, recorre en el sentido contrario a las manecillas del reloj todo el cuadrado, entonces dejará $2a$ semillas en cada vértice. Este recorrido es un *fox trot*.

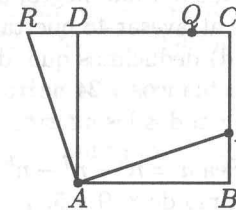
Después de ejecutar tres *jitterbugs* y cuatro *fox trots*, habrá $5^3 \cdot 2^4 = 2000$ semillas en cada vértice.

Solución al problema 39. La ecuación dada equivale a $n(p + q + 1) = pq$, o sea que $p + q + 1$ es un divisor de pq . Como p y q son primos, los divisores de pq son $1, p, q$ y pq . Sólo uno de ellos es mayor que p y que q . Por lo tanto, $p + q + 1 = pq$ y $n = 1$. De $pq = p + q + 1$ obtenemos $(p - 1)(q - 1) = 2$. Las soluciones son $p = 2, q = 3$ y $p = 3, q = 2$.

Solución al problema 40. Supongamos que hay d horas de diferencia entre México y la isla (es decir, que en si en México son las t horas, en la isla son las $t + d$ horas). Entre las 6:25 de la mañana del lunes (hora de México) y las 2:10 de la tarde del martes (hora de la isla) transcurrieron $31 \text{ hrs } 45 \text{ min} - d$, lo cual debe ser la duración del vuelo de ida. De la 1:35 de la tarde del jueves (hora de la isla) a las 3:20 de la tarde del jueves (hora de México) pasaron $1 \text{ hr } 45 \text{ min} + d$, lo cual debe ser la duración del vuelo de regreso. Entonces, como los vuelos de ida y vuelta duran lo mismo, podemos igualar las dos duraciones para obtener

$d = 15$ hrs . Entonces, cuando en México son las 4:00 de la tarde del sábado, en la isla son las 7:00 de la mañana del domingo.

Solución al problema 41. Con regla y compás es fácil construir el punto R tal que APR es triángulo rectángulo isósceles con ángulo recto en A y tal que Q este dentro del ángulo RAP . Después trazamos RQ , las perpendiculares a RQ por A y por P , y la paralela a RQ por A ; estas cuatro rectas son los lados del cuadrado.



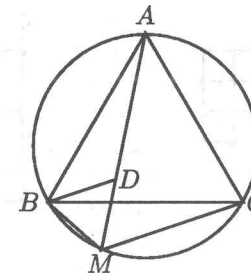
Para ver que la construcción funciona, sólo debemos probar que R está sobre CD . Notemos que $AB = AD$ y, por construcción, $AP = AR$. Además, $\angle PAB = \angle RAD$ porque construimos R tal que $\angle PAR = 90^\circ = \angle BAD$. Entonces, los triángulos ABP y ADR son congruentes por lo que $\angle ADR = 90^\circ$, es decir, R está sobre CD .

Solución al problema 42. Notemos que:

$$\begin{aligned} & (a, b) + [a, b] = a + b \\ \Leftrightarrow & (a, b)^2 + a, b = a(a, b) + b(a, b) \\ \Leftrightarrow & (a, b)^2 + ab = a(a, b) + b(a, b) \\ \Leftrightarrow & (a - (a, b))(b - (a, b)) = 0 \\ \Leftrightarrow & a = (a, b) \text{ o } b = (a, b) \\ \Leftrightarrow & a \text{ divide a } b \text{ o } b \text{ divide a } a \end{aligned}$$

Como $a \leq b$, debe ser que a divide a b .

Solución al problema 43. Sea D el punto de AM tal que $BM = DM$. Tenemos que $\angle BMD = \angle BCA = 60^\circ$, luego, el triángulo BDM es equilátero. Como $\angle ABC = \angle DBM (= 60^\circ)$, $\angle ABD = \angle CBM$. También, $\angle BAD = \angle BCM$, por lo que los triángulos ABD y CBM son congruentes (tienen los ángulos iguales y $AB = CB$). Entonces, $AD = CM$ y por lo tanto, $AM = AD + DM = CM + BM$, como queríamos.



Solución Alternativa. Aplicando el teorema de Ptolomeo al cuadrilátero $ABMC$, obtenemos $BC \cdot AM = AC \cdot BM + AB \cdot CM$. Como $AB = BC = AC$, la ecuación anterior es equivalente a la que debemos probar.

Solución al problema 44. Pintemos los cuartos de blanco y negro como tablero de ajedrez, con el cuarto de la esquina superior derecha negro. Notemos que (a) hay 25 cuartos negros y 24 blancos, (b) cada vez que el ratón cruza una puerta va de un cuarto blanco a uno negro, o viceversa, (c) para recorrer todos los cuartos el ratón debe atravesar 48 puertas, (d) el ratón empieza en un cuarto blanco. De (b), (c) y (d) deducimos que, de recorrer todos los cuartos, el ratón pasaría por 25 cuartos blancos y 24 negros; esto contradice (a). Por lo tanto, el ratón no puede visitar todos los cuartos.

Solución al problema 45. Sea $a = n^9 - n^7 - n^5 + n^3$. Como $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, debemos probar que a es múltiplo de 8, 9 y 5.

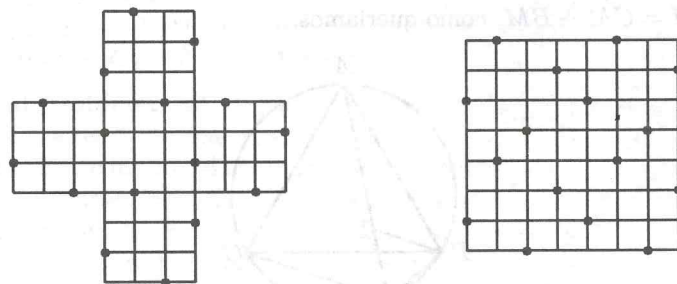
Si n es par, n^3 es múltiplo de 8, y por lo tanto, a también. Si n es impar, tanto $n - 1$ como $n + 1$ son pares, por lo que $a = n^3(n - 1)^2(n + 1)^2(n^2 + 1)$ es múltiplo de 16. Por lo tanto, a siempre es múltiplo de 8.

Si n es múltiplo de 3, a es múltiplo de 27. Si n es de la forma $3k \pm 1$, $n^2 - 1$ es múltiplo de 3 y por lo tanto, $a = n^3(n^2 - 1)^2(n^2 + 1)$ es múltiplo de 9. En cualquier caso, a es múltiplo de 9.

Si n es múltiplo de 5, a es múltiplo de 125. Si no, $n^4 - 1$ es múltiplo de 5 y por lo tanto, $a = n^3(n^2 - 1)(n^4 - 1)$ también. En cualquier caso, a es múltiplo de 5.

Solución al problema 46. Notemos que $NB = NC$, de modo que la circunferencia C con centro en N y radio NB pasa por C . Reflejemos la figura en AN . Como AN pasa por el centro de C , esta circunferencia se refleja en sí misma. El lado AB se refleja en el lado AC (y viceversa), porque AN es la bisectriz del ángulo A . Por lo tanto, B y P , los puntos de intersección de C con AB , se reflejan en Q y C , los puntos de intersección de C con AC . Además L se refleja en sí mismo. Entonces los triángulos BLP y QLC son congruentes, de donde $\angle BLP = \angle QLC$ y son colineales P , L y Q .

Solución al problema 47. Estas son soluciones con 16 guardias para ambas figuras:



Cada figura tiene 64 puntos. Cada guardia vigila a lo más cinco puntos. Doce guardias vigilan a lo más $12 \cdot 5 = 60$ puntos. Por lo tanto, se necesitan al menos 13 guardias por figura.

Veamos si podemos mejorar la cota. Para vigilar un punto en una esquina, se necesita un guardia en ese punto o uno de sus dos vecinos. Dicho guardia vigila sólo 3 o 4 puntos. Es decir, perdemos (al menos) un punto vigilado por cada esquina de la figura. Entonces, en la figura de la derecha 13 guardias vigilan a lo más $13 \cdot 5 - 4 = 61$ puntos, por lo que 13 guardias no bastan. Para la figura de la izquierda, que tiene 8 esquinas, 14 guardias no bastan: $14 \cdot 5 - 8 = 62$.

Solución al problema 48. Los números son de la forma $3^a 5^b 7^c 11^d 13^e 17^f$. El producto de números de esa forma vuelve a ser de esa forma; es un cubo si y sólo si los seis exponentes son múltiplos de tres. Podemos proceder de dos maneras:

Primera forma. Como a puede dejar uno de tres posibles residuos al dividir por 3, de los 2000 números debe haber al menos 667 "cuya a " (es decir, cuyo exponente de 3), deja el mismo residuo al dividir por 3. De la misma manera, de esos 667 debe haber al menos 223 cuya b deja el mismo residuo al dividir por 3; de esos 223, al menos 75 tienen c 's con el mismo residuo; de esos 75, hay 25 cuya d deja el mismo residuo; de esos 25, al menos 9 tienen e 's que dejan el mismo residuo al dividir por 3; finalmente, de esos 9, debe haber al menos tres cuya f deje el mismo residuo al dividir por 3. Estos tres números cumplen lo pedido, pues sus a 's dejan el mismo residuo al dividir por tres y lo mismo es cierto de sus b 's, c 's, d 's, e 's y f 's.

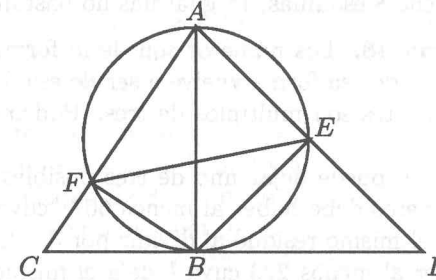
Segunda forma. Hay tres posibilidades para el residuo al dividir por 3 de cada uno de los seis exponentes, por lo tanto, en cuanto a los residuos, hay $3^6 = 729$ posibilidades para los exponentes. Entonces, entre los primeros $2 \cdot 729 + 1 = 1459$ de los 2000 números hay al menos tres cuyos exponentes correspondientes dejan los mismos residuos al dividir por 3. El producto de esos tres es un cubo. Esta solución muestra que no se requieren los 2000 números para hallar tres cuyo producto es un cubo.

Solución al problema 49.

- (a) No: hay 8 líneas entre renglones, columnas y diagonales, pero sólo 7 sumas posibles $(-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3)$.
- (b) Supongamos que es posible. La suma de las sumas de las 6 líneas (renglones y columnas) es dos veces la suma de todos los números del tablero, por lo que es par. Por otra parte, las sumas de las líneas son 6 de los 7 números $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$, y la suma de los 7 es cero. Por lo tanto, el número que no aparece como suma de una línea debe ser par. En particular, tanto -3 como 3 , son sumas de alguna línea. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el primer renglón tiene tres unos y el segundo, tres menos unos. Para que las tres columnas tengan sumas diferentes, los números del tercer renglón debe ser $0, 1$ y -1 en algún orden. Pero entonces, tanto el tercer renglón, como la columna con el 0 , tienen suma

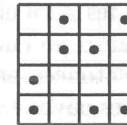
cero. Esta contradicción muestra que es imposible llenar las casillas en la forma pedida.

Solución al problema 50. Los triángulos rectángulos ABC y AFB son semejantes, por lo que $\angle BCA = \angle FBA$. Como el cuadrilátero $AFBE$ es cíclico, $\angle AEF = \angle ABF$. Luego, $\angle AEF = \angle BCA = \angle DCA$. Por lo tanto, los triángulos AEF y ACD son semejantes por tener dos ángulos iguales. Entonces, $\frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AD}$, es decir, $AC \cdot AF = AD \cdot AE$.



Solución al problema 51. Notemos que si la construcción es posible para $n = k$, tomando cuadrados de lado menor contenidos en el de k , obtenemos cuadrados que cumplen las condiciones para $n < k$.

En la figura se muestra un cuadrado con $n = 4$, por lo que la construcción es posible para $n = 1, 2, 3$ y 4 .

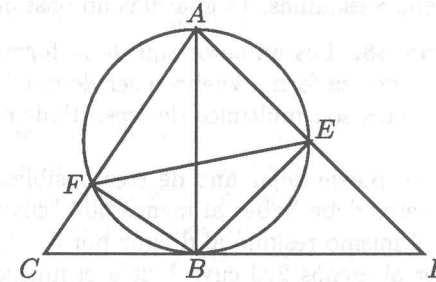


Ahora veremos que no es posible para $n \geq 5$, para esto, basta ver que es imposible para $n = 5$. Supongamos que fuera posible. Cada columna del cuadrado debe tener al menos tres cuadros del mismo color. Como son cinco columnas, debe haber al menos tres en las que predomina el mismo color, digamos que en las columnas A , B y C predomina el negro. Entonces, A , B y C tienen cuadros negros en 9 renglones contando renglones compartidos. (Decimos que dos columnas *comparten* un renglón si ambas tienen un cuadro negro en ese renglón.) Por las condiciones del problema cualesquiera dos de A , B y C comparten a lo más un renglón. Entonces, hay cuadros negros en al menos $9 - 1 - 1 - 1 = 6$ renglones, lo cual es absurdo.

Solución al problema 52. Observemos que $\frac{1}{2} - 4(\frac{1}{2} - a)(\frac{1}{2} - b)(\frac{1}{2} - c) = (a + b + c) - 2ab - 2bc - 2ca + 4abc = (a + b + c)^2 - 2ab - 2bc - 2ca + 4abc = a^2 + b^2 + c^2 + 4abc$. Ahora, por la desigualdad del triángulo, $a < b + c = 1 - a$, o sea, $a < \frac{1}{2}$. Entonces $(\frac{1}{2} - a)(\frac{1}{2} - b)(\frac{1}{2} - c) > 0$, que en vista de la primera cadena de igualdades equivale a lo que queremos probar.

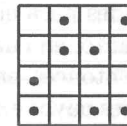
cero. Esta contradicción muestra que es imposible llenar las casillas en la forma pedida.

Solución al problema 50. Los triángulos rectángulos ABC y AFB son semejantes, por lo que $\angle BCA = \angle FBA$. Como el cuadrilátero $AFBE$ es cíclico, $\angle AEF = \angle ABF$. Luego, $\angle AEF = \angle BCA = \angle DCA$. Por lo tanto, los triángulos AEF y ACD son semejantes por tener dos ángulos iguales. Entonces, $\frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AD}$, es decir, $AC \cdot AF = AD \cdot AE$.



Solución al problema 51. Notemos que si la construcción es posible para $n = k$, tomando cuadrados de lado menor contenidos en el de k , obtenemos cuadrados que cumplen las condiciones para $n < k$.

En la figura se muestra un cuadrado con $n = 4$, por lo que la construcción es posible para $n = 1, 2, 3$ y 4 .



Ahora veremos que no es posible para $n \geq 5$, para esto, basta ver que es imposible para $n = 5$. Supongamos que fuera posible. Cada columna del cuadrado debe tener al menos tres cuadros del mismo color. Como son cinco columnas, debe haber al menos tres en las que predomina el mismo color, digamos que en las columnas A , B y C predomina el negro. Entonces, A , B y C tienen cuadros negros en 9 renglones contando renglones compartidos. (Decimos que dos columnas *comparten* un renglón si ambas tienen un cuadro negro en ese renglón.) Por las condiciones del problema cualesquiera dos de A , B y C comparten a lo más un renglón. Entonces, hay cuadros negros en al menos $9 - 1 - 1 - 1 = 6$ renglones, lo cual es absurdo.

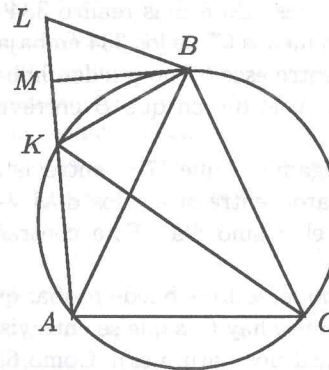
Solución al problema 52. Observemos que $\frac{1}{2} - 4(\frac{1}{2} - a)(\frac{1}{2} - b)(\frac{1}{2} - c) = (a + b + c) - 2ab - 2bc - 2ca + 4abc = (a + b + c)^2 - 2ab - 2bc - 2ca + 4abc = a^2 + b^2 + c^2 + 4abc$. Ahora, por la desigualdad del triángulo, $a < b + c = 1 - a$, o sea, $a < \frac{1}{2}$. Entonces $(\frac{1}{2} - a)(\frac{1}{2} - b)(\frac{1}{2} - c) > 0$, que en vista de la primera cadena de igualdades equivale a lo que queremos probar.

Observación. Por la fórmula de la Herón, $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-a)(\frac{1}{2}-b)(\frac{1}{2}-c)$ es el cuadrado del área del triángulo de lados a , b y c . Esto nos da otra forma ver que ese producto es positivo.

Solución al problema 53. El lado derecho de la igualdad cuenta el número de subconjuntos de $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ con m elementos. Cada uno de esos subconjuntos lo ordenamos de menor a mayor y nos fijamos en su k -ésimo elemento. Aseguramos que la suma del lado izquierdo cuenta los mismos subconjuntos según su k -ésimo elemento. ¿Cuántos subconjuntos de m elementos hay con k -ésimo elemento j ? Los primeros $k-1$ elementos los debemos de escoger de $\{1, 2, 3, \dots, j-1\}$, esto se puede hacer de $\binom{j-1}{k-1}$ formas; los otros $m-j$ elementos los debemos elegir de $\{j+1, j+2, \dots, n\}$, esto se puede hacer de $\binom{n-j}{m-j}$ formas. Por lo tanto hay $\binom{j-1}{k-1} \binom{n-j}{m-j}$ subconjuntos de $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ que tienen m elementos y cuyo k -ésimo elemento es j , que es lo que faltaba probar.

Solución al problema 54. Sea L el punto de AK tal que el triángulo KBL es isósceles con $BK = BL$ y sea M el punto medio de KL . Entonces, $AB^2 - KB^2 = AB^2 - LB^2 = (AM^2 + MB^2) - (LM^2 + MB^2) = AM^2 - LM^2 = (AM - LM)(AM + LM) = (AM - MK)AL = AK \cdot AL$. Así que basta ver que $AL = KC$.

Ahora notemos que $\angle LKB = \angle ACB (= 180^\circ - \angle BKA)$, por lo que los triángulos isósceles LBK y ABC son semejantes. Entonces, $\angle LBK = \angle ABC$, y $\angle LBA = \angle KBC$ (sumando $\angle KBA$). Como además $LB = KB$ y $AB = CB$, los triángulos LBA y KBC son congruentes. Por lo tanto $AL = KC$, que es lo que nos faltaba probar.



Solución Alternativa. Sean R el circunradio de ABC , $\beta = \angle A = \angle C$ y $\alpha = \angle KAB = \angle KCB$. De la ley de senos obtenemos $KA \cdot KC = 4R^2 \sin \angle KCA \cdot \sin \angle KAC = 4R^2 \sin(\beta - \alpha) \sin(\alpha + \beta)$ y $AB^2 - KB^2 = 4R^2(\sin^2 \angle ACB - \sin^2 \angle KCB) = 4R^2(\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha)$. Ahora usamos las identidades:

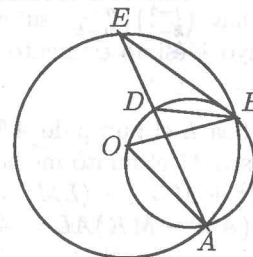
$$\sin(\beta \pm \alpha) = \sin \beta \cos \alpha \pm \sin \alpha \cos \beta.$$

Multiplicando las dos obtenemos:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\beta - \alpha) \operatorname{sen}(\beta + \alpha) &= \operatorname{sen}^2 \beta \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \beta \\ &= \operatorname{sen}^2 \beta (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) - \operatorname{sen}^2 \alpha (1 - \operatorname{sen}^2 \beta) \\ &= \operatorname{sen}^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \alpha,\end{aligned}$$

que es lo que nos faltaba probar.

Solución al problema 55. Como $\angle BEA$ está inscrito en el arco AB de C , $\angle BOA = 2\angle BEA$. Ahora, $\angle BOA = \angle BDA$, pues ambos están inscritos en el arco AB de D . Luego, $2\angle BEA = \angle BDA = \angle BED + \angle DBE$, o sea, $\angle BED = \angle DBE$ y por lo tanto $DB = DE$.



Solución al problema 56. Supongamos que es falso el resultado. Sea A un embajador, A se entrevistó 1999 veces en 6 días, por lo tanto, hay al menos un día en el que se entrevistó con 334 embajadores. Las entrevistas entre esos 334 embajadores deben haber ocurrido en los otros cinco días del congreso. Sea B uno de esos 334 embajadores. En 5 días realizó 334 entrevistas, por lo que algún día entrevistó a por lo menos 67 de los 334 embajadores que A entrevistó en un día. Las entrevistas entre esos 67 no pueden haber ocurrido ni el día en que A entrevistó a los 334, ni el día en que B entrevistó a los 67; entonces, ocurrieron los otros 4 días.

Repitiendo el argumento llegamos a que 17 se entrevistaron entre sí en 3 días, 6 embajadores se entrevistaron entre sí en dos días y finalmente, que 3 embajadores se entrevistaron el mismo día. Esta contradicción muestra que el resultado es verdadero.

Comentario. Con este mismo método se puede probar que si el congreso duró n días y hay más de $n!$ asistentes, hay tres que se entrevistaron entre sí el mismo día (e es la base de los logaritmos naturales). Como $6!e$ es aproximadamente 1957.1629, no necesitamos que haya 2000 embajadores en el problema: bastan 1958.

Solución al problema 57. El máximo es 7. En efecto, calculamos fácilmente que $f(1093) = f(3^6 + 3^5 + 3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 + 1) = 7$.

Ahora probaremos que para toda n , se tiene que $2n + 1 \geq 3^{f(n)}$. Usaremos el principio de inducción matemática:

La desigualdad se cumple para $n = 0$, ya que $f(0) = 0$.

Supongamos que la desigualdad se cumple para toda $n < k$ y probemos que se cumple para k también. Necesariamente k es de la forma $3m$, $3m + 1$ o $3m + 2$. Por la hipótesis de inducción, $2m + 1 \geq 3^{f(m)}$. Si k es de la forma $3m$ o $3m + 2$, tenemos que $2k + 1 \geq 2m + 1 \geq 3^{f(m)} = 3^{f(k)}$. Si $k = 3m + 1$, entonces, $2k + 1 = 3(2m + 1) \geq 3 \cdot 3^{f(m)} = 3^{f(m)+1} = 3^{f(k)}$. Por lo tanto, la desigualdad se cumple para toda n entre 0 y 2000.

Ahora podemos ver que 7 es el máximo. Para toda n entre 0 y 2000, tenemos

$$2 \cdot 2000 + 1 \geq 2 \cdot n + 1 \geq 3^{f(n)},$$

o sea, $3^{f(n)} \leq 4001 < 3^8$, de donde $f(n) < 8$.

Solución Alternativa. Es fácil demostrar por inducción que $f(n)$ es el número de unos en la expansión en base 3 de n . Como $2000 = 2202002_3$, el número entre 0 y 2000 con más unos en su expansión ternaria es $1111111_3 = 1093$, y por lo tanto el máximo es 7.

Solución al problema 58.

	•		•
•			•
•	•		

a	b	c	a
c			b
b			c
a	c	b	a

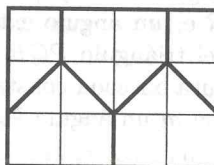
	b	c	b
b	a	a	a
c	a	•	a
b	a	a	a

El primer cuadro prueba que se pueden elegir seis casillas sin formar triángulos isósceles. Probaremos que seis es el máximo.

Si no elegimos ninguna casilla del cuadrado central de 2×2 , podemos elegir a lo más dos casillas marcadas con a en el segundo cuadro, a lo más dos marcadas con b y a lo más dos marcadas con c , sin formar triángulos isósceles. Por lo tanto, en este caso podemos elegir a lo más seis casillas.

Si elegimos al menos una casilla del cuadrado central de 2×2 , tenemos la situación del tercer cuadro. Aquí podemos elegir a lo más dos casillas marcadas con a (es fácil revisar que en todas las formas de elegir tres, se forman triángulos isósceles) y a lo más una de las marcadas con b y una de las marcadas con c . Por lo tanto, podemos elegir a lo más cuatro de las casillas marcadas con a , b o c ; como aparte de esas sólo hay dos casillas, podemos elegir a lo más seis.

Solución al problema 59. En cada uno de los 5 polígonos de la figura la distancia entre los puntos más lejanos es $\sqrt{5}$ y como tenemos que acomodar 6 puntos, dentro de alguno de estos polígonos habrá dos, esos puntos estarán a una distancia menor o igual que $\sqrt{5}$.



Solución al problema 60. Pensemos en un número N de la lista de Martín. Primero recorremos sus dígitos de izquierda a derecha escribiendo un 1 si vemos un 1 o un 3 y escribiendo un 2 si vemos un 2 o un 4, luego lo recorremos otra vez escribiendo un 1 si vemos un 1 o un 4 y escribiendo un 2 si vemos un 2 o un 3. Obtenemos así un número N' de 50 dígitos cada uno de los cuales es 1 o 2. Como N tiene el mismo número de dígitos 1 que 2, N' tiene 25 unos y 25 doses, es decir, está en la lista de Jorge.

Este proceso es invertible, pues dado un número N' de la lista de Jorge podemos recuperar N así: consultamos los dígitos en las posiciones 1 y 26 de N' ; si ambos son 1, el primer dígito de N es 1; si son 1 y 2 respectivamente, el primer dígito de N es 3; si son 2 y 1 respectivamente, el primer dígito de N es 4; si ambos son 2, el primer dígito de N es 2; luego consultamos los dígitos 2 y 27, y a partir de ellos deducimos de la misma manera cuál es el segundo dígito de N , etc.

Entonces, hemos dicho como asociarle a cada número de la lista de Martín un único número de la lista de Jorge y viceversa, por lo que ambas listas tienen la misma cantidad de números.

Soluciones a los Problemas de Concursos Nacionales

Solución al problema 61. Claramente 10 es suertudo y como $1^2 + 3^2 = 3^2 + 1^2 = 10$, tenemos que 13 y 31 también lo son. Sucede que $3^2 + 2^2 = 13$, por lo que 32 es suertudo. Entonces, 31 y 32 son dos suertudos consecutivos y por lo tanto para cualquier $N \geq 1$,

$$\underbrace{111\dots1}_{31 \text{ unos}} \underbrace{000\dots0}_{N \text{ ceros}} \text{ y } \underbrace{111\dots1}_{31 \text{ unos}} \underbrace{000\dots0}_{N-1 \text{ ceros}} 1$$

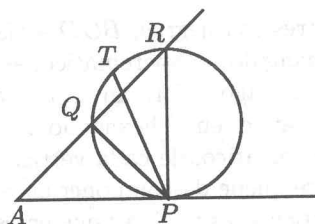
son dos enteros suertudos consecutivos.

Alternativamente, si n y $n+1$ son ambos suertudos, también lo son

$$\underbrace{111\dots10}_{n \text{ unos}} \text{ y } \underbrace{111\dots1}_{n+1 \text{ unos}}$$

Y repitiendo la construcción, hallamos una infinidad de parejas de enteros suertudos consecutivos.

Solución al problema 62. Sea A el punto de donde parten los rayos, β el ángulo QPT que es igual al ángulo TPR y γ el ángulo QRP que es igual al ángulo QPA . El ángulo PQR es un ángulo externo al triángulo APQ , y es igual a $\alpha + \gamma$. Considerando el triángulo PQR , $\alpha + 2\beta + 2\gamma = \pi$, de donde $\beta + \gamma = \frac{\pi - \alpha}{2}$, y entonces la figura buscada consta de todos los puntos del rayo que parte de P y que forma con m un ángulo $\frac{\pi - \alpha}{2}$, a partir de la intersección de este rayo con m .

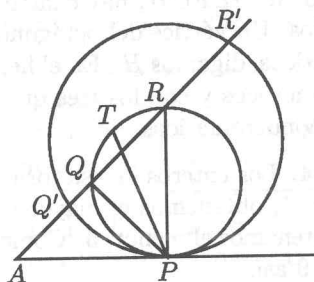


Solución alternativa para ver la medida del ángulo APT.

Supongamos que una circunferencia Γ es tangente a l en P y corta a m en Q y en R y que otra circunferencia Γ' también es tangente a l en P y que corta a m en Q' y en R' con los puntos sobre m en el orden Q', Q, R, R' . Sea A el punto del que parten los rayos l y m . Como l es tangente a Γ , $\angle QPA = \angle QRP$ y análogamente, $\angle Q'PA = \angle Q'R'P$. Entonces,

$$\angle QPQ' = \angle QPA - \angle Q'PA = \angle QRP - \angle Q'R'P = \angle RPR'.$$

Entonces, los ángulos QPR y $Q'PR'$ tienen la misma bisectriz y por lo tanto la bisectriz de QPR no depende de la circunferencia Γ que se trace. Podemos entonces calcular el ángulo entre la bisectriz y el rayo tomando la circunferencia que es tangente a l en P y tangente a m en $Q = R$. Como APQ es un triángulo isósceles, el ángulo buscado es $\angle APQ = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.



Solución al problema 63. Con triángulo nos referimos a un triángulo con vértices en el octágono y con ángulo, a dos lados de un triángulo. Un ángulo es bicolor si sus lados son de color distinto. Nos fijamos en un vértice del octágono, si k de las líneas que lo unen con los otros vértices son de un color (y $7 - k$ del otro), entonces es vértice de $k(7 - k) \leq 3 \cdot 4$ ángulos bicolor. Luego el número de ángulos bicolor es $\angle_b \leq 8 \cdot 3 \cdot 4$. Cada triángulo bicolor tiene exactamente dos ángulos bicolor, así el número de triángulos bicolor es $\frac{1}{2} \angle_b$ y por lo tanto el número de triángulos monocromáticos es $\Delta_m = \binom{8}{3} - \frac{1}{2} \angle_b \geq \binom{8}{3} - \frac{1}{2} 8 \cdot 3 \cdot 4 = 8$. Entonces siempre hay 8 triángulos monocromáticos (se pide probar que hay al menos 7).

Solución Alternativa. Probaremos primero que en un hexágono se forman dos triángulos monocromáticos. Desde luego hay uno: nos fijamos en un vértice A cualquiera del hexágono, de él salen cinco líneas de las cuales al menos tres son de un color, supongamos que AB , AC y AD son rojas. Si una de BC , CD o DB fuera roja, entonces uno de los triángulos ABC , ACD o ABD sería

un triángulo rojo y si las tres son negras, BCD sería un triángulo negro. De cualquier forma hay un triángulo monocromático, sea V uno de sus vértices. Los otros cinco vértices del hexágono forman un pentágono, si en el pentágono hay un triángulo monocromático, en el hexágono hay dos. Si en el pentágono no hay un triángulo monocromático, de cada vértice deben salir dos líneas de cada color y el pentágono se puede descomponer en dos ciclos: uno rojo y uno negro. Al considerar el vértice V es fácil ver que en este caso también hay dos triángulos monocromáticos.

Ahora veremos que en un heptágono se forman cuatro triángulos monocromáticos. Sean $ABCDEFG$ los vértices del heptágono. En el hexágono $BCDEFG$ sabemos que hay dos triángulos monocromáticos, supongamos que B es uno de los vértices de uno de esos triángulos. Como en el hexágono $ACDEFG$ hay dos triángulos monocromáticos, en el heptágono hay tres: esos dos y el que tiene a B como vértice. Algún vértice del heptágono tiene que ser vértice de dos de esos triángulos, supongamos que es G . En el hexágono $ABCDEF$ hay dos triángulos monocromáticos y por lo tanto en el heptágono hay cuatro: esos dos y los dos de vértice G .

Finalmente, mostraremos que en un octágono se forman siete triángulos monocromáticos. Sea $ABCDEFGH$ el octágono. En el heptágono $BCDEFGH$ hay cuatro triángulos monocromáticos, dos de ellos comparten un vértice, digamos B . Ahora, en el heptágono $ACDEFGH$, hay cuatro triángulos monocromáticos distintos de los otros dos. Un vértice del octágono debe estar en tres de los seis triángulos monocromáticos, digamos H . En el heptágono $ABCDEFH$ hay cuatro triángulos monocromáticos y con los tres que tienen a H como vértice tenemos siete triángulos monocromáticos.

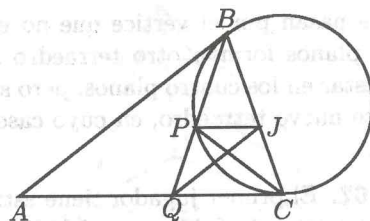
Solución al problema 64. Los enteros de esa forma son los del 5 al 45.

Con $a_1 = a_2 = \dots = a_9 = 1$, obtenemos el mayor de esos números, 45. Con $a_1 = a_2 = \dots = a_9 = 9$, obtenemos el menor, 5. Como $\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \dots + \frac{7}{7} = \frac{28}{7} = 4$, se pueden escribir 6, 7, 8 y 9 así:

$$\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \dots + \frac{7}{7} + \frac{8}{a_8} + \frac{9}{a_9} = \begin{cases} 6 & \text{si } a_8 = 8, a_9 = 9 \\ 7 & \text{si } a_8 = 4, a_9 = 9 \\ 8 & \text{si } a_8 = 8, a_9 = 3 \\ 9 & \text{si } a_8 = 2, a_9 = 9 \end{cases}$$

Si tomamos cada $a_i = i$, cada fracción es 1 y obtenemos 9. Si cambiamos alguna a_i de i a 1, la suma aumenta $\frac{i}{1} - \frac{i}{i} = i - 1$, entonces podemos conseguir aumentos (independientes) de 1, 2, 3, ..., 8 y así formamos los números del 10 al 45.

Solución al problema 65. Como JQ es paralela a AB , $\angle JQP = \angle QBA$ y $\angle QBA = \angle JCP$ por que subtienden el mismo arco en la circunferencia. Por lo tanto, $JPQC$ es un cuadrilátero cíclico.



Por otro lado:

$$BC^2 = AC \cdot QC$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{QC}{BC}$$

$\Leftrightarrow$

$$\triangle BCA \sim \triangle QCB \text{ (porque comparten el ángulo } C)$$

$\Leftrightarrow$

$$\angle PQC = \angle JCQ \text{ (porque } \triangle BCA \text{ es isósceles)}$$

$\Leftrightarrow$

$$JPQC \text{ es un trapecio isósceles (porque } JPQC \text{ es cíclico)}$$

$\Leftrightarrow$

$$JP \text{ es paralelo a } QC \text{ (otra vez porque } JPQC \text{ es cíclico),}$$

donde usamos dos veces que los únicos trapecios cíclicos son los isósceles.

Solución al problema 66. Para cada plano equidistante P , los cinco puntos A, B, C, D, E están en dos planos paralelos a P , dos en uno y tres en el otro. Recuerde que no hay cuatro puntos en un mismo plano.

Tomemos cuatro de los puntos digámoslos A, B, C, D y veamos donde puede colocarse el quinto punto E para obtener la mayor cantidad de planos equidistantes. Si los cinco puntos se deben dividir en dos conjuntos uno de dos elementos y otro de tres, tenemos que hay 2 posibilidades: (1) que E esté en un conjunto de tres elementos, y (2) que E esté en un conjunto de dos elementos.

En el caso (1), formemos primero un paralelepípedo de caras paralelas al plano que determinan aristas opuestas del tetraedro $ABCD$. El punto E deberá unirse a un par de puntos del conjunto $\{A, B, C, D\}$ y entonces determinará un plano que será paralelo tanto al otro plano que pasa por los otros dos puntos como al plano equidistante correspondiente, esto se puede hacer de $\binom{4}{2} = 6$ maneras y los planos que se determinan así son los planos que contienen a las caras del paralelepípedo, siendo la cara paralela la otra donde se encuentran los otros dos puntos y determinando como plano equidistante el plano paralelo a los anteriores que pasa por los puntos medios de las cuatro aristas que no están sobre los dos primeros planos, así en éste caso solamente hay tres posibles planos equidistantes y estos se logran cuando el punto E es cualquier vértice del paralelepípedo diferente de A, B, C, D .

En el caso (2), E deberá unirse a uno de los puntos A, B, C, D y los restantes 3 estarán en un plano paralelo al equidistante, esto se puede hacer de cuatro maneras y los planos donde E puede estar son los planos paralelos a las caras

del tetraedro $ABCD$ que pasan por el vértice que no está en la cara que se está considerando, estos planos forman otro tetraedro semejante al $ABCD$. Claramente E no puede estar en los cuatro planos, pero si en tres, cuando E es uno de los vértices de este nuevo tetraedro, en cuyo caso se obtienen también tres planos equidistantes.

Solución al problema 67. El primer jugador tiene estrategia ganadora. Como 1999 es impar, el número de fichas con el lado rojo hacia arriba y el número de fichas con el lado negro hacia arriba son distintos. Entonces, el primer jugador en su turno puede hacer que el número de fichas rojas sea igual al número de fichas negras quitando de las que haya más. No importa qué haga el segundo jugador, dejará cantidades diferentes de fichas rojas y negras. Después el primer jugador vuelve a hacer que haya el mismo número de fichas rojas que negras. Como al segundo siempre le toca jugar cuando hay la misma cantidad de rojas que negras, no puede evitar dejar cantidades diferentes de fichas rojas y negras, por lo tanto gana el primero.

Solución al problema 68. Supongamos que sí los hay, y sea p el primer primo y r la diferencia de la progresión. Así, la progresión es:

$$p, p + r, p + 2r, \dots, p + 1998r.$$

El primo p no puede ser ninguno de los primeros primos: $2, 3, \dots, 1997$, ya que si es alguno de estos entonces $p + pr$, que está en la progresión, no es primo. Luego $p \geq 1999$.

Como p es impar y $p + r$ es primo, entonces r es par. Todos los números pares son de la forma $6n$ o $6n + 2$ o $6n - 2$. Veamos ahora que r no puede ser ni de la forma $6n + 2$ ni de la forma $6n - 2$. En efecto, como p es primo, éste es de la forma $6k + 1$ o $6k - 1$. En cualquiera de los cuatro casos hay en la progresión un múltiplo de 3:

$$p + r = (6k + 1) + (6n + 2)$$

$$p + 2r = (6k + 1) + 2(6n - 2)$$

$$p + 2r = (6k - 1) + 2(6n + 2)$$

$$p + r = (6k - 1) + (6n - 2).$$

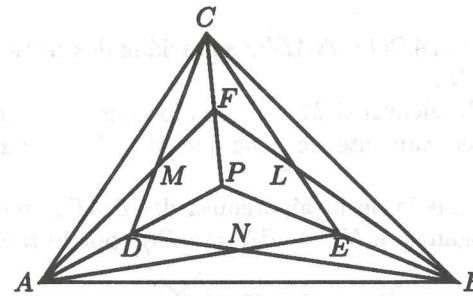
Por lo tanto, r es de la forma $6n$ y entonces la progresión es:

$$p, p + 6n, \dots, p + 1998(6n).$$

Pero $p \geq 1999$ y $n \geq 1$ implican que $p + 1998(6n) \geq 1999 + 11988 = 13985 > 12345$.

Así los números $p + jr$ no pueden ser todos menores que 12345.

Solución al problema 69.



- (a) Como en el triángulo ABP , BD y AE son medianas se tiene que N es el centroide del triángulo ABP y como las medianas dividen al triángulo en seis triángulos de la misma área se tiene que:

$$(PDNE) = \frac{1}{3}(ABP)$$

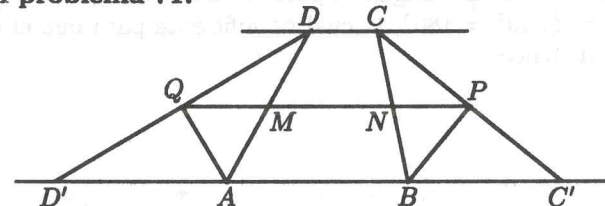
Análogamente $(PELF) = \frac{1}{3}(BCP)$ y $(PFMD) = \frac{1}{3}(CAP)$ por lo que concluimos que:

$$(DNELFM) = \frac{1}{3}(ABC).$$

- (b) Considere el triángulo CDE . Como $\frac{CM}{MD} = \frac{CL}{LE}$ se tiene que ML y DE son paralelas, si Q es el punto de intersección de DL y EM se tiene que los triángulos QDE y QLM son semejantes, por lo que: $\frac{DQ}{QL} = \frac{EQ}{QM} = \frac{3}{2}$ esto es DL y EM se cortan en el punto Q que divide a los segmentos en razón $3 : 2$. Con el mismo argumento se muestra que FN y DL , se corta en un punto que los divide en razón $3 : 2$, luego el resultado.

Solución al problema 70. Supongamos que no hay puntos marcados a distancia $\frac{1}{2}$ de la orilla de la cuadrícula. Probaremos que hay dos puntos marcados a distancia menor o igual que $\sqrt{2}$. Como no hay puntos marcados a distancia $\frac{1}{2}$ de la orilla, entonces todos los marcados están en la cuadrícula central de 6×6 . Dividimos esta cuadrícula en 9 cuadrados de 2×2 . Al haber 10 puntos marcados forzosamente habrá dos en un mismo cuadrado de 2×2 . Esos dos puntos están a distancia menor o igual que $\sqrt{2}$.

Solución al problema 71.



Sean C' y D' los puntos de intersección de CP con AB y de DQ con AB . Como AB es paralela a CD y por ser CP bisectriz tenemos que $\angle PCB = \angle BC'P$, luego $\triangle BCP$ y $\triangle BC'P$ son congruentes, por lo que son rectángulos y $CP =$

PC' . Análogamente $\triangle ADQ$ y $\triangle AD'Q$ son triángulos rectángulos congruentes por lo que $DQ = QD'$.

Entonces $PQ \parallel AB$, además si M y N son los puntos de intersección de PQ con AD y BC respectivamente, se tiene que M y N son puntos medios y que $MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

Como M es punto medio de la hipotenusa del $\triangle ADQ$ tenemos que $QM = AM = \frac{1}{2}AD$, análogamente $NP = BN = \frac{1}{2}BC$, por lo tanto $PQ = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA)$.

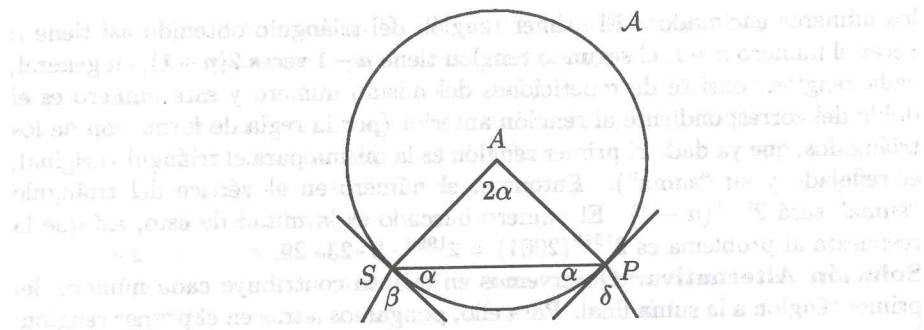
Solución al problema 72. Tomamos un polígono ortogonal cualquiera y lo colocamos con sus lados sobre las líneas de una cuadrícula infinita. Pintamos la cuadrícula como tablero de ajedrez. Debemos probar que el polígono tiene al menos un lado par suponiendo que es posible llenarlo con rectángulos de 2×1 . Probaremos algo un poco más fuerte: que si un polígono ortogonal de n lados tiene todos los lados impares, entonces no es posible que tenga el mismo número de cuadros blancos que negros y de hecho, probaremos que el número B de cuadros blancos y N , el número de cuadros negros cumplen $|N - B| = \frac{1}{4}n$. Asignamos a cada cuadro negro del interior del polígono 4, 1 por cada lado y a cada cuadro blanco asignamos -4 , -1 por cada lado. La suma de los valores asignados a los cuadros es obviamente $4(N - B)$. Por otra parte, la contribución total de cada segmento del interior es 0: 1 por ser lado de un cuadro negro y -1 por ser lado de un cuadro blanco. Entonces, la suma de los valores asignados a los cuadros es igual a la suma de los valores asignados a los segmentos en la orilla del polígono. Pero si todos los lados tienen longitud impar, la suma de los valores de los segmentos en cada lado es siempre 1 o siempre -1 . Por lo tanto, $4(N - B) = n$ o $-n$, es decir, $|N - B| = \frac{1}{4}n$.

Solución al problema 73.

(a) Sean A el centro de $\mathcal{A}$, B el centro de $\mathcal{B}$, C el centro de $\mathcal{C}$ y D el centro de $\mathcal{D}$. Sabemos que los puntos de tangencia están alineados con los respectivos centros.

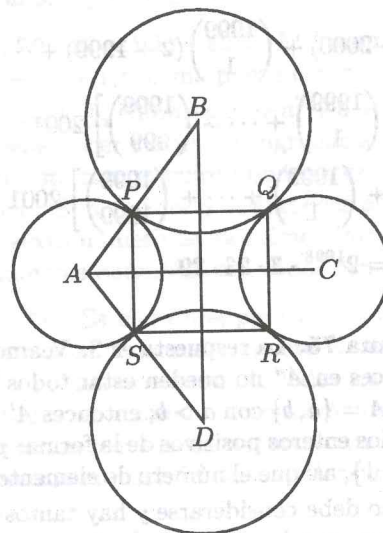
Primera forma. Sabemos también que el ángulo central en cualquier círculo es el doble del ángulo que forma la tangente con la cuerda, así que si $\angle SAP = 2\alpha$, $\angle PBQ = 2\beta$, $\angle QCR = 2\gamma$ y $\angle RDS = 2\delta$, entonces $\angle SPQ = \alpha + \delta$ y $\angle QRD = \gamma + \beta$. De esta manera, en el cuadrilátero $PQRS$ la suma de dos ángulos opuestos es $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \frac{1}{2}(2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta) = \frac{1}{2}360^\circ = 180^\circ$, lo cual es suficiente para que el cuadrilátero $PQRS$ sea cíclico.





Segunda forma. Como $AP = AS$, entonces $\angle QPS = 180^\circ - \angle BPQ - \angle SPA = 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\angle QBP) - (90^\circ - \frac{1}{2}\angle PAS) = \frac{1}{2}(\angle B + \angle A)$. Análogamente, $\angle SRQ = \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$. Por lo tanto, $\angle QPS + \angle SRQ = 180^\circ$.

- (b) Observemos que la distancia de A a B es 5 y que, por simetría, $ABCD$ es rombo, así que sus diagonales se intersectan perpendicularmente, digamos en O , y $PQRS$ es rectángulo. Como $OA = 3$ entonces, por Pitágoras, $OB = 4$. Por otro lado los triángulos APS y ABD son semejantes en razón $2 : 5$, así que $PS = \frac{2}{5} \cdot 8 = \frac{16}{5}$. Análogamente $PQ = \frac{3}{5} \cdot 6 = \frac{18}{5}$. El área es $\frac{16 \cdot 18}{25} = \frac{288}{25}$.



Solución al problema 74. Si se empieza con los números del 1 al n en el primer renglón, el número del vértice será $2^{n-1}(n+1)$. Para ver esto, tomamos una copia reflejada del triángulo construido (es decir, en el primer renglón, a la izquierda está n , luego sigue $n-1$, etc.), la empalmamos con éste y sumamos

los números encimados. El primer renglón del triángulo obtenido así tiene n veces el número $n+1$; el segundo renglón tiene $n-1$ veces $2(n+1)$; en general, cada renglón consiste de repeticiones del mismo número y este número es el doble del correspondiente al renglón anterior (por la regla de formación de los triángulos, que ya dado el primer renglón es la misma para el triángulo original, el reflejado y su "suma"). Entonces, el número en el vértice del triángulo "suma" será $2^{n-1}(n+1)$. El número buscado es la mitad de esto, así que la respuesta al problema es $2^{1998}(2001) = 2^{1998} \cdot 3 \cdot 23 \cdot 29$.

Solución Alternativa. Observemos en cuánto contribuye cada número del primer renglón a la suma final. Para ello, pongamos letras en el primer renglón:

$$\begin{array}{ccccccc}
 a & & b & & c & & d \quad \dots \\
 & a+b & & b+c & & c+d & \dots \\
 & & a+2b+c & & b+2c+d & & \dots \\
 & & & a+3b+3c+d & & & \dots
 \end{array}$$

Con este esquema es claro que los coeficientes que van apareciendo son los del triángulo de Pascal, así que el número buscado es:

$$A := \binom{1999}{0}1 + \binom{1999}{1}2 + \binom{1999}{2}3 + \dots + \binom{1999}{1999}2001.$$

Ahora recordemos que $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$, así que podemos factorizar y

$$\begin{aligned}
 A &= \binom{1999}{0}(1+2000) + \binom{1999}{1}(2+1999) + \dots + \binom{1999}{999}(1000+1001) \\
 &= \left[\binom{1999}{0} + \binom{1999}{1} + \dots + \binom{1999}{999} \right] 2001 \\
 &= \frac{1}{2} \left[\binom{1999}{0} + \binom{1999}{1} + \dots + \binom{1999}{1999} \right] 2001 \\
 &= \frac{1}{2} 2^{1999} 2001 = 2^{1998} \cdot 3 \cdot 23 \cdot 29.
 \end{aligned}$$

Solución al problema 75. La respuesta es 3. Veamos primero que si A tiene dos elementos, entonces en A'' no pueden estar todos los números del 1 al 40:

Primera forma. Sea $A = \{a, b\}$ con $a > b$; entonces $A' = \{a, b, a-b, a+b\}$, y los elementos de A'' son los enteros positivos de la forma: $pa+qb+r(a-b)+s(a+b)$ con $p, q, r, s \in \{-1, 0, 1\}$, así que el número de elementos de A'' es menor o igual que $\frac{3^4-1}{2}$ (pues el 0 no debe considerarse y hay tantos números positivos como negativos); sin embargo, $a+b$ se obtiene de dos maneras distintas, así que A'' no puede tener 40 elementos.

Segunda forma. Sea A como en la primera forma y sea B el conjunto de enteros (positivos, negativos o cero) que se obtienen escogiendo uno o más elementos de A' , poniéndole el signo $+$ o el signo $-$ a cada uno y sumando los números con signo. Probaremos que B tiene a lo más 37 elementos. Los elementos de

B son de la forma $ka + lb$ con $|k|, |l| \leq 3$. Es fácil ver que si $|k| = 3$, entonces $|l| = 0$ o 1 ; análogamente si $|l| = 3$, entonces $|k| = 0$ o 1 . Por lo tanto, $(|k|, |l|)$ no puede ser $(2, 3)$, $(3, 2)$ o $(3, 3)$. Para $(|k|, |l|) = (0, 0)$ hay una sola pareja (k, l) . Si $(|k|, |l|)$ es una de las 6 parejas: $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 2)$ o $(0, 3)$; hay dos valores posibles de (k, l) . Para cada uno de los otros 6 valores de $(|k|, |l|)$ hay cuatro posibilidades para (k, l) . Por lo tanto, hay a lo más $1 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 6 = 37$ números en B .

Ahora veamos que con 3 sí se puede:

Primera forma. Sea $A = \{4, 13, 14\}$; entonces A' contiene a $\{1, 3, 3^2, 3^3\}$, y es conocido que A'' contiene a todos los números del 1 al $1 + 3 + 3^2 + 3^3 = 40$.

Segunda forma. Observemos primero que si $X = \{1, 2, \dots, n\}$, entonces X' contiene a todos los números del 1 al $1 + 2 + \dots + n$ (pues en X' están: $n + 1, \dots, n + (n - 1), n + (n - 1) + 1, \dots, n + (n - 1) + (n - 2), \dots, n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1$); por tanto, como queremos que A'' contenga del 1 al 40, entonces bastaría con que A' contuviera a todos los números del 1 al 9. Entonces, por lo mismo, bastaría que A contuviera a los números del 1 al 4; así que con 4 sí es posible. Sin embargo, es claro que hay muchas repeticiones al construir A' , así que busquemos ver si con 3 se puede, evitando repeticiones: En A ponemos al 1 y después no ponemos al 2 (pues su diferencia con 1 es 1, que ya está); ponemos al 3; no ponemos al 4 (pues $4 - 3 = 1$), ni tampoco al 5 (pues $5 - 3 = 2$), no ponemos al 6 (pues $6 - 3 = 3$); entonces intentamos con el 7. Ahora comprobamos (fácilmente) que con $A = \{1, 3, 7\}$, en A' obtenemos todos los números del 1 al 9, y ya terminamos.

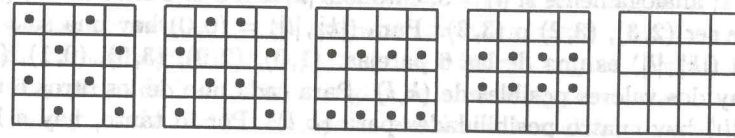
Solución al problema 76. El máximo es 5. El k -ésimo número construido es $5a^{k-1} + (a^{k-2} + a^{k-3} + \dots + 1)b$, como puede comprobarse fácilmente. Si a no es congruente con 1 módulo 5, entonces $a^3 + a^2 + a + 1 = \frac{a^4 - 1}{a - 1}$, es múltiplo de 5. (Nota: Esto se puede hacer sin usar congruencias analizando el último dígito de a). Entonces en este caso el quinto número es múltiplo de 5 y mayor que 5, así que no es primo. Si $a \equiv 1 \pmod{5}$, entonces $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$ es múltiplo de 5 así que el sexto número no es primo. Por otro lado, para $a = 1$ y $b = 6$ los primeros 5 números obtenidos son todos primos: 5, 11, 17, 23, 29.

Solución al problema 77. Es claro que para $n = 2$ es imposible. Veamos que es posible para toda $n > 2$. Tomemos primero el caso n impar. Eligiendo los rectángulos de $1 \times n$ cambiemos el color de todos los renglones en posición impar. De esta manera todas las columnas en posición impar quedan blancas y todas las columnas en posición par quedan negras; entonces con rectángulos de $n \times 1$ cambiamos las columnas en posición par para lograr que todos los cuadros sean blancos.

Para ver el caso cuando $n = 2^a b$, donde $a \geq 1$ y b impar distinto de 1, subdividamos el tablero en tableros de $b \times b$ y hagamos en cada tablero de $b \times b$ las operaciones que indicamos en el caso n impar.

Nos falta analizar las potencias de 2. Por un argumento similar al que describimos en el caso anterior, basta analizar el caso $n = 4$, el cual indicamos en los siguientes dibujos, en los que, en cada paso, se ha escogido un rectángulo de

2×4 o de 4×2 para hacer la operación:



Solución al problema 78. Notemos que $\angle BAH = \angle ABH = \angle BHF = \angle FHC = \angle HFD = \angle FDB =: \alpha$, pues ABH es isósceles, HF es paralela a AB y DE es paralela a AC . Entonces, el cuadrilátero $HDBF$ es cíclico y como $\angle HDB$ es recto (ABH es isósceles), tenemos que $\angle HFB$ es recto. Por lo tanto, $\angle DBF$ es recto (pues $DB \parallel HF$). Como $\angle HBE$ también es recto, $\angle FBE = \angle DBH = \alpha$.

Primera forma. Sea G la intersección de BF y AC . Los triángulos ABC y BGC son semejantes (tienen dos ángulos iguales). Notemos que como DE es la recta de los puntos medios, F es el punto medio de BG , de modo que CF es mediana de BGC . Los ángulos BCF y ACD son ángulos correspondientes (entre un lado y una mediana) en triángulos semejantes y por lo tanto son iguales.

Segunda forma. Sean I y J las intersecciones de HF con CD y BC respectivamente. De lo anterior, $\angle FBC = \angle IHC$. Para ver que son semejantes los triángulos FBC y IHC (lo cual nos da directamente el resultado) sólo falta probar que $\frac{FB}{IH} = \frac{BC}{HC}$. Es claro que I es el punto medio de HJ pues $HJ \parallel AB$ y D es el punto medio de AB . Como HBJ es un triángulo rectángulo, lo anterior quiere decir que I es su circuncentro y por lo tanto, $IH = IB$. También, $IBF \sim HCB$ pues ambos son triángulos rectángulos y $\angle BHC = 2\alpha = \angle BIF$. Por lo tanto, $\frac{FB}{IH} = \frac{FB}{IB} = \frac{BC}{HC}$, que es lo que faltaba probar.

Bibliografía

- [1] Comité Organizador de la Olimpiada Matemática Mexicana, *Olimpiada de Matemáticas, 140 problemas*. Academia de la Investigación Científica, México 1993.
- [2] E. Gentile, *Aritmética Elemental*, Monografía No. 25 de la Serie de Matemáticas del Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico de la OEA. Ediciones de la OEA, 1988.
- [3] R. Grimaldi, *Matemáticas Discreta y Combinatoria*. Addison-Wesley Iberoamericana, México 1989.
- [4] V. Gusiev, V. Litvinenko, A. Mordkovich, *Prácticas para Resolver Problemas de Matemáticas, (Geometría)*. Editorial Mir, Moscú 1969.
- [5] V. Litvinenko, A. Mordkovich, *Prácticas para Resolver Problemas de Matemáticas, (Álgebra y Trigonometría)*. Editorial Mir, Moscú 1989.
- [6] I. Niven, H. Zuckerman, *Introducción a la Teoría de los Números*. Limusa-Wiley, México 1972.
- [7] H. Shariguin, *Problemas de Geometría*, Colección Ciencia Popular. Editorial Mir, Moscú 1989.
- [8] N. Vilenkin, *¿De Cuántas Formas? (Combinatoria)*. Editorial Mir, Moscú 1972.

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

María Luisa Pérez Seguí
(Presidente)

Edgar Acosta Villaseñor

Julio César Aguilar Cabrera

María de la Paz Álvarez Scherer

Omar Antolín Camarena

Ignacio Barradas Bribiesca

Luis Briseño Aguirre

Luis Miguel García Velázquez

José Antonio Gómez Ortega

Alejandro Illanes Mejía

Ma. del Pilar Morfín Heras

Julieta Verdugo Díaz