PROBLEMAS para la 1a. OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMATICAS

Carlos Bosch
Alejandro Illanes
Ana Irene Ramírez

SOCIEDAD
MATEMATICA
MEXICANA

1987

COMITE ORGANIZADOR:

Carlos Bosch
Mónica Clapp
Isabel Puga

PATROCINADORES:

Secretaría de Educación Pública
Universidad Nacional Autónoma de México
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología
Instituto Politécnico Nacional

Este folleto fue financiado por la Subsecretaría de Educación Superior e Investigación Científica de la Secretaría de Educación Pública.

"Creo firmemente que los problemas son el corazón de las Matemáticas"

P. R. Halmos.

PRESENTACION

Este folleto pretende orientar a los concursantes sobre el tipo de problemas que se plantearán en el Concurso Nacional.

Está dividido en dos partes: enunciados y soluciones de algunos de los problemas. Los últimos seis ejercicios corresponden a los problemas que se plantearon en la XXVIII Olimpiada Internacional de Matemáticas celebrada en Cuba en julio de 1987. Para contestar a esos problemas los concursantes dispusieron de dos sesiones de cuatro y media horas cada una. Los problemas incluidos en este folleto seguramente requerirán un buen esfuerzo de tu parte.

Antes de consultar la solución de un problema, trata de resolverlo solo. Si no puedes, consúltalo con tus profesores y comenta la solución con ellos.

Hemos incluido una pequeña bibliografía sobre problemas y temas matemáticos que esperamos puedas conseguir en tu localidad.

Ojalá que el folleto te sea útil y que tu participación en la Olimpiada sea exitosa.

Carlos Bosch
Alejandro Illanes
Ana Irene Ramírez

PROBLEMA 1.

Sobre un eje, sea O el origen y A y B puntos tales que $OA = 5$ y $OB = -5$. Considere el punto M de abscisa $OM = x$.

(1) Calcule AM y BM, en función de x, y luego $\frac{AM}{BM}$

(2) Considere un segundo punto M' tal que $OM = \frac{25}{x}$. Calcule $\frac{AM'}{BM'}$. ¿Qué se observa?

(3) Calcule en función de x la abscisa x' del punto M" para el cual $\frac{AM''}{BM''} = \left(\frac{AM}{BM}\right)^2$.

(4) ¿Cómo está colocado el punto M" respecto a los puntos M y M' ?

PROBLEMA 2.

(1) Pruebe que un polígono convexo de n lados tiene $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales.

(2) Pruebe que si $n > 4$ se tiene $(n-2)^2 < n(n-3) < (n-1)^2$.

(3) ¿Cuál es el polígono que tiene 119 diagonales?

PROBLEMA 3.

Demuestre que un ángulo inscrito en una circunferencia mide la mitad del central que abarca el mismo ángulo. Como consecuencia deduzca que en un cuadrilátero cíclico los ángulos opuestos son suplementarios.

PROBLEMA 4.

Pruebe que en un triángulo los puntos simétricos del ortocentro respecto a los lados están en el círculo circunscrito.

PROBLEMA 5.

Sea ABC un triángulo donde A recorre un círculo Γ que pasa por A y B.

¿Cuál es el lugar geométrico de los centros de los círculos tangentes a los tres lados del triángulo?

PROBLEMA 6.

Una persona desea repartir su fortuna entre 3 herederos, de manera proporcional a los números 7, 6 y 5, es decir: la séptima parte de lo que herede el primero deberá ser igual a la sexta parte de lo que herede el segundo y a la quinta parte de lo que herede el tercero. Pero cambia luego de parecer y decide hacer el reparto de manera proporcional a los números 6, 5 y 4 (respectivamente).

¿Cuál de los herederos gana con el nuevo reparto?

¿Cuál pierde?

Sabiendo que a uno de los herederos le corresponden \$1,200,000.00 más en el segundo reparto,

¿cuál es el monto de la fortuna?

¿cuáles son las cantidades asignadas a cada heredero en el reparto final?

PROBLEMA 7.

En un semicírculo de diámetro $AB = 8$ cm, consideremos una cuerda variable $AM = x$.

Calcule la longitud "y" de su proyección en AB en función de x.

Represente gráficamente las variaciones de "y" cuando M describe el semicírculo.

Determine gráficamente las longitudes "y" y x cuando la longitud de la cuerda es igual al doble de su proyección.

PROBLEMA 8.

Sea M un punto en un semicírculo cuyo diámetro AB tiene longitud $2R$. Sean H y K las proyecciones de M sobre AB y sobre la tangente en B al semicírculo, respectivamente.

a) Determine M tal que $MA + MK = \ell$, una longitud prefijada.

b) Encuentre el valor máximo de ℓ y localice el punto M correspondiente.

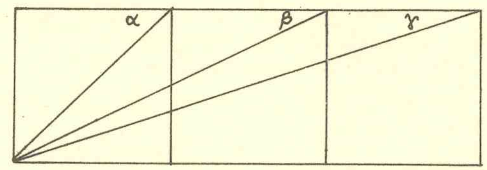
PROBLEMA 9.

Demuestre que $(n!)^2 \geqslant n^n$ para todo n.

PROBLEMA 10.

Considere la figura siguiente, formada por 3 cuadrados iguales adyacentes. Haga una construcción que exhiba

$\measuredangle\alpha = \measuredangle\beta + \measuredangle\gamma$ (no use trigonometría).



PROBLEMA 11.

Sea C un círculo y A y B dos puntos que no están situados en C ; determine una recta D tal que las proyecciones ortogonales de A y B sobre D pertenecen al círculo.

PROBLEMA 12.

Probar que en todo tetraedro hay un vértice tal que con las tres aristas que concurren en él se puede armar un triángulo.

(Se permiten triángulos así A .______C______. B).

PROBLEMA 13.

Mostrar que existen cuadriláteros tales que no se pueden armar triángulos con tres de sus lados.

PROBLEMA 14

Sea f una función de los reales a los reales tal que, para alguna $a > 0$, se cumple la ecuación

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x)-(f(x))^2} \quad \text{para toda } x.$$

(a) Probar que f es periódica (es decir, existe $b > 0$ tal que $f(x) = f(x+b)$ para toda x).

(b) Para $a = 1$ dar una función no constante que satisfaga la igualdad de arriba para toda x.

PROBLEMA 15

Mostrar que no existe ninguna función f de los reales en los reales tal que

$$f(x+2) = 2 + \sqrt{f(x)-(f(x))^2} \quad \text{para toda } x.$$

PROBLEMA 16.

Probar que si tomamos un conjunto arbitrario de diez números diferentes de dos cifras cada uno, entonces podemos extraer dos subconjuntos ajenos de él tales que la suma de los elementos de uno de los subconjuntos es igual a la del otro.

PROBLEMA 17.

En un papel cuadriculado de 7 por 10 cuadrados, tómense 25 triángulos arbitrarios y diferentes que tengan sus vértices en los puntos de intersección de las líneas de la cuadrícula. Mostrar que existen dos triángulos que tienen un vértice en común.

PROBLEMA 18.

Determinar cuál es el número más grande que es producto de enteros positivos cuya suma es igual a 1976.

PROBLEMA 19.

Determinar el número más grande que es suma de enteros positivos cuyo producto es $100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100$. (Se vale productos con un solo factor).

PROBLEMA 20.

¿Cuál es el número máximo de cubos de volumen 2 que caben en una caja de $5 \times 100 \times 87$?

PROBLEMA 21.

Considérese una descomposición de un tablero de ajedrez en p rectángulos que no se traslapan y que cumplan las siguientes condiciones:

(a) Todo rectángulo tiene igual número de cuadrados blancos que de negros.

(b) Si a_i es el número de cuadrados blancos en el rectángulo i-ésimo, entonces $a_1 < a_2 < \ldots < a_p$.

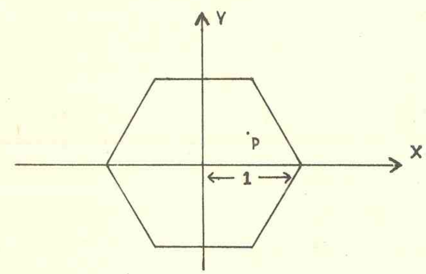
¿Cuál es la máxima p para la cual es posible esto?

PROBLEMA 22.

(a) Determinar para qué enteros positivos n, $2^n - 1$ es divisible por 7.

(b) Mostrar que $2^n + 1$ nunca es divisible por 7.

PROBLEMA 23. Sea E el exágono regular ilustrado. Dé una caracterización de sus puntos interiores por medio de un sistema de desigualdades.



PROBLEMA 24.

Sea C una circunferencia y $A \in C$.
Encuentre el lugar geométrico de puntos medios de los segmentos con un extremo en A y el otro sobre C.

PROBLEMA 25. Dos vasos comunicantes son llenados parcialmente con agua. El tubo que los une tiene una capacidad de 1.34 ℓ. El primero tiene forma de cilindro con 18 cm. de altura; el otro tiene forma de paralelepípedo rectángulo con base rectangular de 4 cm. por 20 mm.

1º Calcule el radio del cilindro sabiendo que su capacidad es 141.30 cℓ.

2º Sabiendo que las dos bases de los vasos están en el mismo plano horizon-

PROBLEMA 28.

Se divide el perímetro ABCD de un terreno rectangular de 120 m. por 90 m. en segmentos iguales medidos por un número entero de metros.
Por cada punto de la división obtenida en AB se trazan las rectas paralelas a AD e inversamente de tal manera que se obtiene una cuadrícula. Queremos plantar árboles en cada vértice de esa cuadrícula, incluyendo los situados en la frontera del terreno.

1° El problema admite varias soluciones. Para las soluciones correspondientes a los cuatro intervalos más grandes, indique el número de árboles necesarios.
2° ¿Cuál sería el número de árboles necesarios sin contar los árboles sobre la frontera del terreno?.
3° Si se dispone de 90 árboles, ¿qué solución se tiene que adoptar para utilizar el mayor número posible?.

PROBLEMA 29.

Dos obreros trabajan en una misma "chamba". El primero sólo durante 8 días, los dos juntos durante 12 días y el segundo termina la "chamba" trabajando 3 días más. Si el primer obrero hubiese tardado 32 días para completar el trabajo él sólo entonces:

1° ¿Qué fracción de la "chamba" total fue hecha por cada obrero?
2° ¿Cuánto tiempo le hubiese hecho falta al segundo obrero para hacer solo la "chamba"?
3° ¿Cuál debe ser el salario del segundo obrero calculado según el trabajo efectuado si el primer obrero gana 5,500 pesos al día?.
4° ¿Cuál fue el costo total de la "chamba"?

PROBLEMA 30.

Dos personas están caminando en una pista circular de 650 m. de longitud. Caminan en el mismo sentido y el más rápido rebasa al otro cada 13 min. Si caminan en sentido contrario ellos se cruzan cada 5 min.
1.- Suponiendo que los movimientos sean uniformes y, que las velocidades sean

tal y que el volumen total del líquido es de 2724 cm^3 calcule la altura del líquido en cada vaso. (Tome $\pi = 3.14$).

3º Se coloca un pistón en el vaso rectangular justo al nivel del líquido y se empuja 11 cm. Dar la modificación de la altura del agua en el vaso cilíndrico.

PROBLEMA 26. Cierto trabajo se puede hacer en 34 días contratando a 15 obreros durante 8 horas al día. Después de 10 días, 5 obreros se van y los otros aumentan el trabajo haciéndolo 9 horas al día. ¿Después de cuánto tiempo el trabajo estará terminado?

¿Cuánto recibirá cada uno de los 5 primeros obreros y de los otros 10, sabiendo que en total se cobró $4,080,000.00 ?

PROBLEMA 27.

Consideremos la ecuación

$$my + (m - 1)\, x = m - 2 \qquad (1)$$

Para cada valor de m esta ecuación representa una recta D.

1.- Determine m para que esta recta pase por el punto $A = (1,1)$. ¿Cuál es la ecuación de la recta correspondiente?.
Grafique esa recta.

2.- Pruebe que todas las rectas determinadas por la ecuación (1) pasan por el punto $B = (2, -1)$

3.- Determine m para que D sea paralela al eje $x'x$.
Determine m para D sea paralela al eje $y'y$
Determine m para que D sea la recta OB donde O es el origen.

4.- Determine m para que D pase por el punto de coordenadas $(a;b)$. Discuta y deduzca que nuevamente todas las rectas D pasan por el punto B para cualquier m.

las mismas en ambos sentidos, calcule las velocidades en kilómetros por hora.

2.- Si las dos personas salen juntas en el mismo sentido; calcule las distancias recorridas y y y' por cada persona al cabo de x min. Represente en la misma gráfica las funciones y y y'. ¿Cómo verificar usando estas gráficas que la primera persona rebasa a la segunda después de 13 min. ?

3.- Considere la pregunta análoga a la anterior, cuando las dos personas van en sentido contrario.

PROBLEMA 31.

Sea AB un segmento de recta de 10 cm. y M un punto variable en AB. Denotemos $AM = x$. Construimos del mismo lado de AB los cuadrados $ACDM$ y $MEFB$ cuyos lados son AM y BM. Denotemos por "y" la longitud de la recta poligonal $ACDEFBA$.

1.- Calcule "y" en función de x . Considere dos casos de figuras dependiendo de que M esté a la derecha o a la izquierda del punto medio O de AB.

2.- Estudie las variaciones de "y" cuando M se desplaza de A a B. Represente gráficamente estas variaciones.

3.- (a) Determine x tal que y sea el doble del perímetro del cuadrado $ACDM$. (Soluciones algebraicas y geométricas).

(b) Determine x tal que la razón de "y" y el perímetro del cuadrado $ACDM$ sea igual a k. ¿Cuáles son los posibles valores de k ?. Discuta esto gráficamente.

PROBLEMA 32.

Sea $P_n(k)$ el número de permutaciones del conjunto $\{1; 2 ;...; n\}$ $(n \geqslant 1)$ que tienen exactamente k puntos fijos. Demuestre que

$$\sum_{k=0}^{k=n} k\, P_n(k) = n!$$

Observación: Una permutación de un conjunto S es una aplicación biyectiva de

S sobre sí mismo. Un elemento i de S se llama un punto fijo de una permutación f si $f(i) = i$.

PROBLEMA 33

Sea ABC un triángulo acutángulo. La bisectriz del ángulo A corta al segmento BC en el punto L y a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC en el punto N $(N \neq A)$. Sean K y M los pies de las perpendiculares trazadas desde L a los lados AB y AC respectivamente. Demuestre que el cuadrilátero $AKNM$ y el triángulo ABC tienen igual área.

PROBLEMA 34.

Sean x_1 ; x_2 ;...; x_n números reales tales que $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Demuestre que para todo número natural k, $k \geqslant 2$, existen n enteros a_1 ; a_2 ;...; a_n no todos nulos tales que $|a_i| \leqslant k - 1$ y que

$$|a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n| \leqslant \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}$$

PROBLEMA 35.

Pruebe que no existe una función (aplicación) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tal que, $f(f(n)) = n + 1987$, para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $\mathbb{N} = \{0; 1; 2 ;\ldots; n ;\ldots\}$.

PROBLEMA 36.

Sea n un número natural $(n \geqslant 3)$. Demuestre que existen n puntos en el plano tales que la distancia entre dos cualesquiera de ellos es irracional mientras que el área determinada por cualesquiera tres de ellos es racional y no nula.

PROBLEMA 37.

Sea n un número natural mayor o igual que 2. Demuestre que si $k^2 + k + n$ es primo para todo entero k, con $0 \leqslant k \leqslant \sqrt{\frac{n}{3}}$, entonces $k^2 + k + n$ es primo para todo entero k, con $0 \leqslant k \leqslant n - 2$.

SOLUCION 1.

(1)

$$AM = AO + OM = -5 + x$$

$$BM = BO + OM = 5 + x$$

$$\frac{AM}{BM} = \frac{-5 + x}{5 + x} = -\frac{5 - x}{5 + x}$$

(2)

$$AM' = AO + OM' = -5 + \frac{25}{x} = \frac{-5x + 25}{x}$$

$$BM' = BO + OM' = 5 + \frac{25}{x} = \frac{5x + 25}{x}$$

$$\frac{AM'}{BM'} = \frac{\frac{-5x + 25}{x}}{\frac{5x + 25}{x}} = \frac{-5x + 25}{5x + 25} = \frac{-x + 5}{x + 5} = \frac{5 - x}{5 + x}$$

$\frac{AM'}{BM'} = -\frac{AM}{BM}$ M y M' son conjugados armónicos respecto a A y B.

(3)

$$AM'' = AO + OM'' = -5 + x''$$

$$BM'' = BO + OM'' = 5 + x''$$

$$\frac{AM''}{BM''} = \left(\frac{AM}{BM}\right)^2$$

$$\frac{x'' - 5}{5 + x''} = \frac{(5 - x)^2}{(5 + x)^2}$$

$$(x'' - 5)(5 + x)^2 = (5 + x'')(5 - x)^2$$

$$x''(5 + x)^2 - 5(5 + x)^2 = 5(5-x)^2 + x''(5 - x)^2$$

$$x''[(5 + x)^2 - (5 - x)^2] = 5[(5 + x)^2 + (5 - x)^2]$$

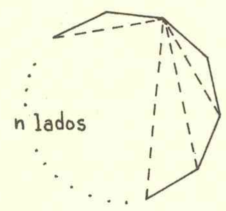
$$x'' = \frac{10x^2 + 250}{20x} = \frac{x^2 + 25}{x}$$

(4) Es el punto medio pues:

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{25}{x}\right) = \frac{x^2 + 25x}{2x} = x''$$

SOLUCION 2.

(1)



Un polígono de n lados tiene n vértices. Observemos que en uno de ellos tenemos, por cada vértice que no sea adyacente, una diagonal; es decir, tenemos n-3 diagonales y esto es para cada punto, así que el número total de diagonales es n(n-3) pero cada diagonal la estamos contando con respecto al punto inicial y al final, es decir 2 veces, así que el número de diagonales es

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

(2) Se tiene:

$$\begin{aligned} 4 &\leqslant n \\ -n+4 &\leqslant 0 \\ -4n+4 &\leqslant -3n \\ n^2-4n+4 &\leqslant n^2-3n \\ (n-2)^2 &\leqslant n(n-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 &\leqslant n \\ -1 &\leqslant n \\ -n &\leqslant 1 \\ -3n &\leqslant -2n+1 \\ n^2-3n &\leqslant n^2-2n+1 \\ n(n-3) &\leqslant (n-1)^2 \end{aligned}$$

(3) $\frac{n(n-3)}{2} = 119.$

$n^2 - 3n - 238 = 0$

$(n-17)(n+14) = 0$

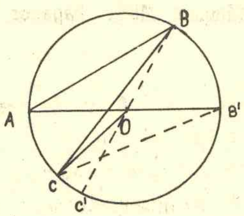
de modo que

$n = 17$ ó $n = -14$ imposible

así que

$n = 17.$

SOLUCION 3.



Sean $\measuredangle ABC$ y $\measuredangle AOC$ los ángulos inscritos y central que subtienden el arco AC. Tomemos primero el caso en que B' es diametralmente opuesto a A; entonces $\triangle CBO$ es isósceles y por tanto

$$2 \measuredangle CBA + \measuredangle B'OC = 180°$$

y como $\measuredangle B'OC + \measuredangle COA = 180°$, resulta

$$\measuredangle CBA = \frac{1}{2} \measuredangle COA$$

Para el caso general basta aplicar lo anterior a los ángulos

$\measuredangle ABC'$ (inscrito) y $\measuredangle AOC'$ (central)

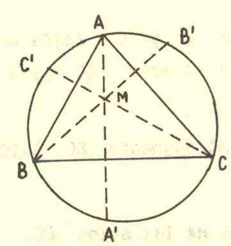
$\measuredangle CBC'$ (inscrito) y $\measuredangle COC'$ (central)

y se obtiene

$$\measuredangle ABC = \measuredangle ABC' - \measuredangle CBC' = \frac{1}{2} \measuredangle AOC' - \frac{1}{2} \measuredangle C'OC = \frac{1}{2} \measuredangle AOC.$$

SOLUCION 4.

Sea M el ortocentro de un triángulo ABC inscrito en el círculo Γ y con centro O.



Sea A' el punto de intersección entre la altura AM y el círculo Γ. Entonces se tiene:

$$\measuredangle (AC, AA') = \measuredangle (BC, BA') \quad (*)$$

Pero $\measuredangle (AC, AA') = \measuredangle (BM, BC)$ tienen sus lados correspondientes perpendiculares. Así que de (*)

$$\measuredangle (BC, BA') = \measuredangle (BC, BM)$$

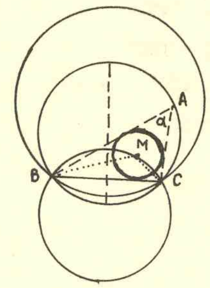
Resulta entonces que las rectas BA' y BM son simétricas respecto a BC.

(*) $\measuredangle (AC, AA')$ el ángulo formado por AC y AA' tomado en el sentido positivo.

SOLUCION 5.

Sea M un punto cualquiera. Para que M tenga la propiedad de ser el centro de un círculo tangente a los tres lados del triángulo ABC, hagamos la siguiente construcción:

Tracemos γ el círculo con centro en M y tangente a BC, por B y C tracemos las tangentes a ese círculo.



Para que M tenga la propiedad hace falta que el punto A de intersección de esas tangentes esté en el círculo Γ, es decir, que

$$\measuredangle(AB,AC) = \alpha \text{ ó } \pi-\alpha$$

donde α es el ángulo bajo el cual se ve el segmento BC desde cualquier punto del arco BAC. Así que

$$\pi - \measuredangle(AB,AC) = \measuredangle(BC,AC) + \measuredangle(BC,AB)$$

pero

$$\begin{aligned} \measuredangle(BC,AC) &= 2\measuredangle(BC,CM) \\ \measuredangle(BC,AB) &= 2\measuredangle(BC,BM) \\ \pi - \measuredangle(AB,AC) &= 2\measuredangle(BC,CM) + 2\measuredangle(BC,BM) \\ &= 2(\pi - \measuredangle(MB,MC)) \end{aligned}$$

Así

$$\measuredangle(MC,MB) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}$$

El conjunto de puntos M consta de dos círculos U y U' tales que U es el conjunto de puntos desde donde se ve al segmento BC bajo un ángulo $\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}$,

U' es el conjunto de puntos desde donde se ve al segmento BC bajo un ángulo $\pi - \frac{\alpha}{2}$

Observación. Los centros resultan ser los puntos medios de los arcos BC.

SOLUCION 6.

Sean x,y y z las cantidades del primer testamento y x',y' y z' las cantidades del segundo testamento. Denotemos por S la herencia.

Se tiene $\begin{cases} \frac{x}{7} = \frac{y}{6} = \frac{z}{5} \\ x + y + z = S \end{cases}$ y $\begin{cases} \frac{x'}{6} = \frac{y'}{5} = \frac{z'}{4} \\ x' + y' + z' = S \end{cases}$

Entonces:

$$\frac{x}{7} = \frac{y}{6} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{7+6+5} = \frac{S}{18} \therefore x = \frac{75}{18} \quad y = \frac{65}{18} \quad z = \frac{55}{18}$$

$$\frac{x'}{6} = \frac{y'}{5} = \frac{z'}{4} = \frac{x'+y'+z'}{6+5+4} = \frac{S}{15} \therefore x' = \frac{65}{15} \quad y' = \frac{55}{15} \quad z' = \frac{45}{15}$$

Reduciendo al mismo denominador: 90

$$x = \frac{355}{90} \qquad y = \frac{305}{90} \qquad z = \frac{255}{90}$$

$$x' = \frac{365}{90} \qquad y' = \frac{305}{90} \qquad z' = \frac{245}{90}$$

El primer heredero tendrá $\frac{1}{90}$ más que es lo que pierde el tercer heredero.

Valor de la herencia: $1,200,000 x 90 = $108,000,000.

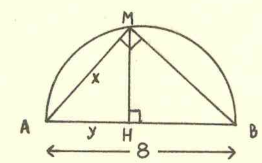
Partes en el segundo testamento:

$$x' = \frac{108,000,000 \times 6}{15} = \$43,200,000$$

$$y' = \frac{108,000,000 \times 5}{15} = \$36,000,000$$

$$z' = \frac{108,000,000 \times 4}{15} = \$28,800,000$$

SOLUCION 7.

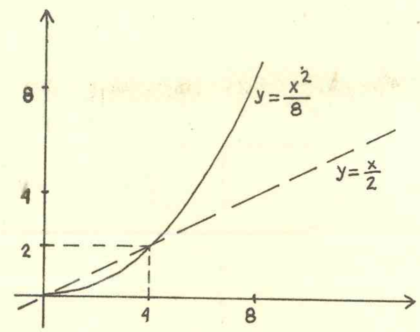


En el triángulo AMB, el ángulo M es recto. Entonces se tiene que $x^2 = 8y$ pues los triángulos AMB y AMH son semejantes

$$\frac{x}{8} = \frac{y}{x}$$

Así que

$$y = \frac{x^2}{8}$$



Si $x = 2y$

$$y = \frac{x}{2}$$

la intersección con la curva es

$$x = 4 \qquad y = 2.$$

SOLUCION 8.

Observación: Como $MA \geqslant AH$ se tiene $MA + MK \geqslant 2R$. El problema no es posible más que para $\ell \geqslant 2R$.

El máximo de $MA + MK$ es para $M = C$, i.e. M es la mediatríz de OA y entonces

$$MA + MK = \frac{5R}{2}$$

Sea $AM = x$. El triángulo AMB es rectángulo en M y por lo tanto

$$MK = HB = \frac{MB^2}{AB} = \frac{AB^2 - MA^2}{AB} = \frac{4R^2 - x^2}{2R}$$

Entonces la relación $MK + MA = \ell$ se escribe:

$$x + \frac{4R^2 - x^2}{2R} = \ell \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2Rx + 2R\ell - 4R^2 = 0 \qquad (*)$$

Toda raíz de esta ecuación permite construir M si: $0 \leqslant x \leqslant 2R$.

En la ecuación (*) se tiene $\Delta' = 5R^2 - 2R\ell = R(5R - 2\ell)$.

Además si $f(x) = x^2 - 2Rx + 2R\ell - 4R^2$ se tiene $f(0) = f(2R) = 2R(\ell - 2R)$

He aquí una tabla:

ℓ	$2R$	$\frac{5R}{2}$	$\frac{5R}{2} + k, \; k > 0$
Δ'	+	0	-
Raíces	Dos raíces	$x' = x'' = R$	Raíces complejas
Soluciones	$M = A$ ó $M = B$	Solución única de $M = C$	No hay solución

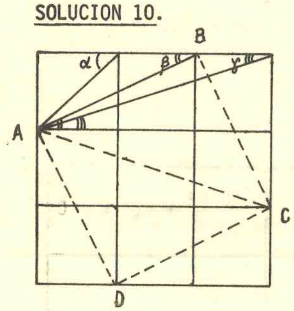
SOLUCION 9.

Si desarrollamos el lado izquierdo:

$$(n!)^2 = [n(n-1)\cdot\ldots\cdot 1]\;[n(n-1)\cdot\ldots\cdot 1]$$
$$= (n\cdot 1)((n-1)2)\;((n-2)3)\cdot\ldots\cdot(1\cdot n)$$

(hemos asociado el primer factor del primer corchete con el último del segundo, el segundo factor del primer corchete con el penúltimo del segundo, y así sucesivamente. Como los productos en cada paréntesis son mayores o iguales a n, y hay n de ellos, se tiene la desigualdad).

SOLUCION 10.



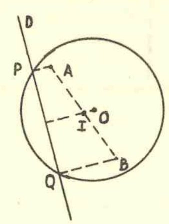
Los puntos A, B, C, D son vértices de un cuadrado con diagonal AC por lo que

$$\gamma + \beta = 45° = \alpha .$$

(Hay otras construcciones, aunque ésta da la solución de manera inmediata).

SOLUCION 11.

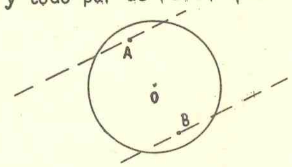
Supongamos que existe una recta D con esa propiedad y denotemos por P y Q a los dos puntos sobre D que son las proyecciones de A y B. Además,



por el momento, supongamos que P y Q son distintos. Entonces APQB resulta ser un trapecio rectángulo con bases AP y BQ. De modo que la paralela a las bases por el punto medio I de AB pasa por el punto medio de PQ y es perpendicular a PQ, es la mediatríz de PQ por lo tanto pasa por O. Así que PA, IO y QB son paralelas.

De este modo, dadas A y B, busquemos I el punto medio de AB tracemos OI y por A y B tracemos las paralelas a OI; si una de ellas tiene al menos un punto P en común con el círculo la otra intersectará al círculo en Q simétrico de P respecto a OI y la recta PQ es una solución a nuestro problema. Si la paralela a OI que pasa por A no intersecta al círculo, entonces no hay una recta que satisfaga las condiciones del problema.

Si A y B son simétricos respecto a O la recta OI queda indeterminada y todo par de rectas paralelas que pasen por A y B y que intersecten al círculo, determinan una recta solución.



Nos falta el caso en que P y Q sean el mismo punto.

Si la recta AB y el círculo C tienen al menos un punto en común P, la perpendicular a P en AB es una solución; si no, no hay recta D que sea solución y para la cual P y Q sean el mismo punto.

SOLUCION 12.

Primero hay que convencerse de que dadas tres longitudes L_1, L_2 y L_3, entonces se puede armar un triángulo cuyos lados tengan estas longitudes, si y sólo si, suponiendo que L_1 es la más grande de las tres, se tiene $L_1 \leqslant L_2 + L_3$. (¿Por qué es esto?).

Ahora supongamos que la arista más grande del tetraedro mide a. Sean A, B los vértices del tetraedro que son extremos de esta arista. Esta arista es común a dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ABD$ del tetraedro. Entonces $a = |AB| \geqslant |BC|$, $|AC|$ y $a = |AB| \geqslant |AD|, |BD|$. Según lo que dijimos arriba bastará mostrar que $|AB| \leqslant |AC| + |AD|$ (estas son las aristas que concurren en A y, en este caso, A sería el vértice del que habla el problema) o que $|BA| \leqslant |BC| + |BD|$ (y en este caso B sería el vértice elegido).

Por la desigualdad del triángulo aplicada a $\triangle ABC$ y $\triangle ABD$, $|AB| \leqslant |BC| + |AC|$ y $|AB| \leqslant |AD| + |BD|$. De manera que $|AB| + |AB| \leqslant |BC| + |AC| + |AD| + |BD| = (|AC| + |AD|) + (|BC| + |BD|)$. De esta desigualdad obtenemos que no es posible que $|AB| > |AC| + |AD|$ y $|AB| > |BC| + |BD|$. Por tanto $|AB| \leqslant |AC| + |AD|$ y $|AB| \leqslant |BC| + |BD|$.

SOLUCION 14.

(a) Nótese que $f(x+a) \geq \frac{1}{2}$ para toda x. Esto implica que $f(x) = f(x-a+a) \geq$ $\geq \frac{1}{2}$ para toda x.

Calculamos: $f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x)-(f(x))^2}$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{f(x-a+a)-(f(x-a+a))^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x-a)-(f(x-a))^2} - (\frac{1}{2} + \sqrt{f(x-a)-(f(x-a))^2})^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x-a)+(f(x-a))^2} = \frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{2} - f(x-a))^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \left|\frac{1}{2} - f(x-a)\right| = \frac{1}{2} + f(x-a) - \frac{1}{2} = f(x-a).$$

Por tanto $f(x+a) = f(x-a)$ para toda x. Esto implica que $f(x+2a) = f(x)$ para toda x. Por tanto f es periódica (con $b = 2a$).

(b) Para $a = 1$, podemos definir $f(x) = \frac{1}{2}$ para toda x en alguno de los intervalos de la forma $[k, k + \frac{1}{2})$ y $f(x) = 1$ para toda x en alguno de los intervalos de la forma $[k + \frac{1}{2}, k+1)$ donde k es un entero.

SOLUCION 16.

Llamemos $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{10}\}$ al conjunto de diez números. Recordemos que el número de subconjuntos que tiene un conjunto de n elementos es 2^n. De manera que A tiene $2^{10} - 1 = 1023$ subconjuntos no vacíos. Para cada subconjunto B de A, denotemos por ΣB a la suma de los elementos de B. Para cada B, $\Sigma B < 1000$ porque B tiene a lo más 10 elementos y cada uno de ellos es menor que 100. Entonces se pueden formar 1023 números de la forma ΣB, pero todos ellos están en $10, 11, \dots, 1000$. Esto sólo es posible si algunos de ellos se repiten, de manera que existen $B, C \subset A$ tales que $\Sigma B = \Sigma C$; B, C son no vacíos y $B \neq C$. No es posible que $B \subset C$ porque como son diferentes, entonces existiría un $x \in C$ tal que $x \notin B$ y entonces en $\Sigma B = \Sigma C$ podemos cancelar todos los elementos de B de ambos lados y entonces obtendríamos que $Q = \Sigma(C-B) \geq X \geq 11$. Este absurdo muestra que $B \not\subset C$ y, similarmente $C \not\subset B$. Cancelando en $\Sigma B = \Sigma C$ los elementos comunes, tenemos que $\Sigma(B-C) = \Sigma(C-B)$ y $B - C$, $C - B$ son ajenos y no vacíos. Esto termina la prueba de la existencia de los conjuntos.

SOLUCION 18.

Sólo hay un número finito de formas de escribir 1976 como suma de enteros positivos, de manera que estamos hablando de un número finito de productos y, en consecuencia, debe haber uno máximo.

Supongamos que N es el máximo que se puede obtener, entonces existen enteros positivos $a_1,\dots,a_n$ tales que $N = a_1\cdot\dots\cdot a_n$ y $a_1+\dots+a_n = 1976$. Vamos a argumentar porqué a_i no es ninguno de los números $5,6,7,\dots,1976$. Si por ejemplo, $a_1 = 5$, entonces N no sería máximo pues podemos sustituir a_1 por 2 y 3 y la suma sigue siendo 1976 pero el producto sería $2\cdot 3\cdot a_2\cdot\dots\cdot a_n = 6\cdot a_2\cdot\dots\cdot a_n > 5a_2\cdot\dots\cdot a_n = N$ y entonces obtendríamos un número más grande que el máximo. Si $a_1 = 6$, lo podemos sustituir por 3 y 3, si $a_1 = 7$, lo sustituimos por 3, 3 y 1, si $a_1 = 8$ lo sustituimos por 3, 3 y 2, si $a_1 = 9$, lo sustituimos por 3, 3 y 3. A cualquiera de los números entre 10 y 26, lo podemos sustituir por 3, 3, 3 y 1,...,1. A cualquiera entre 26,...,1976, lo podemos sustituir por 3,3,3,3,3,3,3 y unos ($3^7 = 2187$ y $7\cdot 3 = 21$). Por tanto, ningún a_i puede ser mayor que 4.

Cualquier 4 se puede sustituir por 2 y 2 y se obtiene el mismo producto, entonces podemos suponer también que no hay 4's entre los ai's. Entonces el número N es de la forma $N = 1^r 2^s 3^t$.

Si $s \geqslant 3$, entonces en N aparecen $2\cdot 2\cdot 2$ pero estos tres 2's pueden ser sustituidos por dos 3's y se obtiene un número más grande. Entonces $s \leqslant 2$.

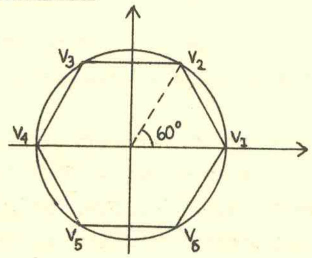
Si $r \geqslant 2$, entonces en N aparecen $1\cdot 1$ pero estos dos 1's pueden ser sustituidos por un 2 y se obtiene una N más grande. Entonces $r \leqslant 1$.

Como $s \leqslant 2$ y $r \leqslant 1$, y $r1 + s2 + t3 = 1976$, debe haber al menos un 3. Si $r = 1$, entonces habría un 1 y un 3 que pueden ser sustituidos por dos 2's obteniendo nuevamente un número más grande, por tanto, no puede haber 1's.

Entonces N es de la forma $N = 2\cdot 3^t$ o $N = 2^2\cdot 3^t$. Así que $1976 = 2 + t3$ o $1976 = 2 + 2 + t3$. Como al dividir 1976 por 3, el residuo es 2, sólo puede ser de la primera forma y además $t = 658$.

Por tanto $N = 2\cdot 3^{658}$.

<u>SOLUCION 23.</u> Si numeramos los vértices como en la figura, las coordenadas son:



V_1 = (cos 0°, sen 0°) = (1,0)

V_2 = (cos 60°, sen 60°) = (1/2, $\sqrt{3}/2$)

V_3 = (cos 120°, sen 120°) = (- 1/2, $\sqrt{3}/2$)

V_4 = (cos 180°, sen 180°) = (-1, 0)

V_5 = (cos 240°, sen 240°) = (- 1/2, - $\sqrt{3}/2$)

V_6 = (cos 300°, sen 300°) = (1/2, - $\sqrt{3}/2$)

y las pendientes de los lados son:

m_{12} = tan 120° = - $\sqrt{3}$

m_{33} = tan 180° = 0

m_{34} = tan 240° = $\sqrt{3}$

m_{45} = tan 300° = - $\sqrt{3}$

m_{56} = tan 360°= 0

m_{61} = tan 60° = $\sqrt{3}$

Por lo tanto, las ecuaciones de los lados son:

ℓ_{12}: $y = -\sqrt{3}\,(x-1)$

ℓ_{23}: $y - \sqrt{3}/2 = 0$

ℓ_{34}: $y - \sqrt{3}/2 = \sqrt{3}\,(x + 1/2)$

ℓ_{45}: $y = -\sqrt{3}\,(x+1)$

ℓ_{56}: $y + \sqrt{3}/2 = 0$

ℓ_{61}: $y + \sqrt{3}/2 = \sqrt{3}\,(x - 1/2)$

Si en lugar de la ecuación $y = mx + b$, consideramos las desigualdades $y < mx + b$ ó $y = mx + b$, tendremos semiplanos que contienen al interior del exágono (para ver cuál debe ser la elección, basta ver si (0,0) la satisface):

s_{12}: $y < -\sqrt{3}\,x + \sqrt{3}$

s_{23}: $y < \sqrt{3}/2$

s_{34}: $y < \sqrt{3}\,x + \sqrt{3}$

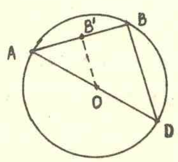
s_{45}: $y > -\sqrt{3}\,x - \sqrt{3}$

s_{56}: $y > -\sqrt{3}/2$

s_{61}: $y > \sqrt{3}\,x - \sqrt{3}$

Este es el sistema buscado porque la intersección de todos los semiplanos es la región limitada por el exágono original.

SOLUCION 24.



Denotemos por D el punto diametralmente opuesto a A.
Observemos que $\measuredangle ABD = 90°$.
Sea B' el punto medio de AB y observemos que el triángulo AB'O es semejante al triángulo ABD, así que $\measuredangle AB'O$ es recto y por lo tanto B' describirá la circunferencia de diámetro AO.

SOLUCION 25.

Capacidad del cilindro

$$141.3 \text{ cl} = 1.413 \text{ l.} = 1413 \text{ cm}^3$$

Superficie de base del cilindro:

$$\frac{1413}{18} = 78.5 \text{ cm}^2$$

$S = \pi R^2$ $\qquad R^2 = \frac{78.5}{3.14} = 25 \text{ cm}^2$ $\qquad R = \sqrt{25} = 5$ cm.

Superficie de la base del paralelepípedo rectángulo:

$$4 \times 2 = 8 \text{ cm}^2$$

Superficie total de las bases $78.5 + 8 = 86.5 \text{ cm}^2$

Volumen de agua contenido en los dos vasos:

$$2.724 \text{ l.} - 1.34 \text{ l.} = 1.384 \text{ l.} = 1384 \text{ cm}^3$$

Altura del agua en los dos vasos:

$$\frac{1384}{86.5} = 16 \text{ cm.}$$

Las variaciones de altura en los dos vasos son inversamente proporcionales a las secciones de los vasos:

Variación de altura en cm.	Secciones en cm^2
11	8
x	78.5

La altura del agua en el vaso cilíndrico será modificada de la siguiente forma:

$\frac{11}{x} = \frac{78.5}{8}$ $\qquad$ y así $\qquad x = \frac{11 \times 8}{78.5} = 1.1$ cm.

SOLUCION 26

Después de 10 días los obreros trabajando 8 h. por día hubiesen tardado 34 - 10 = 24 días para terminar el trabajo.

Días	Obreros	Horas
24	15	8
x	10	9

Así qué $\frac{24}{x} = \frac{10}{15} \times \frac{9}{8}$ $\frac{24}{x} = \frac{3}{4}$ de donde $x = 32$ días

4,080,000 es el salario total y representa

$34 \times 8 \times 15 = 4{,}080$ horas de obrero

así el salario por hora es:

$4{,}080{,}000 \div 4{,}080 = 1{,}000$ pesos

Salario total de cada uno de los cinco primeros obreros

$1{,}000 \times 8 \times 10 = 80{,}000$ pesos

Salario de cada uno de los otros 10

$1{,}000 \times 9 \times 32 + 80{,}000 = 296{,}000$ pesos

SOLUCION 32.

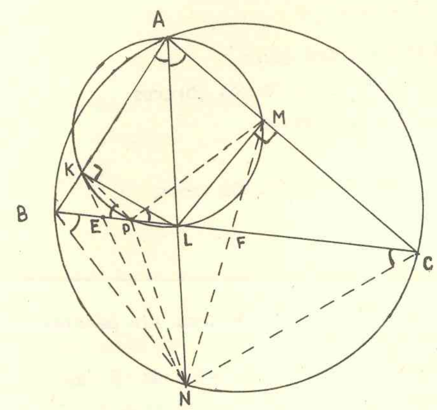
Usaremos el hecho que $\sum_{k=0}^{n} p_n(k) = n!$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $S = \{1,2,\ldots,n\}$. Asignemos a cada permutación de S un vector $(e_1,e_2,\ldots e_n)$, tal que $e_i = 1$ si i es un punto fijo de S, y $e_i = 0$ en caso contrario $(1 \leq i \leq n)$. Entonces existen $p_k(n)$ de tales vectores que tengan exactamente k componentes "1", y por tanto la cantidad total de "1" en todos los vectores de todas las $n!$ permutaciones es:

$$\sum_{k=0}^{n} k\, p_n(k)$$

Pero para cada $i(1 \leq i \leq n)$, existen $(n-1)!$ permutaciones de S que tienen el punto fijo i y para las cuales es $e_i = 1$. Por tanto hay exactamente $n(n-1)! = n!$ componentes "1" en los vectores.

SOLUCION 33.

Realizaremos construcciones auxiliares como se muestra en la figura. Sea P el segundo punto de intersección del segmento BC y la circunferencia circunscrita al cuadrilátero AKLM. Entonces $\measuredangle$ BCN = $\measuredangle$ BAN por ser ángulos inscritos en un mismo arco de la circunferencia. Por esta misma razon $\measuredangle$ MAL = $\measuredangle$ MPL. Como AL es bisectriz entonces $\measuredangle$ BCN = $\measuredangle$ BAL = $\measuredangle$ MAL. Por tanto $\measuredangle$ MPL = $\measuredangle$ BCN, y por consiguiente, PM ∥ NC. De forma análoga se demuestra que KP ∥ BN. Como los cuadriláteros BKPN y NPMC son trapecios entonces $S_{BKE} = S_{NPE}$ y $S_{PNF} = S_{CFM}$, de donde se deduece que $S_{ABC} = S_{AKNM}$.



SOLUCION 34.

Dado que $x_1^2 + x_2^2 +\ldots+ x_n^2 = 1$, entonces, usando la desigualdad de Cauchy:

$$|x_1| + |x_2| +\ldots+ |x_n| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 +\ldots+ x_n^2}\ \sqrt{n} = \sqrt{n}$$

Entonces todas las sumas de la forma $e_1x_1 + e_2x_2 +\ldots+ e_nx_n$ con $e_i \in \{0,1,2,\ldots,k-1\}$, deben estar en el intervalo cerrado I, de longitud $(k-1)\cdot\overline{n}$. Ese intervalo puede ser recubierto con $k^n - 1$ subintervalos cerrados de longitud $(k-1)\cdot\sqrt{n}/(k^n-1)$. Por el principio de Dirichlet podemos afirmar que existen al menos dos de estas sumas que están un mismo subintervalo, y por tanto su diferencia no deberá exceder la longitud del subintervalo. Luego $e_i \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm (k-1)\}$ para los cuales

$$|e_1x_1 + e_2x_2 + \ldots + e_nx_n| \leqslant \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}$$

SOLUCION 35

¡No existe!. En efecto, supongamos que exista una tal función, entonces:

$$f(n + 1987) = f(f(f(n))) = f(n) + 1987 \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}$$

De aquí se obtiene, aplicando inducción, que:

$$f(n + 1987\,t) = f(n) + 1987\,t \quad \text{para todos} \quad n,t, \in \mathbb{N}$$

Por otra parte, consideremos $r \in \mathbb{N}$, $r \leqslant 1986$, entonces:

$$f(r) = 1987\,k + \ell \qquad k,\ell \in \mathbb{N}, \quad \ell \leqslant 1986$$

Entonces tenemos:

$$f(f(r)) = r + 1987$$

$$f(f(r)) = f(\ell + 1987\,k) = f(\ell) + 1987\,k$$

Por consiguiente tenemos dos posibilidades:

(1) $k = 1 \Rightarrow f(r) = 1987 + \ell$ y $f(\ell) = r \Rightarrow r \neq \ell$

(2) $k = 0 \Rightarrow f(r) = \ell$ y $f(\ell) = r + 1987 \Rightarrow r \neq \ell$

De esta manera el conjunto $\{0,1,2,\ldots, 1986\}$ esta dividido en pares (a,b) tales que:

$f(a) = b$ y $f(b) = a + 1987$ o $f(b) = a$ y $f(a) = b + 1987$

Pero el conjunto $\{0,1,2,\ldots,1986\}$ tiene un número impar de elementos, por lo que no puede ser dividido en tales pares. De esto resulta una contradicción, por tanto no existe la función buscada.

SOLUCION 36

Los puntos $P_i=(i,i^2)$, $i = 1,2,\dots,1987$, cumplen las condiciones:

1) $$\overline{P_iP_j} = \sqrt{(i-j)^2 + (i^2-j^2)^2} =$$
$$= \sqrt{(i-j)^2 + (i-j)^2(i+j)^2} =$$
$$= |i-j|\sqrt{1+(i+j)^2}$$

Supongamos que $\overline{P_iP_j}$ es racional, entonces existen $p,q \in \mathbb{N}$ $q \neq 0$, $(p,q) = 1$ tales que

$$\sqrt{1+(i+j)^2} = \frac{p}{q}, \text{ o sea, } 1+(i+j)^2 = \frac{p^2}{q^2} \qquad (*)$$

De esto resulta $p^2/q^2 \in \mathbb{N}$, es decir, $q^2 | p^2$ y $q|p$. Como $(p,q) = 1$ y $q|p$ entonces $q = 1$ y en virtud de (*), $1 + (i+j)^2$ sería un cuadrado perfecto. Por otro lado

$$(i+j)^2 < 1 + (i+j)^2 < 1 + (i+j)^2 + 2(i+j) =$$
$$= (i+j+1)^2$$

es decir $1 + (i+j)^2$ no es un cuadrado perfecto. ¡Contradicción!

2) Para el área de la superficie A del triángulo $P_iP_jP_k$, $i<j<k$, se cumple:

$$A = \frac{i^2+k^2}{2}(k-i) - \frac{i^2+j^2}{2}(j-i) - \frac{j^2+k^2}{2}(k-j)$$

o sea, A es racional.

SOLUCION 37

Sea y el menor número entero no negativo que satisface la desigualdad $y \leqslant$ $\leqslant p-2$ y para el cual $f(y)$ es un número compuesto. Denotemos por q al menor divisor simple del número $f(y)$.
Demostremos que $q > 2y$. Supongamos lo contrario, es decir, $q \leqslant 2y$ y analicemos la diferencia

$$f(y) - f(x) = (y + x + 1)$$

Si x varía de 0 hasta $y-1$ entonces la expresión $y - x$ toma todos los valores $1,2,\ldots,y$; mientras que la expresión $y + x + 1$ toma los valores $y + 1$, $y + 2, \ldots, 2y$. Por tanto existe x ; $0 \leqslant x \leqslant y - 1$ tal que $q \mid (f(y) - f(x))$. Como $q \mid f(y)$ y el número $f(x)$ es primo, entonces de aquí se deduce que $q \mid f(x)$ y más aún $f(x) = q$. Observemos que

$$y - x \leqslant p - 2 < p + x + x^2 = f(x)$$

$$y + x + 1 \leqslant p + x - 1 < p + x + x^2 = f(x),$$

y por eso la relación $f(x) \mid (y - x)(y + x + 1)$ es imposible. La contradicción obtenida demuestra que $q \geqslant 2y + 1$.
El número q es el menor divisor simple del número $f(y)$ y por eso $q \leqslant \sqrt{f(y)}$. Por consiguiente, $f(y) \geqslant q^2$. Por lo anteriormente demostrado tenemos que

$$y^2 + y + p \geqslant (2y + 1)^2 = 4y^2 + 4y + 1$$

De aquí se concluye fácilmente que $y < \sqrt{p/3}$, es decir que entre los números $f(0), f(1),\ldots, f([\sqrt{p/3}])$ se tiene un número compuesto, lo que contradice las condiciones del problema. De esta manera entre los números $f(0),f(1),\ldots,$ $f(p-2)$ no hay compuestos, que es lo que se pedía demostrar.

B I B L I O G R A F I A :

1. Kasner & Neuman "Matemáticas e Imaginación". Ed. CECSA. México, 1973.

2. Lara, M. "Antología de Matemáticas I y II". Lecturas Universitarias 7 y 8, Ed. UNAM. México, 1985.

3. Lidski, V. et al. "Problemas de Matemáticas Elementales". Ed. MIR, Moscú, 1978.

4. Vasiliev & Gutenmájer "Rectas y Curvas". Ed. MIR, Moscú.

5 Vilenkin, N. "¿De cuántas formas?". Ed. MIR. Moscú.

6. Shively, L. "Introducción a la Geometría Moderna". Ed. Cecsa, México. 1984

Problemas para la 1a. olimpiada mexicana de matemáticas, editado por la Sociedad Matemática Mexicana, se terminó de imprimir en Olmeca Impresiones Finas, S.A. de C.V., el día 7 de agosto de 1987. Su tiraje consta de 6000 ejemplares.