PROBLEMAS para la 2a. OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMATICAS

Javier Alfaro
Carlos Bosch
Alejandro Bravo
Alejandro Illanes
Javier Páez
Ana Irene Ramírez

SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

1988

COMITE ORGANIZADOR

Javier Alfaro
Carlos Bosch
Alejandro Bravo
Margarita Chávez
Claudia Gómez
Alejandro Illanes
Ana Meda
Javier Páez
Ana Irene Ramírez
Eduardo Rivera
Raúl Rueda
Renata Villalba
Elisa Viso

PATROCINADORES:

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO
SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA
GOBIERNO DEL ESTADO DE SONORA
UNIVERSIDAD DE SONORA
CONSEJO NACIONAL
DE CIENCIA Y TECNOLOGIA

No hay matemáticas sin imaginación, pero tampoco sin esfuerzo

PRESENTACION

A un año de la 1a Olimpiada Mexicana de Matemáticas, podemos decir con satisfacción que el número de participantes superó con creces el que esperábamos, muchos estados e instituciones han organizado talleres y concursos, y la actuación de la Delegación Mexicana en la XXIX Olimpiada Internacional fué mejor que todas las anteriores.

Presentamos ahora el folleto con problemas tipo correspondiente a la 2a Olimpiada Mexicana de Matemáticas; hemos incluido algunas soluciones, pero antes de consultarlas debes intentarlos solo y discutirlos con compañeros y profesores. Recuerda que no son ejercicios de rutina, sino problemas que requieren esfuerzo.

En cada Olimpiada Internacional los concursantes deben resolver tres problemas en cada una de dos sesiones de cuatro horas y media.

Quisiéramos invitar a maestros y alumnos para que nos hagan llegar problemas de su creación con solución. Los que sean seleccionados serán publicados en el folleto de la próxima Olimpiada.

Esperamos que el folleto te sea útil y que seas uno de los ganadores de la Olimpiada.

Javier Alfaro
Carlos Bosch
Alejandro Bravo
Alejandro Illanes
Javier Páez
Ana Irene Ramírez

PROBLEMAS

PROBLEMA 1.

Considere un triángulo ABC en el cual $AC > AB$. Si una semirrecta con origen B corta a AC en D de tal forma que los ángulos ABD y ACB son iguales.

Deduzca que $AB^2 = AC \cdot AD$.

PROBLEMA 2.

Considere un triángulo de vértices A, B y C, y D el punto medio de BC. Si una paralela a AD corta a AB en P, a AC en Q y la paralela a BC por A en M, pruebe que M es el punto medio de PQ.

PROBLEMA 3.

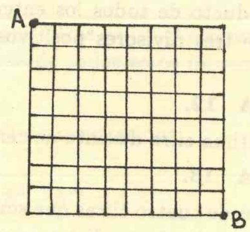
Construya tres circunferencias de radios iguales, cada una de las cuales pasa por el centro de las otras dos. Demuestre que el área de la intersección de los tres discos determinados por las circunferencias es menor que la cuarta parte del área de cada circunferencia.

PROBLEMA 4.

¿ Cuántas soluciones tiene la ecuación $\cos x = 1 - \frac{x}{200}$?

PROBLEMA 5.

Consideremos la figura :



¿ Cuántos caminos hay de A a B si no se permite caminar hacia la izquierda y no se vale pasar dos veces por el mismo lugar ?(Sí se vale caminar hacia arriba).

PROBLEMA 6.

Demuestre que si la suma de dos fracciones simplificadas es un entero, entonces los denominadores de ambas fracciones son iguales o difieren en signo.

PROBLEMA 7.

Considere un rectángulo con la siguiente propiedad : al recortarle un cuadrado, queda un rectángulo proporcional al original. Determine la razón de los lados del rectángulo.

PROBLEMA 8.

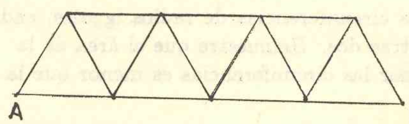
Considere un triángulo rectángulo de vértices A, B, y C. Si BC es su hipotenusa, M un punto en BC y P, Q las proyecciones de M sobre AB y AC respectivamente. Pruebe que no son iguales las áreas : $AreaAQM$, $AreaQAPM$ y $AreaMPQ$.

PROBLEMA 9.

Demuestre que para cualquier número entero n, la fracción $\frac{n^2+n-1}{n^2+2n}$ es irreducible.

PROBLEMA 10.

Si sólo es posible caminar de A a B siguiendo las líneas del diagrama :



¿ Cuántos caminos hay para llegar de A a B ? (Se entiende que un camino no puede tocar el mismo punto dos veces)

PROBLEMA 11.

Calcule el producto de todos los enteros positivos que sean menores que 100 y tengan exactamente tres divisores positivos. Compruebe que dicho número es un cuadrado perfecto.

PROBLEMA 12.

¿ Cuál es la última cifra distinta de cero de 100! ? ($100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100$).

PROBLEMA 13.

De los números de cuatro cifras que son múltiplos de 9, ¿ cuántos hay que tienen todas sus cifras distintas de cero y distintas entre sí ?

PROBLEMA 14.

Pruebe que el producto de todos los divisores de $2^{100} \cdot 3^{100}$ es 6^{505000}.

PROBLEMA 15.

Al dividir cualquier potencia de 10 entre 45, el resto es siempre 10. Con base en esto, dé un criterio (distinto de la divisibilidad simultánea por 9 y por 5) para que un número $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_0}$ sea divisible entre 45.

PROBLEMA 16.

Demuestre que la ecuación $x^5 + x = 10$ no tiene raíces racionales.

PROBLEMA 17.

Considere un triángulo OAB isósceles, con base AB. Denotemos por H al punto medio de AB y por M y N dos puntos sobre AO y BO respectivamente, tales que $4AM \cdot BN = AB^2$

(1) Pruebe que los triángulos AHM, BNH y HMN son semejantes.

(2) Pruebe que el círculo de centro H tangente a las rectas OA y OB también es tangente a la recta MN.

PROBLEMA 18.

Demuestre que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} + z &= 1 \\ x + \frac{y^3}{3} + \frac{z^2}{2} &= 1 \\ \frac{x^2}{2} + y + \frac{z^3}{3} &= 1 \end{aligned}$$

no puede tener más de una solución con x, y, z positivos.

PROBLEMA 19.

Se tienen 64 tarjetas, numeradas del 1 al 64. Una vez revueltas, se colocan en las casillas de un tablero de ajedrez con el número hacia arriba. Se procede ahora a ordenar las tarjetas de cada renglón en orden creciente de izquierda a derecha y después se ordenan las tarjetas de cada columna en orden creciente de arriba hacia abajo. Demuestre que los nuevos renglones tienen las tarjetas ordenadas en forma creciente de izquierda a derecha.

PROBLEMA 20.

Considere todos los números de 9 cifras en las que aparecen los dígitos $1, 2, 3, \ldots, 9$ una y sólo una vez. Calcular la suma de todos estos números.

PROBLEMA 21.

Encuentre todas las soluciones de la ecuación

$$3^n - 5^m = 4$$

para n, m enteros positivos.

PROBLEMA 22.

Encuentre todos los enteros positivos n tales que $n^2 + 1$ es un múltiplo entero de $n + 1$.

PROBLEMA 23.

Encuentre todos los números primos que son tanto suma de dos primos, como diferencia de dos primos.

PROBLEMA 24.

Encuentre todos los enteros $x \neq 3$ tales que $x - 3$ divide a $x^3 - 3$

PROBLEMA 25.

Para cada punto M de un segmento fijo AB, construya del mismo lado de AB, triángulos equiláteros AMC y MBD. Los círculos circunscritos a dichos triángulos se intersectan en M y otro punto N.

a) Pruebe que N es la intersección de las rectas AD y BC

b) Pruebe que todas las rectas MN pasan por un punto fijo.

PROBLEMA 26.

Dado un triángulo fijo Δ, ¿ qué condición es necesaria y suficiente para que con cuatro triángulos congruentes a Δ pueda formarse un tetraedro ?.

PROBLEMA 27.

En un plano, considérense 1987 puntos tales que no haya 3 colineales. Sea A un punto cualquiera de ellos. Probar que los 1986 puntos restantes pueden dividirse en dos grupos $A_1, A_2, \ldots, A_{993}$ y $B_1, B_2, \ldots, B_{993}$ de tal manera que los segmentos $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{992}A_{993}, A_{993}A; AB_1, B_1B_2, \ldots, B_{992}B_{993}, B_{993}A$ son ajenos dos a dos excepto por el vértice común de dos consecutivos.

PROBLEMA 28.

Se llama epicicloide a la curva descrita por un punto fijo P de una circunferencia de radio r que rueda sin resbalar sobre otra circunferencia fija de radio R. Determine las condiciones para que la epicicloide se cierre, esto es, para que después de un cierto número de vueltas, el punto repita la trayectoria que ya había tenido anteriormente.

PROBLEMA 29.

Considere una cuadrícula de 10×13 y tres colores. Si se ilumina cada cuadro de algún color, demuestre que hay cuatro cuadros de un mismo color que son vértices de un rectángulo de lados paralelos a la orilla de la cuadrícula.

PROBLEMA 30.

Si E es un hexágono regular de vértices $A_1, A_2, \ldots, A_6$ y se trazan los segmentos $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_6B_6$ donde B_1 es el punto medio A_3A_4, B_2 el punto medio de $A_4A_5, \ldots, B_6$ el punto medio de A_2A_3, se forma un hexágono de área igual a un treceavo del área del heágono original. Demuéstrelo.

PROBLEMA 31.

¿ Cómo son los triángulos de mayor área que se pueden inscribir en una circunferencia de radio r ?. ¿ Cuánto miden sus lados ?.

PROBLEMA 32.

Si a es un número entero, demuestra que no hay números enteros x, y, z, w que satisfagan simultáneamente las igualdades

$$xy + zw = 2a, xz + yw = 2a + 1, xw + yz = 2a + 2.$$

PROBLEMA 33.

Sean A, B, C, D los vértices de un cuadrilátero convexo cualquiera, y sean M, N, P, Q los puntos medios de AB, BC, CD y DA respectivamente.

(1) ¿ Qué tipo de cuadrilátero es $MNPQ$?.

(2) ¿ Qué particularidad debe tener el cuadrilátero $ABCD$ para que $MNPQ$ sea :

(a) un rectángulo

(b) un rombo

(c) un cuadrado.

PROBLEMA 34.

Siete personas se envían cartas entre sí, todas con todas, pero entre cada pareja se trata solamente uno de tres temas diferentes. Prueba que hay un tema y un cierto número $n > 2$ de personas tales que dicho tema se aborda entre a_1 y a_2, a_2 y a_3, ... , a_{n-1} y a_n, a_n y a_1.

PROBLEMA 35.

Si sobre cada lado de un trapecio isósceles construimos un cuadrado exterior y unimos los centros de los cuadrados opuestos, demuestre que los segmentos obtenidos son perpendiculares y congruentes.

PROBLEMA 36.

¿ De cuántas formas se puede dividir un octágono regular en triángulos cuyos vértices sean vértices del octágono. ?

PROBLEMA 37.

Encuentre todos los triángulos rectángulos con un cateto y la hipotenusa enteros, sabiendo que el otro cateto es igual a la raíz cuadrada de 1988. (Juan Gómez Aguilar).

EXAMENES DE CONCURSO

PRIMER CONCURSO DE MATEMATICAS
INTRA-C.C.H.
PRIMERA ETAPA

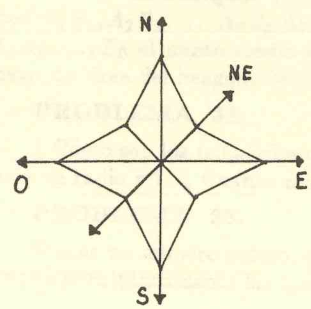
1.- Un alambre de 1 m. de longitud se divide en dos trozos. Con uno de ellos se construye un rectángulo, cuyo largo es el doble del ancho y con el otro un cuadrado. Si el área encerrada por ambas figuras es $\frac{1}{18}m^2$. ¿ Cúales son las áreas encerradas por cada una de tales figuras ?.

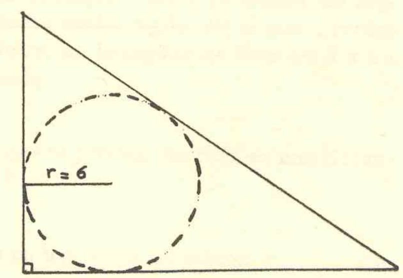
2.- Francisco Javier compró 100 mosaicos rectangulares de 10 $cm. \times 15$ cm. para cubrir (sin cortarlos) el cuadrado de mayor área posible. ¿ Cuál fué el área cubierta ? y ¿Cuántos mosaicos sobraron ?.

3.- Un marchista en preparación para los Juegos Olímpicos de Seúl 88, hace la siguiente caminata :

Primero va hacia el Noroeste 4 km., luego hacia el Este 1 km. y finalmente 3 km. hacia el Norte.

¿ A qué distancia (en línea recta) se encuentra entre los puntos inicial y final ?





4.- Encontrar cuantos números hay del cero al cuatro mil que tengan como residuo al cero o al tres, al dividirlos entre cuatro.

5.- ¿ Cuántos triángulos rectángulos isósceles de lados enteros existen ?. Justifica la respuesta.

6.- En un triángulo rectángulo está inscrito un círculo de radio 6. Determinar todos los triángulos rectángulos de lados enteros con esa característica.

OLIMPIADA DE MATEMATICAS 1987
ZONA D.F., EDO. DE MEXICO, HIDALGO, MORELOS
Octubre de 1987

PROBLEMAS

I. Se dice que los lados a, b de un rectángulo (con $a < b$) están en la razón áurea $\lambda = \frac{b}{a}$ si al recortar del rectángulo un cuadrado de lado a se obtiene un rectángulo proporcional al original. Determine el número λ.

II. Considere todos los números de nueve cifras decimales en los que aparecen los dígitos $1, 2, 3, \ldots, 9$ una y sólo una vez. Calcule la suma de todos estos números.

III. Sean A, B dos puntos distintos y sea d una recta perpendicular a AB que no pase ni por A ni por B. Sea M un punto que recorre la recta d. Encuentre el lugar geométrico de los puntos M' que son la intersección de las perpendiculares en A y B a las rectas MA y MB.

IV. Designemos por a, b, a', b' a cuatro enteros positivos tales que $a'b - ab' = 1$.

1. Considere $\frac{a}{b}$ y $\frac{a'}{b'}$. ¿ Cuál de esas fracciones es mayor ?. Pruebe que son irreducibles.

2. Considere la fracción de numerador $c = a + a'$ y denominador $d = b + b'$. Pruebe que $a'd - cb' = 1$ y $cb - ad = 1$. Deduzca que $\frac{c}{d}$ es irreducible y que está entre $\frac{a}{b}$ y $\frac{a'}{b'}$.

3. Sea n un entero positivo y considere q y q' enteros positivos no nulos tales que $\frac{q}{n} \leq \frac{a}{b} < \frac{q+1}{n}$ y $\frac{q'}{n} \leq \frac{a'}{b'} < \frac{q'+1}{n}$. Pruebe que q' es mayor o igual que q. Pruebe que q y q' cumplen $na = bq + r, 0 \leq r \leq b - 1; na' = b'q' + r', 0 \leq r' \leq b' - 1$. Establezca la relación $bb'(q' - q) = nrb' - r'b \ldots (*)$.

4. Suponga que $n < b + b'$ y que n no es múltiplo de b'. Pruebe, encontrando una cota superior de la parte derecha de la igualdad (*), que q y q' son iguales.

5. Suponga que $n < b + b'$ y que n es un múltiplo de b'. Pruebe, utilizando la igualdad (*), que q' es igual a $q + 1$ y que $\frac{a'}{b'}$ es igual a $\frac{q'}{n}$.

6. Deduzca del estudio anterior que no hay entre $\frac{a}{b}$ y $\frac{a'}{b'}$ una fracción con denominador menor a $b + b'$.

7. Aplicación numérica. Escriba todas las fracciones de denominador menor que 25 entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{7}$.

OLIMPIADA
CONCURSO NACIONAL
Noviembre de 1987

1a. SESION

I. Demuestre que si dos fracciones son irreducibles (simplificadas) y su suma es un entero, entonces ambas fracciones tiene el mismo denominador.

II. ¿ Cuántos enteros positivos dividen a 20! ? ($20! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 19 \cdot 20$).

III. Considere dos rectas paralelas ℓ y ℓ'. Un punto fijo P que diste lo mismo de ℓ que de ℓ'. ¿ Qué lugar geométrico describen los puntos M que son proyección de P sobre AB, donde A está en ℓ, B está en ℓ' y el ángulo APB es recto.

IV. Calcule el producto de todos los enteros positivos menores que 100, y que tengan exactamente tres divisores positivos. Compruebe que dicho número es un cuadrado perfecto.

2a. SESION

I. Considere un triángulo rectángulo ABC donde la hipotenusa es BC. M un punto en BC y P y Q las proyecciones de M sobre AB y AC respectivamente. Pruebe que para ninguno de tales puntos M son iguales las áreas del triángulos BPM, del triángulo MQC y del rectángulo $AQMP$.

II. Demuestre que para cualquier entero positivo n, el número

$$(n^3 - n)(5^{8n+4} + 3^{4n+2})$$

es un múltiplo de 3804.

III. Demuestre que si n es un entero positivo, entonces

$$\frac{n^2 + n - 1}{n^2 + 2n}$$

es una fracción irreducible (simplificada).

IV.

(a) Tres rectas en el espacio l, m y n concurren en el punto S y un plano perpendicular a m corta a l, m y n en A, B y C respectivamente. Suponga que los ángulos ASB y BSC son de 45 grados y que el ángulo ABC es recto. Calcule el ángulo ASC.

(b) Si un plano perpendicular a l corta a l, m, n en P, Q y R respectivamente y $SP = 1$, calcule los lados del triángulo PQR (recuerde que la ley de los cosenos es un triángulo cuyos lados son a, b y c es : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos$ (ángulo entre b y c)).

29th IMO 1988
INTERNATIONAL
MATHEMATICAL
OLYMPIAD
JULY 9-21
Canberra

Spanish version

PRIMER DIA

Canberra, 15 de Julio de 1988

1. Se consideran dos circunferencias concéntricas y coplanares de radios R y r ($R > r$). Sea P un punto fijo de la circunferencia menor y B un punto variable de la circunferencia mayor. La recta BP vuelve a cortar a la circunferencia mayor en el punto C. La perpendicular l a BP por P vuelve a cortar a la circunferencia menor en el punto A (si l es tangente a la circunferencia en P, entonces $A = P$).
   (i) Determine el conjunto de valores de $BC^2 + CA^2 + AB^2$.
   (ii) Determine el lugar geométrico descrito por el punto medio de AB.

2. Sea n un número entero estrictamente positivo. Sean A_1, A_2, ..., A_{2n+1} subconjuntos de un conjunto B tales que
   (a) cada A_i tiene exactamente $2n$ elementos,
   (b) para todo (i,j), $1 \leq i < j \leq 2n+1$, $A_i \cap A_j$ contiene uno y sólo un elemento,
   (c) cada elemento de B pertenece al menos a dos de los conjuntos A_i.

   Determinar para qué valores de n se puede asignar a cada uno de los elementos de B uno de los números 0 ó 1, de tal manera que cada uno de los conjuntos A_i tenga exactamente n elementos a los cuales se ha asignado 0.

3. Sea f la función cuyo dominio es el conjunto de los enteros estrictamente positivos definida por
$$f(1) = 1, \quad f(3) = 3,$$
$$f(2n) = f(n),$$
$$f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n),$$
$$f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n),$$
   para todo n.

   Determine el número de enteros estrictamente positivos n, menores o iguales que 1988, tales que $f(n) = n$.

Tiempo: 4.5 horas

Cada problema vale 7 puntos.

29th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD JULY 9-21

Spanish version

SEGUNDO DIA

Canberra, 16 de Julio de 1988

4. Demuestre que el conjunto de los números reales x que satisfacen

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geq \frac{5}{4}$$

es unión de intervalos disjuntos cuyas longitudes suman 1988.

5. En el triángulo rectángulo ABC, sea D el pie de la altura correspondiente a la hipotenusa BC. Sean K y L los puntos de intersección de la recta determinada por los incentros de los triángulos ABD y ACD con los lados AB y AC respectivamente. Las áreas de los triángulos ABC y AKL se denotan por S y T respectivamente. Demuestre que $S \geq 2T$.

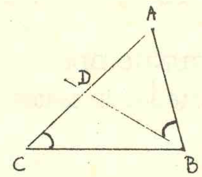
6. Sean a y b números enteros estrictamente positivos tales que $ab+1$ divide a a^2+b^2. Demuestre que $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ es un cuadrado perfecto.

Tiempo: 4.5 horas

Cada problema vale 7 puntos.

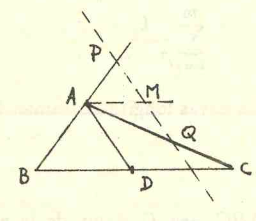
SOLUCIONES

SOLUCION 1.



Observemos que los triángulos ABD y ACB son semejantes porque los ángulos ABD y ACB son iguales y el ángulo BAC es común; por lo tanto $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$, de donde $AB^2 = AD \cdot AC$.

SOLUCION 2.



Como los triángulos AMP y BAD son semejantes y los triángulos AMQ y CDA también se tiene $\frac{MP}{AD} = \frac{AM}{BD}$ y $\frac{MQ}{AD} = \frac{AM}{CD}$ y como $BD = CD$, $\frac{MP}{AD} = \frac{AM}{BD} = \frac{AM}{CD} = \frac{MQ}{AD}$, y entonces $MP = MQ$.

SOLUCION 3.

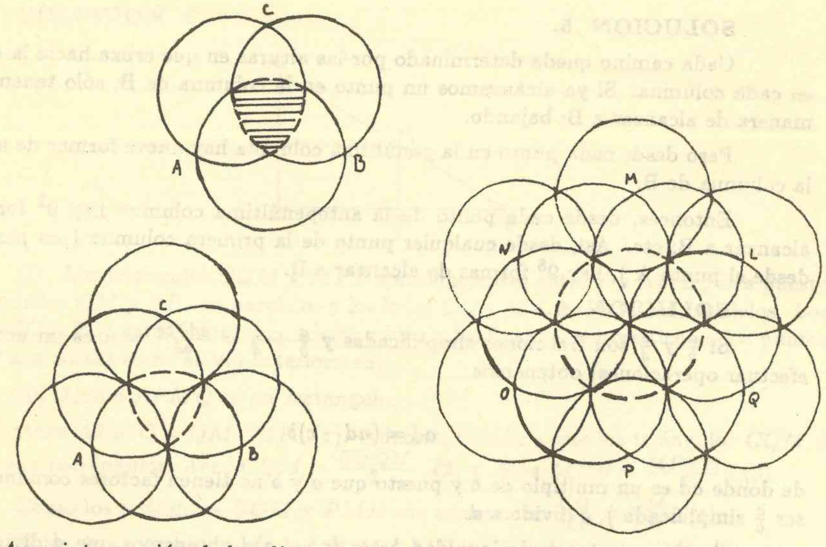
Dibujemos las tres circunferencias y completemos este dibujo con circunferencias centradas en los puntos de intersección A, B y C y con radio igual al de las primeras.

Es de observarse que el área que estamos considerando está formada por tres "gajos" y un "triángulo".

Si ahora trazamos un círculo, y seis circunferencias del mismo radio, como en la figura que está al inicio de la página .

y otras seis con centros L, M, N, O, P y Q del mismo radio.

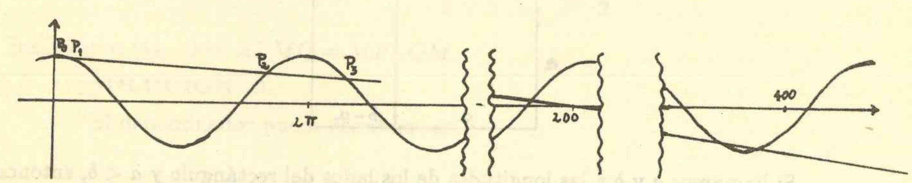
V s que la circunferencia consta de seis "triángulos" y doce "gajos"; y la solución se obtiene de



Area intersección de los discos $= 1$"*triángulo*" $+ 3$"*gajos*"
$< \frac{1}{4}(6$"*triángulos*" $+ 12$"*gajos*"$)=$ *Area del círculo.*

SOLUCION 4.

Si tomamos las gráficas de las funciones $y = \cos x$ y $y = -\frac{1}{200}x + 1$:



La recta $y = -\frac{1}{200}x + 1$ corta a la gráfica del coseno primero en el punto (0,1) [1] y después dos veces en cada período, por arriba del eje x antes de $x = 200$ y por abajo del eje x para $200 < x < 400$ (si $y < -1$ ya no hay intersección en la gráfica del coseno). Así que basta ver que $63 < \frac{400}{2\pi} < 64$ y observar como es la intersección de ambas gráficas cerca de 400:

Como la sima de la gráfica del coseno queda antes del 400, también en el 64^{avo} período hay dos intersecciones, así que hay $1 + 64 \cdot 2 = 129$ intersecciones.

[1] Observemos que la recta $y = 1$ es tangente a la gráfica del coseno , así que la recta $y = -\frac{1}{200}x + 1$ es secante a la gráfica del coseno, es decir, la corta en $P_0 = (0, 1)$ y la vuelve a cortar en un punto P_1 muy cercano a P_0.

SOLUCION 5.

Cada camino queda determinado por las alturas en que cruza hacia la derecha en cada columna. Si ya alcanzamos un punto en la columna de B, sólo tenemos una manera de alcanzar a B: bajando.

Pero desde cada punto en la penúltima columna hay nueve formas de alcanzar la columna de B.

Entonces, desde cada punto de la antepenúltima columna hay 9^2 formas de alcanzar a B; etc. Así, desde cualquier punto de la primera columna (en particular, desde el punto A), hay 9^8 formas de alcanzar a B.

SOLUCION 6.

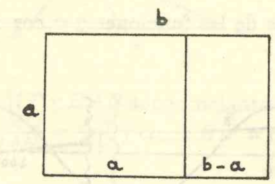
Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son fracciones simplificadas y $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}=n$ es un entero, (al efectuar operaciones) obtenemos

$$ad=(nd-c)b$$

de donde ad es un múltiplo de b y puesto que a y b no tienen factores comunes, (por ser $\frac{a}{b}$ simplificada), b divide a d.

Análogamente, de la igualdad $bc=(nb-a)d$ obtenemos que d divide a b y entonces $b=d$ ó $b=-d$.

SOLUCION 7.

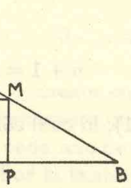


Si llamamos a y b a las longitudes de los lados del rectángulo y $a<b$, entonces $\frac{b}{a}=\frac{a}{b-a}$, de donde $\frac{b(b-a)}{a^2}=1$ y $(\frac{b}{a})^2-\frac{b}{a}-1=0$, que es una ecuación cuadrática en $\frac{b}{a}$, cuyas soluciones son

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad y \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

y puesto que $\frac{b}{a}>0$, $\frac{b}{a}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

SOLUCION 8.



(i) Los triángulos CQM y MPB son semejantes entre sí y rectángulos puesto que los lados QM y PB son paralelos y los lados CQ y MP son también paralelos. Los lados MC y BM están sobre una misma recta, y los ángulos con vértice en los puntos Q y P son rectos como se vió anteriormente.

(ii) Como $APMQ$ es un rectángulo,

$Area\ APMQ = QM \cdot MP$...(1). Además, debido a que los triángulos CQM y MPA son rectángulos, $Area\ CQM = \frac{CQ \cdot QM}{2}$...(2) y $Area\ MPB = \frac{MP \cdot PB}{2}$...(3).

Como los triángulos CQM y PMB son semejantes $\frac{CQ}{MP} = \frac{QM}{PB}$...(4).

Si las áreas de los triángulos CQM y MPB son iguales, por (2) y (3) se tiene que $\frac{CQ}{MP} = \frac{QM}{PB}$ y entonces $PB^2 = QM^2$, de donde obtenemos $PB = QM$, y que al ser sustituida en (3) da que

$$Area\ MPB = \frac{MP \cdot QM}{2} = \frac{Area\ APMQ}{2}$$

pero según (1), $Area\ APMQ = MP \cdot QM$.

SOLUCION 9.

El denominador puede escribirse así :

$$n^2 + 2n = n(n+2)$$

y por lo tanto sus factores primos deben ser divisores de n o de $n+2$. Los divisores de n no pueden ser divisores del numerador porque si p divide a n [2], con $p \neq \pm 1$, entonces p divide a $n^2 + n$, para tener que p dividiese a $(n^2 + n - 1)$ sería necesario que p divida a (-1), lo cual sólo ocurre si $p = \pm 1$. Por lo tanto debemos mostrar que los divisores de $n+2$ no son divisores de $n^2 + n - 1$; para ello es conveniente expresar el numerador de forma que intervenga $n+2$:

$$n^2 + 2n - 1 = n(n+2) - (n+1)$$

[2] Si un entero m divide aun entero b, escribimos $m|b$, que se lee: m divide a b

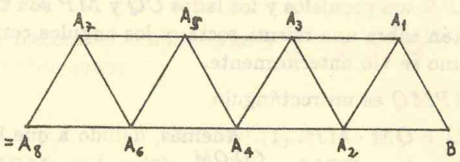
y ahora es claro que un divisor p de $n+2$ no puede ser divisor de n^2+n-1, pues de la relación

$$n+1 = n+2-1$$

tendríamos que p divide a (-1), lo cual sólo es posible si $p = \pm 1$.

SOLUCION 10.

Hay 81 caminos; una forma de contarlos consiste en señalar primero los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_8$ así :



Denotemos por C_n al número de caminos de A_n a B que no pasan por A_{n+1}, $A_{n+2}, \ldots, A_8$ y con D_n el número de caminos de A_n a B que no pasan por A_{n+2}, $A_{n+3}, \ldots, A_8$.

Notemos que $C_n = C_{n-1} + D_{n-2}, (n = 3, 4, \ldots, 8)$;, que $D_n = C_n + C_{n-1}, (n = 2, 3, \ldots, 7)$, y que $C_1 = 1, D_1 = 2, C_2 = 2$ y $D_2 = 3$.

Entonces $C_3 = 2+2 = 4, D_3 = 4+2 = 6, C_4 = 4+3 = 7, D_4 = 7+4 = 11, C_5 = 7+6 = 13, D_5 = 13+7 = 20, C_6 = 13+11 = 24, D_6 = 24+13 = 37, C_7 = 24+20 = 44$ y $C_8 = 44+37 = 81$.

SOLUCION 11.

Entre los divisores de un número se encuentra siempre 1 y el número mismo; entonces, para que sólo haya otro divisor es necesario que el número sea el cuadrado de un primo, pues entonces sus divisores son 1, p y p^2. Los números del tipo p^2 menores que 100 son únicamente cuatro :

$$2^2 = 4, \quad 3^2 = 9, \quad 5^2 = 25 \quad \text{y} \quad 7^2 = 49$$

El producto es $4 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 49 = 44100$ y desde luego es un cuadrado perfecto por ser producto de cuadrados.

SOLUCION 12.

Cualquier número múltiplo de 10 termina en 0, los múltiplos de 100 en 00, los múltiplos de 1000 en 000, etc. Notemos que 10, 20, 30, ... , 100 dividen a 100!. Primero contestaremos la pregunta ¿ Cuántos ceros tiene al final 100! ?. O lo que es lo mismo, ¿ Cuántos dieces dividen a 100! ?. Observemos que para formar un 10 necesitamos un 2 y un 5. Entonces contemos primero cuantos cincos aparecen en 100! :

$100! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 5 \cdot \ldots 10 \cdot \ldots 15 \cdot \ldots 20 \cdot \ldots 25 \cdot \ldots 30 \cdot \ldots 35 \cdot \ldots 50 \cdot 55 \cdot \ldots \cdot 55 \cdot \ldots \cdot 100$

En todos lo múltiplos de 5 aparece un 5, menos en $25 = 5 \cdot 5, 50 = 2 \cdot 5 \cdot 5, 75 = 3 \cdot 5 \cdot 5$ y $100 = 4 \cdot 5 \cdot 5$ que aparecen 2 cincos. De manera que en 100! aparecen 20+4=24 cincos. Como aparecen más doses que cincos, cada uno de estos cincos lo podemos unir (multiplicar) con un dos para formar un 10. Por lo tanto el número máximo de dieces que divide a 100! es 24, es decir, 100! es múltiplo de 10^{24} pero no de 10^{25}.

Entonces las últimas 24 cifras de 100! son ceros pero (contando de derecha a izquierda) la veinticincoava cifra de 100! es diferente de cero. Esta es precisamente la que andamos buscando ¿ cómo encontrarla ?.

Para lo que sigue vamos a usar congruencias. Necesitamos usar el hecho de que un número es congruente con su última cifra módulo 10. Entonces, necesitamos encontrar $n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$ tal que

$$\frac{100!}{10^{24}} \equiv n \pmod{10}.$$

Al tomar el cociente $\frac{100!}{10^{24}}$, se cancelan todos los ceros del final de 100! y nos queda un número del que queremos conocer su última cifra.

Como

$100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 100 =$

$= (1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9)(11 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19)(21 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29) \cdots\cdots$

$\cdots\cdots (91 \cdot 93 \cdot 94 \cdot 96 \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99)(2 \cdot 5 \cdot 10)(12 \cdot 15 \cdot 20)(22 \cdot 25 \cdot 30) \cdots\cdots (92 \cdot 95 \cdot 100)$

$= (1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) \cdots\cdots (91 \cdot 93 \cdot 94 \cdot 96 \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99) \cdot (2^2 \cdot 5^2)(2^2 \cdot 5^2)(6 \cdot 3 \cdot 2)(2^2 \cdot 5^2)(11 \cdot 5 \cdot 3)(2^2 \cdot 5^2)(16 \cdot 7 \cdot 4)(2^2 \cdot 5^2)(21 \cdot 9 \cdot 5)(2^2 \cdot 5^2)(26 \cdot 11 \cdot 6)$
$(2^2 \cdot 5^2)(31 \cdot 13 \cdot 7)(2^2 \cdot 5^2)(36 \cdot 15 \cdot 8)(2^2 \cdot 5^2)(41 \cdot 17 \cdot 9)(2^2 \cdot 5^2)(46 \cdot 19 \cdot 10)$

$= (1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) \cdots\cdots (91 \cdot 93 \cdot 94 \cdot 96 \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99) \cdot 2^{20} 5^{20} (6 \cdot 16 \cdot 26 \cdot 36 \cdot 46)(11 \cdot 21 \cdot 31 \cdot 41)(3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19)(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10)$

Entonces

$\frac{100!}{10^{24}} = (1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) \cdots\cdots (91 \cdot 93 \cdot 94 \cdot 96 \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99)(6 \cdot 16 \cdot 26 \cdot 36 \cdot 46)(11 \cdot 21 \cdot 31 \cdot 41)(3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 19)(3 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9)$

$\equiv (1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9)^{10} \cdot 6^5 \cdot 1^4 \cdot (3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 19)(3 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9)$

$\equiv 8^{10} \cdot 6^5 \cdot 3 \cdot 2 \equiv (64)^5 \cdot 6 \cdot 6 \equiv 4^5 \cdot 6 \equiv 4 \cdot 6 \equiv 4 \pmod{10}.$

Por lo tanto, la última cifra diferente de cero de 100! es 4.

SOLUCION 13.

Puesto que un número es diviible entre 9 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible entre 9. Se tiene que si $abcd (= a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d)$ es divisible entre

9, entonces cualquier número que se forme con esas cifras también es divisible entre 9 ($bcda, cdab$, etc.)

Por lo tanto, basta contar los que satisfacen $a > b > c > d$ y luego multiplicamos por 4!=24.

Si $a = 9$, las posibilidades son :

9765, 9621, 9531, 9432, 9864 y 9873.

que son seis.

Si $a = 8$, tenemos :

8721, 8631, 8541, y 8532

que son cuatro.

Para $a = 7$,

7641, 7632, y 7542

que son tres.

Si $a = 6$, sólo se tiene una posibilidad: 6543.

En total son $14 \cdot (4!) = 14 \cdot 24 = 332$.

SOLUCION 14.

Los divisores de $2^{100} \cdot 3^{100}$ son $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{100}$ y los de 3^{100} son $1, 3, 3^2, 3^3, \ldots, 3^{100}$

Entonces, los divisores de $2^{100} \cdot 3^{100}$ son :

$1 \cdot 1, 1 \cdot 3, 1 \cdot 3^2, \ldots, 1 \cdot 3^{100}$

$2 \cdot 1, 2 \cdot 3, 2 \cdot 3^2, \ldots, 2 \cdot 3^{100}$

$2^2 \cdot 1, 2^2 \cdot 3, 2^2 \cdot 3^2, \ldots, 2^2 \cdot 3^{100}$

$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$

$2^{100} \cdot 1, 2^{100} \cdot 3, 2100 \cdot 3^2, \ldots, 2^{100} \cdot 3^{100}$

Si multiplicamos los números de cada renglón y luego efectuamos el producto entre esos números, obtenemos:

$$1^{100}(1 \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot 3^{100}) 2^{100}(1 \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot 3^{100}) 2^{2^{100}}(1 \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot 3^{100}) \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \cdot 2^{100^{100}}(1 \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot 3^{100})$$

$$= (1 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 2^{100})^{100}(1 \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot 3^{100})^{100}$$

$$= (2^{0+1+2+3+\ldots+100})^{100}(3^{0+1+2+3+\ldots+100})^{100}$$

$$= (2^{\frac{100(101)}{2}})^{100}(3^{\frac{100(101)}{2}})^{100}$$

$$= (2\cdot 3)^{(50)(101)(100)} = 6^{505000}.$$

SOLUCION 15.

Si en la expresión $a_n10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$ dividimos cada sumando entre 45, la suma de los residuos es

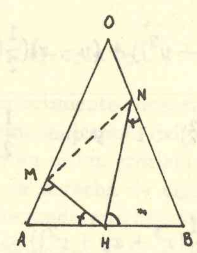
$$a_n 10 + a_{n-1}10 + \ldots + a_1 10 + a_0$$

así que basta probar que este número es divisible entre 45 para que también lo sea el original.

SOLUCION 16.

Supongamos que $x = \frac{m}{n}$ es una raíz racional de la ecuación donde el cociente $\frac{m}{n}$ ya está reducido a su mínima expresión, es decir, m y n son primos relativos. Podemos suponer que n es positivo. Entonces $(\frac{m}{n})^5 + \frac{m}{n} = 10$. Es decir, $m^5 + mn^4 = 10n^5$. Entonces $m^5 = n(10n^4 - mn^3)$. De manera que n divide a m^5. Si algún número primo p dividiera a n, tendríamos que p divide a m^5. Pero esto solamente es posible si p divide a m y entonces p dividiría tanto a m como a n. Esto es absurdo pues $\frac{m}{n}$ ya estaba reducido. Por tanto, ningún primo puede dividir a n. Esto muestra que $n = 1$. Entonces $m^5 + m = 10$. Es de observarse que m no puede ser cero ni negativo. Si $m > 0$, $m^5 < 10$ y entonces m tendría que ser 1, el cual tampoco es solución de la ecuación $m^5 + m = 10$.

SOLUCION 17.



(1)

$$AM \cdot BN = \frac{AB^2}{4} = AH^2 = AH \cdot HB$$

por lo tanto

$$\frac{AM}{BH} = \frac{AH}{BN}$$

y como los ángulos OAB y OBA son iguales, resulta que los triángulos AHM y BNH son semejantes. Por lo tanto $angAMH$=$angBHN$ y $angMHA$=$angHNB$.

En consecuencia, $angNHM = angHAM$ y como $\frac{HM}{HN} = \frac{AM}{BH}$, de $BH = AH$ tenemos $\frac{HM}{HN} = \frac{AM}{BH}$. Por lo tanto, los triángulos MAH y MHN son semejantes.

(2) La última semejanza implica

$$angAMH = angHMN$$

y también se tiene

$$angHNB = angMNH,$$

así que MH y NH son bisectrices de los ángulos AMN y BNM. Por lo tanto, la circunferencia con centro H tangente a OA y OB es también tangente a MN.

SOLUCION 18.

Primero mostraremos que si x, y, z es una solución, entonces $x = y = z$. El papel que juegan las tres variables en el sistema es análogo, por lo que podemos suponer que x es mayor o igual que las otras dos. De la primera ecuación se observa que $z < 1$, de la segunda que $x < 1$ y de la tercera que $y < 1$. Analizamos dos casos:

(a)

$$x \geq y \geq z$$

Restando la segunda ecuación de la primera tenemos que

$$z - x + \frac{1}{3}(x^3 - y^3) + \frac{1}{2}(y^2 - z^2) = 0.$$

Es decir,

$$(x - y)(\frac{1}{3}(x^2 + xy + y^2)) + (y - z)(\frac{1}{2}(y + z)) = x - z$$

Notemos que

$$\frac{1}{3}(x^2 + xy + y^2) < 1 \quad \text{y que} \quad \frac{1}{2}(y + z) < 1.$$

Si ocurriera que $x > y$, entonces

$$(x - y)(\frac{1}{3}(x^2 + xy + y^2)) < x - y,$$

además como

$$(y - z)(\frac{1}{2}(y + z)) \leq y - z,$$

tenemos que

$$x - z = (x - y)(\frac{1}{3}(x^2 + xy + y^2)) + (y - z)(\frac{1}{2}(y + z)) < x - y + y - z = x - z.$$

Esta contradicción prueba que $x = y$. Similarmente se prueba que $y = z$. Por lo tanto $x = y = z$.

(b)

$$x \geq z \geq y.$$

Este caso se analiza en forma similar, restando la tercera ecuación de la segunda. Por lo tanto, si x, y, z son solución, entonces $x = y = z$.

Finalmente, para demostrar lo que se pide, basta probar que la ecuación

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x = 1$$

sólo admite una raíz real positiva, pero esto es inmediato si notamos que para $x_1 > x_2 > 0$

$$\frac{x_1^3}{3} + \frac{x_1^2}{2} + x_1 > \frac{x_2^3}{3} + \frac{x_2^2}{2} + x_2$$

y entonces solo alguna de las dos sumas anteriores puede ser igual a 1.

SOLUCION 19.

Llamamos primer movimiento al ordenamiento de tarjetas por renglones, y segundo movimiento al ordenamiento de las tarjetas por columnas.

Si después del segundo movimiento dos columnas consecutivas tienen los números $a_1, a_2, \ldots, a_8$, (la que está a la izquierda) y $b_1, b_2, \ldots, b_8$ (la colocada a la derecha), para probar lo que queremos basta demostrar

$$a_1 < b_1, a_2 < b_2, \ldots, a_8 < b_8$$

Notemos que el segundo movimiento conserva en la misma columna a las tarjetas que constituyen una columna formada después del primer movimiento, pues únicamente las ordena de arriba hacia abajo en orden creciente. Por lo tanto, después del primer movimiento la tarjeta b_1 está a la derecha de algún a_i y esto implica que $a_i < b_1$ y como $a_1 \leq a_i$ (por la regla del segundo movimiento), finalmente tenemos $a_1 < b_1$.

Si para $1 \leq r < 8$ ya probamos $a_1 < b_1, a_2 < b_2, \ldots, a_r < b_r$, entonces cada una de las $r+1$ tarjetas $b_1, b_2, \ldots, b_r, b_{r+1}$ tarjetas tenía, después del primer movimiento, alguna tarjeta a_i a la izquierda y como necesitamos $r+1$ tarjetas, algún b_j con $1 \leq j \leq r+1$ tenía a la izquierda algún a_i con $i > r$, así: $a_i < b_j$ con $r+1 \leq i$, y por la regla del segundo movimiento tenemos $a_{r+1} \leq a_i < b_j \leq b_{r+1}$, lo cual termina la prueba.

SOLUCION 20.

Observemos todos los números que empiezan con 9; de estos hay 8! porque se pueden elegir 8 dígitos para el segundo lugar, 7 para el tercero, 6 para el cuarto, etc. En la suma que buscamos, para cada uno de esos números, este 9 contribuye con $9 \cdot 10^8$ (porque está colocado en el noveno lugar de derecha a izquierda). Entonces los nueves que están en la primera posición contribuyen a la suma con $(9 \cdot 10^8)8!$.

Similarmente, los nueves de la segunda posición contribuyen con $(9 \cdot 10^7)8!$, las de la tercera con $(9 \cdot 10^6)8!$, etc. Por lo tanto, los nueves contribuyen a la suma con $9(8!)(10^7 + 10^6 + \ldots + 10 + 1)$.

Análogamente, los ochos contribuyen a la suma con $8(8!)(10^8+10^7+\ldots+10+1)$; los sietes con $7(8!)(10^8 + 10^7 + \ldots + 10 + 1)$; etc.

Por lo tanto, la suma es

$$8!(9 + 8 + \ldots + 2 + 1)(10^8 + 10^7 + 10^6 + \ldots + 10 + 1) = 8!(45)(111,111,111).$$

SOLUCION 21.

Nótese que no existe ninguna solución con $n = 1$ y que si $n = 2$ entonces $m = 1$.

Utilizaremos la notación $a \equiv b \quad mod\ s$ si $s|a - b$; entonces puede comprobarse que :

$$3^n \equiv \begin{cases} 3\ (mod\ 5), & \text{si } n \equiv 1\ mod\ 4; \\ 4\ (mod\ 5), & \text{si } n \equiv 2\ mod\ 4; \\ 2\ (mod\ 5), & \text{si } n \equiv 3\ mod\ 4; \\ 1\ (mod\ 5), & \text{si } n \equiv 0\ mod\ 4; \end{cases}$$

de $3^n - 5^m = 4$ obtenemos

$$3^n \equiv 4(mod\ 5) \quad \text{y} \quad n = 4k + 2, \quad (k > 0)$$

es decir

$$3^n \equiv 4(mod\ 5) \quad \text{y} \quad n = 2s$$

donde $s = 2k + 1$.

Así, $3^{2s} - 4 = 5^m$, y con esto $(3^s - 2)(3^s + 2) = 5^m$. Entonces

$$5|3^s + 2, \quad 3^s \equiv 3\ (mod\ 5) \quad \text{y} \quad s \equiv 1(mod\ 4)$$

y $5|3^s - 2$ lo que implica que $3^s \equiv 2\ (mod\ 5)$ y $s \equiv 3\ (mod\ 4)$ lo cual no es posible. Por lo tanto, la única solución es $n = 2$, $m = 1$.

SOLUCION 22.

Si $n + 1$ divide a $n^2 + 1$, entonces $n + 1$ divide a $n^2 + 1 - (n + 1)$, es decir $n + 1$ divide a $n(n - 1)$.

Y como dos enteros positivos consecutivos no tienen factores primos en común, todos los factores primos de $n + 1$ deberían ser divisores de $n - 1$, es decir, $n + 1$ divide a $n - 1$ lo cual sólo es posible si $n - 1 = 0$, o sea $n = 1$.

SOLUCION 23.

Dos no es suma de dos primos, y entonces si p es un primo que es suma de dos primos, p es impar. Si además p es diferencia de dos primos, uno de ellos q debe ser impar y el otro 2, $p = q - 2$, (y entonces $q = p + 2$).

Análogamente, como p es impar, p debe ser la suma de un primo impar r y 2, $p = r + 2$, (y entonces $r = p - 2$).

Pero de tres impares consecutivos

$$p-2, \quad p, \quad p+2$$

alguno es múltiplo de 3, y por ser primo, debe ser 3, y entonces la única posibilidad es $p - 2 = 3, p = 5, p + 2 = 7$.

SOLUCION 24.

Como $x^3 - 3 = x^3 - 3x^2 + 3x^2 - 9x + 9x - 27 + 27 - 3$, podemos factorizar así :

$$x^3 - 3 = x^2(x-3) + 3x(x-3) + 9(x-3) + 24.$$

Si $x - 3 | x^3 - 3$, [3]

$$x - 3 | x^3 - 3 - x^2(x-3) - 3x(x-3) - 9(x-3)$$

y por lo tanto, $x - 3 | 24$ que dá las posibilidad

$$x - 3 = \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm8, \pm12, \pm24$$

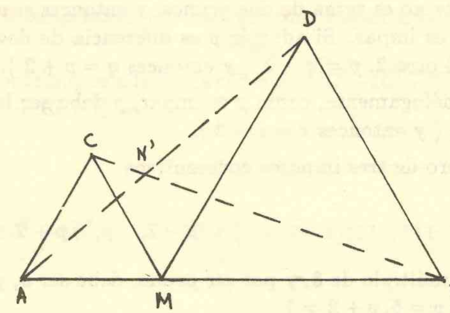
y

$$x = -21, -9, -5, -1, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 15 \text{ y } 27.$$

[3] Si un entero m divide a un entero b escribimos $m|b$, que se lee: m divide a b .

SOLUCION 25.

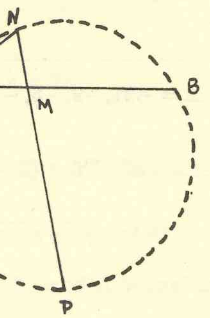
a)



Los triángulos CMB y AMD son congruentes ya que tienen dos parejas de lados congruentes : $CM = AM$ y $MB = MD$, y los ángulos que forman son iguales : *ang* $CMB = 120^o =$ *ang* AMD.

Si $N\prime$ es el punto de intersección de AD y BC, como los lados congruentes CM y AM forman un ángulo de 60^o, los lados congruentes BC y DA también, es decir *ang* $AN\prime C = 60^o$ y $N\prime$ está en el círculo circunscrito al triángulo AMC; análogamente $N\prime$ está en el círculo circunscrito al triángulo MBD y entonces $N\prime$ es N.

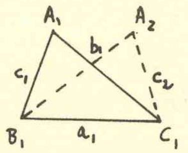
b) Puesto que N está en los círculos circunscritos mencionados, *ang* $ANM = 60^o =$ *ang* MNB, entonces *ang* $ANB = 120^o$ y todos los puntos N están en un círculo fijo que pasa por los puntos A y B.

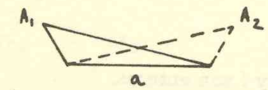


Si P es el otro punto donde la recta NM intersecta al último círculo mencionado, como *ang* $ANM = 60^o$, P es fijo.

SOLUCION 26.

Sea Δ de lados a, b y c y vértices opuestos A, B y C; es claro que si llamamos $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ y Δ_4 a las copias que debemos pegar, el lado a de Δ, debe pegarse con el lado a de Δ_2 y que Δ_2 debe tener su lado c tocando al vértice C y no al B, pues de otro modo el triángulo que se pegara al lado c de Δ_1 debería tener dos lados congruentes al c.



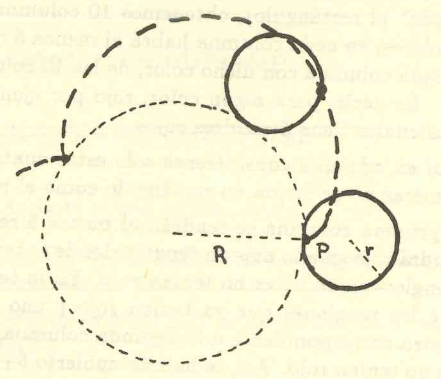


Ahora, si pensamos a los triángulos unidos con bisagras en los lados a, para pegar los triángulos Δ_2 y Δ_3 basta abrir Δ_1 y Δ_2 hasta que la distancia entre A_1 y A_2 sea a. El impedimento consistiría en que la distancia entre A_1 y A_2 fuera mayor que a, lo cual ocurriría si el ángulo en B es obtuso. Por lo tanto, la condición necesaria y suficiente para formar un tetraedro con cuatro triángulos congruentes es que todos sus ángulos sean agudos.

SOLUCION 27.

Numere los 1986 rayos que parten de A y pasan por los puntos restantes, partiendo de cualquiera de ellos y girando en el sentido de las manecillas del reloj. Al punto que determina el n-ésimo rayo llamémoslo A_n, para $n = 1, 2, 3, \ldots, 993$. Al punto que determina al n-ésimo rayo llamémoslo B_{n-993} para $n = 994, 995, \ldots, 1986$.

SOLUCION 28.



El arco de la circunferencia fija que está bajo uno de los pétalos de la epicicloide debe medir lo mismo que la longitud de la circunferencia que resbala: $2\pi r$. La epicicloide se cierra si un cierto múltiplo (entero) k de la longitud del arco es un múltiplo l (entero) de la longitud de la circunferencia fija, es decir:

$$k(2\pi r) = l(2\pi R),$$

de donde

$$kr = lR,$$

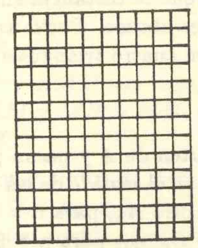
así

$$\frac{R}{r} = \frac{k}{l},$$

en donde k y l son enteros.

Por lo tanto, la condición necesaria y suficiente para que la curva se cierre es que la razón entre los radios sea un número racional.

SOLUCION 29.

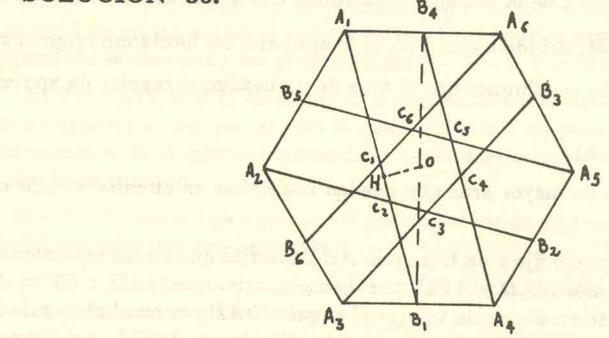


Si colocamos horizontalmente una orilla corta de la cuadrícula (es decir, si ponemos "parado" el rectángulo), obtenemos 10 columnas de 13 cuadros. Como sólo tenemos tres colores, en cada columna habrá al menos 5 cuadros de un mismo color, si designamos a cada columna con dicho color, de las 10 columnas habrá al menos 4 " del mismo color ". Es decir, para algún color, rojo por ejemplo, habrá cuatro columnas, cada una de las cuales tiene 5 cuadros rojos.

De aquí en adelante considérense solo estas cuatro columnas y supóngase que en las tres primeras no se forma un rectángulo como el requerido.

En la primera columna se tendrán al menos 5 renglones rojos. En la segunda columna se tendrá rojo en a lo más un renglón donde se tenía rojo en la primera columna y en cuatro renglones que antes no tenían rojo. En la tercera columna se puede tener rojo en dos de los renglones que ya tenían rojo (uno correspondiente a la primera columna y el otro correspondiente a la segunda columna) y en tres renglones más que anteriormente no tenían rojo. Así, se habrán cubierto 5+4+3=12 renglones con rojo en cada uno de ellos. Entonces en la cuarta columna habrá rojo en dos renglones comunes con alguna de las columnas anteriores.

SOLUCION 30.



Si L denota la longitud de cada lado del hexágono $A_1A_2\dots A_6$ los triángulos $\Delta A_1B_1B_4, \Delta A_2B_2B_5, \delta A_3B_3B_6, \Delta A_4B_4B_1, \Delta A_5B_5B_2$ y $\Delta A_6B_6B_3$ son rectángulos de catetos $\sqrt{3}L$ y $\frac{L}{2}$, por lo tanto son congruentes entre sí, entonces el ángulo $A_6A_1A_2$ es igual al ángulo entre las rectas A_1B_1 y A_2B_2, que denotaremos como $ang\ (A_1B_1, A_2B_2)$,

$$ang\ A_1A_2A_3 = ang\ (A_1B_1, A_2B_2)$$

$$ang\ A_2A_3A_4 = ang\ (A_3B_3, A_4B_4)$$

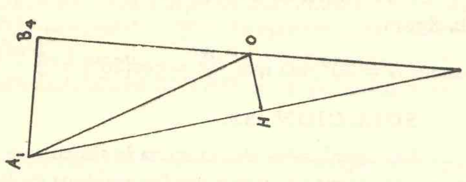
$$ang\ A_3A_4A_5 = ang\ (A_4B_4, A_5B_5)$$

$$ang\ A_4A_5A_6 = ang\ (A_5B_5, A_6B_6)$$

$$ang\ A_5A_6A_1 = ang\ (A_6B_6, A_1B_1)$$

y el hexágono (de lados) $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, A_5B_5, A_6B_6$ es semejante al hexágono $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, o sea, es regular.

Si O es el centro del hexágono original y H la proyección de O sobre A_1B_1, se tiene que $(A_1B_4)^2 + B_4O^2 = A_1O^2$.



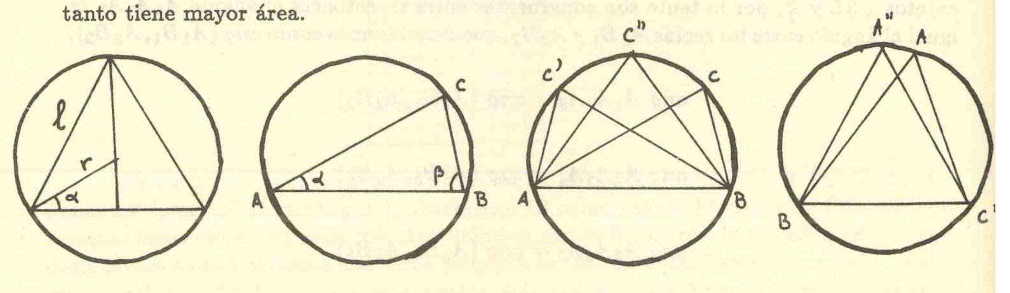
Como $A_1B_4 = \frac{L}{2}$ y $A_1O = L, B_4O = \frac{\sqrt{3}}{2}L$ y $B_4B_1 = \sqrt{3}L$, de donde $(A_1B_1)^2 =$

$\frac{L^2}{4} + 3L^2$ y $A_1B_1 = \frac{\sqrt{13}}{2}L$, de la semejanza entre los triángulos $\Delta A_1B_1B_4$ y ΔOHB_1 $\frac{OH}{\frac{L}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}L}{\frac{\sqrt{13}}{2}L}$ y $OH = \frac{OB_4}{\sqrt{13}}$; debido a que OB_4 es la apotema del hexágono original y OH la del hexágono pequeño concluimos que el área de un hexágono regular de apotema a es $2\sqrt{3}a^2$.

SOLUCION 31.

Los triángulos de mayor área que pueden inscribirse en círculos son los equiláteros.

Considere un círculo fijo y un triángulo ABC inscrito que no sea equilátero, este tiene entonces dos ángulos CAB y ABC, por ejemplo, tales que $CAB < 60^o < ABC$. Si tomamos C' un punto en el círculo tal que el ángulo $C'AB$ sea igual al ángulo ABC y C'' otro punto también en el círculo tal que el ángulo C'' sea de 60^o. Así C'' está en el arco CC' y como el segmento de recta CC' es paralelo al segmento AB entonces el triángulo ABC'' tiene mayor "altura" (la base es AB) que el triángulo ABC, y por lo tanto tiene mayor área.



Si el triángulo ABC'' no es equilátero, dejando fijos los puntos B y C'', es decir, tomando a BC'' como "base", se tiene de manera análoga a la anterior que hay un punto

A'' en el círculo tal que el ángulo $A''BC''$ mide 60^o y el triángulo $A''BC''$ tiene mayor área que el triángulo ABC''. Pero el triángulo $A''BC''$ tiene dos ángulos de 60^o y por lo tanto, los tres, es decir, es equilátero.

Para contestar la segunda pregunta, dibujemos un triángulo equilátero como en la figura,

entonces $\alpha = 30^o$, así que $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(30^o) = \frac{\frac{l}{2}}{r}$.

SOLUCION 32.

Las igualdades del enunciado dicen que $xy + zw, xz + yw$ y $xw + yz$ son tres números consecutivos y por eso los residuos de la división entre tres deben ser distintos para cada una de las tres sumas. Analicemos las posibilidades para los residuos módulo 3 de x, y, z, w. Denotaremos con $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{w}$ a los residuos respectivos:

i) $\overline{x} = \overline{y} = 0$ implica que $xz+yw, xw+yz$ son ambos divisibles entre 3 y entonces no pueden ser consecutivos; $\overline{x} = \overline{z} = 0$ también es imposible porque $xy + zw, xw + yz$ serían ambos divisibles entre 3 y no podrían diferir en 2; $\overline{x} = \overline{w} = 0$ es imposibles pues $xy + zw, xy + zw$ serían ambos divisibles entre 3 y no podrían ser números consecutivos. Análogamente se descartan las posobilidades $\overline{y} = \overline{z} = 0, \overline{y} = \overline{w} = 0$ y $\overline{z} = \overline{w} = 0$.

ii) $\overline{x} = 0, \overline{y}, \overline{z}, \overline{w} \neq 0$; en este caso el residuo de cada suma depende del sumando en que no aparece x: zw, yw, yz. No es posible $\overline{y} = \overline{z} = \overline{w}$, pues entonces el residuo de las tres sumas sería el mismo y no podrían ser números consecutivos, por lo tanto los casos restantes son dos:

$\overline{y} = 1, \overline{w} = \overline{z} = 2$, que obliga a yw, yz a dejar ambos residuo 2 y entonces $xz + yw, xw + yz$ no pueden ser números consecutivos;

$\overline{y} = 2 = \overline{z}, \overline{w} = 1$ implica que yw, yz dejan ambos residuo 2 y entonces $xz + yw, xw + yz$ no pueden ser números consecutivos.

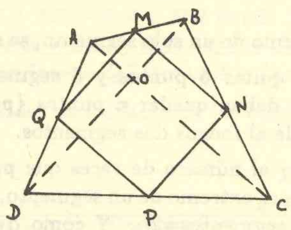
iii) Supongamos entonces que todos los residuos son 1 ó 2; no es posible que todos sean 1 o todos sean 2 pues entonces las tres sumas dejarían el mismo residuo (2 en el primer caso, 1 en el segundo) y eso es imposible para números consecutivos. Analicemos los casos siguientes :

$\overline{x} = 1, \overline{y} = \overline{z} = \overline{w} = 2$: xy deja residuo 2, zw deja residuo 1, por lo que $xy + zw$ deja residuo 0, pero lo mismo ocurre con $xz + yw$ (pues xz deja residuo 2, yw deja residuo 1) y entonces no pueden ser números consecutivos;

$\overline{x} = \overline{y} = 1, \overline{z} = \overline{w} = 2$: ahora las sumas que dejan el mismo residuo son $xz + yw, xw + yz$ (residuo 0 en ambos casos), y eso da la imposibilidad;

$\overline{x} = \overline{y} = \overline{z} = 2, \overline{w} = 2$ logra que xy, xz dejen residuo 1 en tanto que zw, yw dejan residuo 2 y por lo tanto $xy + zw, xz + yw$ dejan residuo 0 ambos, lo cual es imposible.

SOLUCION 33.



(1) Por ser M y Q los puntos medios de AD y AB los triángulos AMQ y ABD son semejantes, de donde se tiene que QM es paralelo a BD, de manera análoga se tiene que PN es paralelo a BD, así que QM es paralelo a PN. Análogamente se prueba QP es paralelo a MN y por lo tanto el cuadrilátero $MNPQ$ es un paralelogramo.

(2)

a.- $MNPQ$ será rectángulo si el ángulo QMN es de 90^o. Como QM es paralelo a DB y MN es paralelo a AC, la condición que el ángulo QMN sea recto es equivalente a que las rectas AC y BD formen un ángulo igual a 90^o. Es decir, a que las diagonales deben ser perpendiculares una a otra.

b.- $MNPQ$ será rombo si QM es igual a MN y como QM es igual a $\frac{1}{2}BD$ y MN es igual a $\frac{1}{2}AC$, la condición es que BD sea igual a AC, es decir, las diagonales deben ser congruentes.

c.- Como un cuadrado tiene sus cuatro ángulos rectos (condición de rectángulo) y sus cuatro lados congruentes (condición de rombo), $MNPQ$ será cuadrado si satisface a.- y b.- simultáneamente : las diagonales deben ser perpendiculares y congruentes.

SOLUCION 34.

Puesto que con 7 personas se forman exactamente 21 parejas, alguno de los tres temas es tratado al menos por 7 parejas. Podemos entonces reducir el problema de la siguiente manera:

Si entre siete personas hay siete o más parejas que se cartean, para algún entero positivo $N > 2$, hay n personas $a_1, a_2, \ldots, a_n$ que se cartean: a_1 con a_2, a_2 con a_3, ... , a_{n-1} con a_n y a_n con a_1.

Si representamos a cada una de las siete personas con un punto en el plano y el hecho de que dos personas se carteen con el segmento que une los puntos correspondientes, la solución del problema es consecuencia de lo siguiente:
Si se tienen 7 puntos en el plano y 7 segmentos con extremos en dichos puntos, entonces necesariamente se tiene un polígono cerrado.

Para demostrar esta última aseveración, redúzcase el número de puntos y segmentos aplicando tantas veces como sea posible cualquiera de los dos procedimientos siguientes:

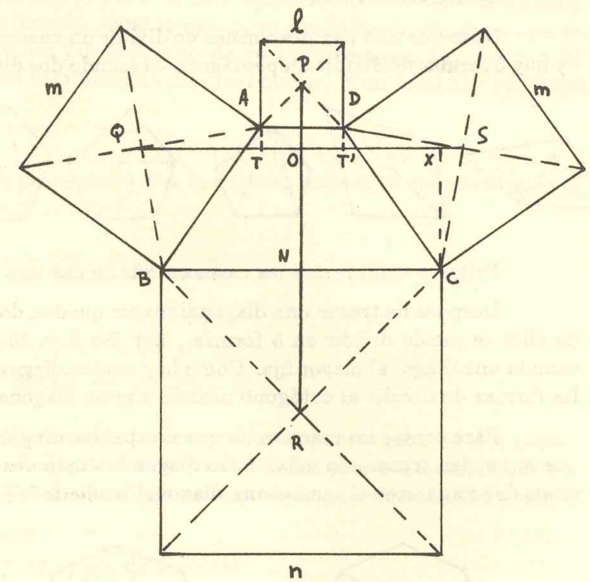
i) Si un punto no es extremo de ningún segmento, se suprime el punto y un segmento cualquiera.

ii) Si un punto es extremo de un solo segmento, se suprimen dicho segmento y el punto.

No es posible quitar 5 puntos y 5 segmentos ya que quedarían 2 puntos y 2 segmentos, entonces deben quedar n puntos $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ y n segmentos y cada punto como extremo de al menos dos segmentos.

Si llamamos α_1 al número de veces que p_1 es extremo de un segmento, α_2 al número de veces que p_2 es extremo de un segmento, etc., se tiene que $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n =$ 2 veces el número de segmentos$=2n$. Y como $\alpha_1 \geq 2, \alpha_2 \geq 2, \ldots, \alpha_n \geq 2$ entonces $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$. Es decir, cada punto es extremo de exactamente dos segmentos, y entonces si partimos de un segmento siguiendo otro segmento llegamos a otro punto del cual podemos salir sin regresarnos por un un solo segmento, que lleva a otro punto del cual también podemos salir (sin regresarnos) por un solo segmento, etc., hasta que necesariamente cerremos un polígono.

SOLUCION 35.



Si A, B, C, D son los vértices del trapecio y P, Q, R, S los centros de los cuadrados. (*i*) PR es perpendicular a QS porque de la simetría de la figura se obtiene que son iguales los ángulos QOR y ROS, donde O es la intersección de PR y QS. (*ii*) PR is igual a QS porque: $PR = PL + LO + ON + NR$ donde L es la intersección de PR y AD y N es la intersección de PR y BC, y $QS = QT + TO + OT' + T'S$ (donde T y T' son los pies de las perpendiculares a QS desde A y D respectivamente).

Si l, m y n son las longitudes de los lados de los cuadrados de centro P, Q(ó S) y R respectivamente, entonces

$$PL = \frac{l}{2}; \quad LO = \frac{m}{2}\sqrt{2}; \quad \text{sen}(\text{ángulo}DST); \quad NR = \frac{n}{2}$$

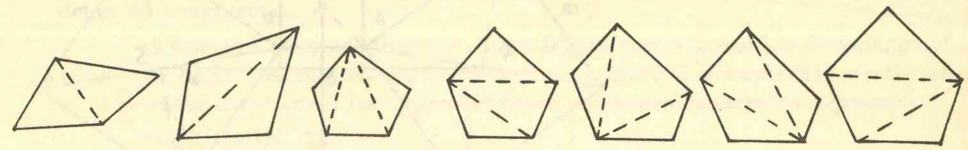
y $ON = \frac{m}{2}\sqrt{2}\text{sen}(\text{ángulo}T'SC) = \frac{m}{2}\sqrt{2}\cos(\text{ángulo}DST')$ pues DS y SC son perpendiculares; $QT = T'S = \frac{m}{2}\sqrt{2}\cos(\text{ángulo}DST')$, $TO = T'O = \frac{l}{2}$.

Como $PL = OT$ y $ON = QT$, sólo falta comprobar que $LO + NR = T'S + OT'$. Si X es el pie de las perpendiculares de C a QS: $OT' + T'S = OX + XS$, $OX = \frac{n}{2} = MR$; $XS = LO$ porque $LO = DT'$ y los triángulos $DT'S$ y SXC son congruentes pues DT' es perpendicular a SC y $T'S$ es perpendicular a XC y $DS = SC$.

Por lo tanto $OX + XS = NR + LO$.

SOLUCION 36

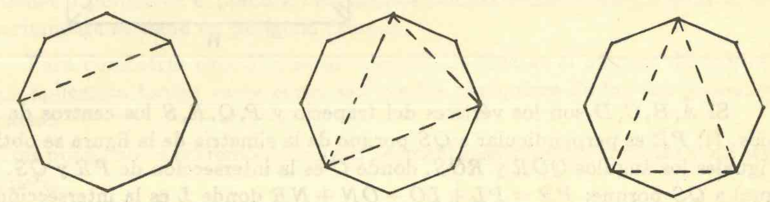
Note que sólo hay dos formas de dividir un cuadrilátero - trazando una diagonal - y hay 5 formas de dividir un pentágono -trazando dos diagonales- por un mismo vértice



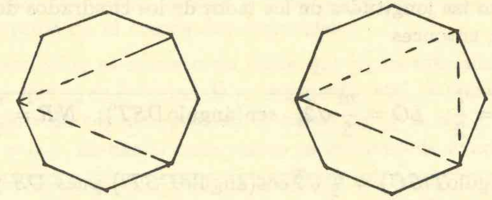
Primero contaremos los casos en que se usa una diagonal mayor.

Después de trazar una diagonal mayor quedan dos pentágonos y como cada uno de ellos se puede dividir en 5 formas , hay $5 \times 5 = 25$ formas de dividir al octágono usando una diagonal mayor fija. Como hay cuatro diagonales mayores, son $4 \times 25 = 100$ las formas de dividir al octágono usando alguna diagonal mayor.

Para contar los casos en los que no aparece ninguna diagonal mayor, observemos que se pueden trazar a lo más cuatro diagonales menores sin cruzarse, entonces en estos casos debe aparecer al menos una diagonal mediana



y ésta divide al octágono en un cuadrilátero y un hexágono. Dicha diagonal, para completar un triángulo en el hexágono necesita otra diagonal mediana.



En conclusión, cada división sin diagonal mayor utiliza las dos diagonales menores que pasan por un mismo vértice.

Después de trazar las dos diagonales medianas que pasan por un mismo vértice, el octágono queda dividido en tres cuadriláteros, y para concluir una división del octágono sin usar ninguna diagonal mayor, el cuadrilátero que queda comprendido entre las diagonales medianas sólo se puede dividir en una forma, y cada uno de los otros cuadriláteros se puede dividir de dos formas, es decir, la división se puede concluir de $2 \times 2 = 4$ formas; como lo mismo se puede hacer con cada una de las parejas de diagonales medianas por cada uno de los ocho vértices, hay $8 \times 4 = 32$ formas de dividir el octágono sin usar ninguna diagonal mayor. Y en total hay 100×132 formas de dividir al octágono.

SOLUCION 37

Sea m la longitud de la hipotenusa y n la del otro cateto, se tiene entonces la siguiente ecuación:

$$n^2 + 1988 = m^2$$

de aquí se deduce que:

$$1988 = (m+n)(m-n)$$

Estos dos factores tienen la misma paridad y como el producto es par, los dos tienen que ser pares y como $1988 = 4 \cdot 7 \cdot 71$, las únicas posibilidades para los factores son 2 y $2 \cdot 7 \cdot 71$ o $2 \cdot 7$ y $2 \cdot 71$. Cada una de estas opciones genera una solución: 496 y 498 ó 64 y 78.

LECTURAS RECOMENDADAS

1.- Kasner & Newman. *Matemáticas e Imaginación.*
Editorial CECSA,1973.

2.- Lidski,V. et al. *Problemas de Matemáticas Elementales.*
Editorial MIR, Moscú, 1978.

3.- Vasiliev & Gutemájer. *Rectas y curvas.*
Editorial MIR, Moscú.

4.- Vilenkin, N. *¿ De cuántas formas ?.*
Editorial MIR, Moscú.

5.- Lecciones Populares de Matemáticas. Varios títulos de diversos autores.
Editorial MIR, Moscú.

6.- Temas Matemáticos. Varios títulos de diversos autores.
Editorial Limusa-Wiley.

7.- Niven & Zuckerman. *Introducción a la Teoría de los Números, Caps. I y II.*
Editorial Limusa-Wiley.

8.- Jean-Pierre Alem. *Nuevos juegos de ingenio y entretenimiento matemático.*
Editorial GEDISA.