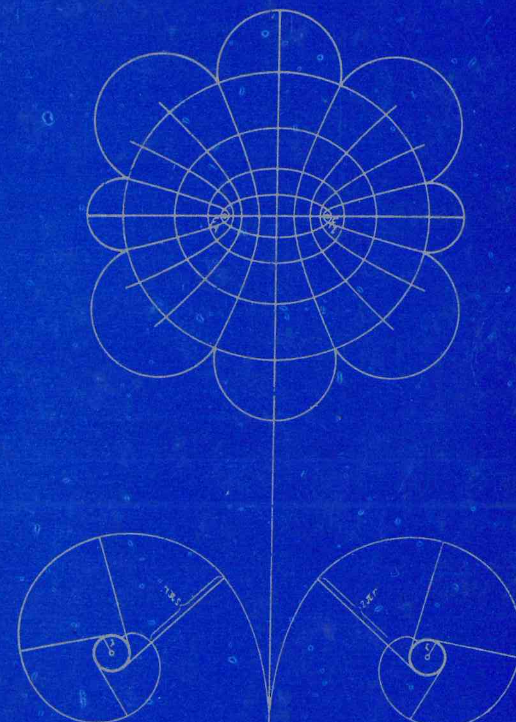
PROBLEMAS PARA LA

4a. Olimpiada de MATEMATICAS



Javier Alfaro
Alejandro Bravo
Marcela González
Alejandro Illanes
Ma. Luisa Pérez Seguí
Hugo Rincón
Eduardo Rivera

1990

SEP-SESIC
DGICSA

SOCIEDAD
MATEMATICA
MEXICANA

PATROCINADORES:

S.E.P.
U.N.A.M.
U.A.M.
C.O.N.A.C.Y.T.
GOBIERNO DEL ESTADO DE GUANAJUATO
UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO
CIMAT
SISTEMA INTEGRAL PARA EL DESARROLLO INTEGRAL DE LA FAMILIA (DIF)
Y CON LA COLABORACION DE INTEGRACION Y PROTECCION (AGENTE DE SEGUROS, S.A. DE C.V.)

Comité Organizador

Javier Alfaro
Carlos Bosch
Claudia Gómez
Marcela González
Alejandro Illanes
Ma. Luisa Pérez Seguí
Raúl Rueda
Renata Villalba

PRESENTACION

Estamos ahora iniciando la 4^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Al igual que en años pasados, editamos un folleto de orientación para los alumnos que se inscriben a este concurso.

En la sección 1 del folleto presentamos algunos problemas tipo con la intención de señalar el nivel que debe tener un estudiante en las primeras etapas de la olimpiada (concursos estatales y concurso nacional). Están incluidos en ésta los siguientes exámenes de 1989: un examen inter CCH, parte del examen de Jalisco, el examen del D. F. y el examen nacional. En la sección 2 proponemos soluciones para los problemas de la primera sección. En la sección 3 enunciamos los problemas correspondientes al examen de la Olimpiada Internacional de Matemáticas 1989, así como el examen que sirvió para determinar la delegación mexicana 1990. En vista de que estos requieren de técnicas matemáticas más elaboradas, no incluimos soluciones para ellos.

Para resolver la mayoría de los problemas de la sección 1, no necesitas tener conocimientos más allá de los que se adquieren normalmente en 3^{ero} de secundaria o 1^o de preparatoria (o sus equivalentes); más bien necesitas una buena dosis de ingenio e imaginación. Por otro lado, una parte del lenguaje y de los conocimientos que se manejan en ellos podrían parecerte poco familiares; te recomendamos que para aclarar tus dudas consultes los libros propuestos en la bibliografía, así como el apéndice sobre congruencias (técnica útil en los problemas sobre divisibilidad de números enteros).

Distintas etapas en la Olimpiada

La primera etapa corresponde a los concursos estatales. En cada uno de los estados de la República se seleccionan 6 alumnos, y en el D. F. se eligen 10. Para que te des una idea de cómo puedes calificar en estos concursos te diremos que el año pasado en el examen del D. F. los alumnos que resolvieron 3 de un total de 4 problemas calificaron para el concurso nacional. Desde luego esta escala varía año con año y de estado a estado.

La segunda etapa es el concurso nacional. Durante una semana se concentran todos los ganadores de los concursos estatales para presentar dos exámenes y de ellos elegir alrededor de 15 alumnos. En 1989 los que obtuvieron más de 25 puntos de un total de 60 calificaron. A principios de 1990 se reunió a los 16 alumnos ganadores en 2 periodos de 2 semanas cada uno en los que se les dio entrenamiento.

La última etapa a nivel nacional consiste en la aplicación de 3 exámenes para elegir a los 6 representantes de México a nivel internacional. En 1990 la delegación completa (6 alumnos) representará a México en la XXXI Olimpiada Internacional en la ciudad de Pekín, China. Los 4 mejores de la delegación también van a representar a México en la V Olimpiada Iberoamericana en Valladolid, España. En 1991 la Olimpiada Internacional se celebrará en Suecia. Hasta la fecha no sabemos la sede de la VI Olimpiada Iberoamericana.

Actuación de los equipos mexicanos en las Olimpiadas Internacionales

año	ciudad	no. de países	lugar de México
1981	Washington, EUA	27	27
1987	La Habana, Cuba	42	40
1988*	Canberra, Australia	49	37
1989*	Braunschweig, R. F. A.	50	31

* Las delegaciones mexicanas se formaron con los alumnos ganadores de la 1ª y 2ª Olimpiadas Mexicanas de Matemáticas.

Por lo que respecta a las Olimpiadas Iberoamericanas, México sólo ha participado en la 4ª que se celebró en la Habana, Cuba en 1989. En ésta obtuvo el 3er lugar de un total de 13 países.

Si tienes alguna sugerencia escríbenos a:

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Sociedad Matemática Mexicana
Apartado Postal 70-450
México, D. F., 04510

Te invitamos a que nos envíes problemas de creación tuya o de tus amigos y maestros; los mejores problemas se incluirán en el próximo folleto.

Las siguientes instituciones con su generoso patrocinio hicieron posible la realización de la 3ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

Universidad Nacional Autónoma de México
Secretaría de Educación Pública
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología
Gobierno del Estado de Puebla

Universidad Autónoma de Puebla

Universidad Autónoma Metropolitana

Integración y Protección (Agente de Seguros S.A. de C.V.)

También contamos con el apoyo de las siguientes dependencias:

Centro Universitario de Comunicación de la Ciencia

Centro Vacacional Metepec

Coordinación de la Investigación Científica

Dirección General de Investigación Científica y Superación Académica de la Subsecretaría de Educación Superior e Investigación Científica

Facultad de Ciencias

Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas

Instituto de Matemáticas

Jefatura de Servicios de Turismo Social de la Subdirección General de Prestaciones Sociales del Instituto Mexicano del Seguro Social

Universidad de Guadalajara

Universidad Pedagógica Nacional

Subsecretaría de Educación Media

Finalmente queremos hacer una mención especial a la valiosa cooperación prestada por muchas personas que no sería posible mencionar sin hacer omisiones; sin su esfuerzo y entusiasmo no se podrían llevar a cabo las olimpiadas.

El Comité Organizador.

Sección 1. PROBLEMAS.

1. Probar que el número $\underbrace{1\cdots1}_{2r\text{ cifras}} - \underbrace{2\cdots2}_{r\text{ cifras}}$ es un cuadrado perfecto para toda r.

2. Sea ABC un triángulo acutángulo. Para cada punto P dentro o en la orilla de ABC, trácense las perpendiculares X_P, Y_P y Z_P a los lados BC, AC y AB, respectivamente. ¿En qué punto P, la suma $X_P + Y_P + Z_P$ alcanza su máximo?.

3. Considérense los 36 vértices de una cuadrícula perfecta de 6×6. Utilizando éstos como vértices de triángulos no degenerados, ¿cuántos triángulos distintos se pueden formar?

4. Decir cuántos números enteros positivos hay menores que 1 000 000 que tengan entre sus dígitos al menos dos unos seguidos.

5. Encontrar dos enteros positivos a y b que cumplan las condiciones $a + b = 1989$ y $[a, b] = 108\ 900$. [Aquí $[a, b]$ es el mínimo común múltiplo de a y b].

6. Hallar el menor entero positivo r con la propiedad siguiente: Si $n \geq r$, entonces n se puede escribir en la forma $2a + 5b$, con a y b enteros positivos.

7. Considérese un tetraedro cualquiera con vértices A, B, C y D. Sean M, N, R y S los puntos medios de los segmentos AD, CB, AB y DC, respectivamente. Probar que los segmentos MN y RS se intersectan y además se cortan por la mitad.

8. En cierta novela de ciencia ficción se describen personajes que, si bien son inmortales, su forma y color varía día con día. Dichos personajes son de tres colores: rojo, azul y verde. De ellos algunos son de forma esférica y otros de forma piramidal. Día con día el 80% de los rojos se convierte en azul; el 80% de los azules se vuelven verdes, y el 80% de los verdes, en rojos. También ellos mismos varían de forma diariamente: el 40% de los esféricos pasan a ser piramidales y, a su vez, el 40% de los piramidales se convierten en esféricos. Supóngase que cierto día la distribución de población es como se muestra en la siguiente tabla:

	Rojos	Azules	Verdes
Esféricos	6000	5000	3000
Piramidales	9000	10000	4000

¿Cuántos personajes azules esféricos habrá al día siguiente? (Cabe aclarar que todas las mutaciones ocurren en forma homogénea; es decir, por ejemplo, el 80% de los rojos esféricos cambiará su color cada día y lo mismo ocurrirá con el 80% de los rojos piramidales.)

9. Dado un número entero a entre 1 y 100 000 súmense sus cifras. El resultado será otro número entero al que se le repetirá la operación hasta lograr un dígito llamado $f(a)$. [Ejemplo: si $a = 8240$, entonces $f(a) = 5$ pues $8 + 2 + 4 + 0 = 14$ y $1 + 4 = 5$.] Constrúyase también un número $g(a)$ siguiendo el procedimiento siguiente: Considérese primero la suma de los dígitos que aparecen en lugar impar en la expresión decimal de a (contando desde la derecha), y a esta suma réstesele la suma de los dígitos en los lugares pares. Hay tres posibilidades:

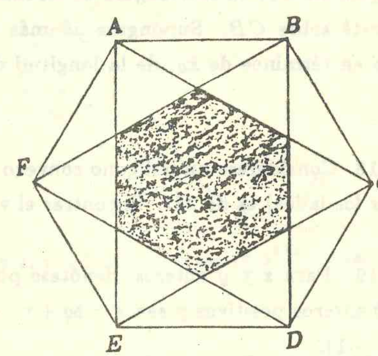
(i) El número obtenido está entre 0 y 10. En este caso $g(a)$ será ese número.

(ii) El número es mayor que 10. En este caso se le aplica al número obtenido el procedimiento desde el principio.

(iii) El número es negativo. En este caso súmese 11 al resultado, y la cantidad obtenida será $g(a)$.

[Ejemplo: Si $a = 71\,839$, en el primer paso del procedimiento tendremos $(9+8+7)-(3+1) = 20$. Estamos en el segundo caso así que a 20 le tenemos que aplicar el procedimiento: $0 - 2 = -2$. Aquí estamos en el tercer caso, así que $g(a) = -2 + 11 = 9$.].
¿Para cuántos números entre 1 y 100 000 se tendrá que tanto $f(a)$ como $g(a)$ valen 1 ?

10. Supóngase que un hexágono regular $ABCDEF$ tiene área 1989. Trácense líneas uniendo los vértices alternadamente (como en el dibujo). Con las intersecciones de éstas se formará un hexágono en el interior (sombreado). Calcular el área del nuevo hexágono.



11. Repartir los números del 10 al 1000 en 5 listas de tal forma que las sumas de los números de cada lista sean todas iguales.

12. ¿De cuántas maneras se puede escribir el número 20 como suma de potencias de 2 (no necesariamente distintas)? [Ejemplo: El número 5 se puede escribir de 4 maneras como suma de potencias de 2: $5 = 4+1 = 2+2+1 = 1+1+1+1+1$.]

13. Se tienen n focos numerados del 1 al n. Supóngase que están todos apagados y que están conectados cada uno con un apagador. Una sucesión de n personas va apagando y prendiendo los focos según la siguiente regla: la primera persona cambia de posición todos los apagadores; la segunda cambia la posición de los apagadores 2, 4, 6, 8,...; la tercera cambia la posición de los apagadores 3, 6, 9, 12,...; así sucesivamente, hasta la última persona que sólo cambia la posición del apagador n. ¿Qué focos quedan prendidos al final?

14. Sea ABC un triángulo acutángulo. Inscríbase un cuadrado $EFGH$ en el triángulo de tal manera que G y H estén sobre AB, E esté sobre AC y F esté sobre CB. Calcular el lado l del cuadrado en términos de la longitud de AB y de h, la altura por C del triángulo ABC.

15. Probar que si n es un entero positivo tal que el menor número primo p que lo divide es mayor que $\sqrt[3]{n}$ entonces $\frac{n}{p}$ es primo.

16. ¿Cuántos triángulos rectángulos se pueden construir de tal manera que su área sea menor o igual que 26 950, uno de los catetos mida 5 y el otro cateto tenga medida un divisor de 26 950?

17. Sea ABC un triángulo acutángulo y sea k_0 un número real positivo. Inscríbase un rectángulo $EFGH$ en el triángulo de tal manera que H y G estén sobre AB, E esté sobre AC y F esté sobre CB. Supóngase además que $HG = k_0$. Calcular las longitudes del rectángulo en términos de k_0, de la longitud de AB y de h, la altura por C del triángulo ABC.

18. Considérese un polígono convexo de n lados en el que el número de diagonales (sin contar los lados) es de 252. Encontrar el valor de n.

19. Para x y y enteros, denótese por (x, y) el máximo común divisor de x y y. Sean a y b enteros positivos y sea $a = bq + r$, con $0 \leq r < b$. Probar que $(2^a - 1, 2^b - 1) = (2^b - 1, 2^r - 1)$.

20. La sucesión de Fibonacci $f_1, f_2, f_3, \ldots$ se define como sigue: $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ y, para $n \geq 3$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Probar que 9 divide a una infinidad de términos de la sucesión de Fibonacci.

21. Probar que si en un triángulo rectángulo los lados a, b y c son números enteros, entonces el producto abc es múltiplo de 30.

22. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_6$ los vértices consecutivos de un hexágono convexo H en que los lados opuestos son iguales y paralelos. Probar que el área del triángulo $A_2A_4A_6$ es la mitad del área de H.

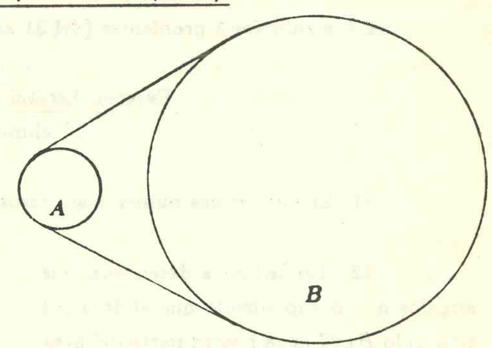
23. Demostrar que entre los números del 1 al n, la cantidad de ternas en progresión geométrica con razón entera mayor que 1 es menor o igual que n. [Una progesión geométrica es una sucesión de la forma $m, rm, r^2m, r^3m, \ldots$; la razón de la progresión es r. En el problema se pide encontrar el número de parejas de enteros r, m para los cuales $m, rm, r^2m \in \{1, 2, \ldots, n\}$.]

Los siguientes 7 problemas (del 24 al 30) corresponden al

2do Concurso de Matemáticas Intra–CCH.

(Categoría individual; eliminatoria; 1989).

24. En la figura se muestra un sistema de dos poleas A y B enlazadas por una banda. Supóngase que el radio de A es de 10 cm y el de B es de 40 cm, y que la distancia entre los centros es de 60 cm. Calcular la longitud de la banda.



25. Si un número tiene 221 cifras y el producto de éstas es 3^{442}, ¿cuál es la suma de dichas cifras?

26. Encontrar todas las ecuaciones de la forma $x^2 + Bx + C = 0$, con $C \neq 0$, cuyas

raíces sean B y C.

27. Pedro le comenta a Juan: "He observado que si al cuadrado de mi edad le resto el producto de tu edad con la edad que yo tendré dentro de un año, el resultado es 18". ¿Qué edad tiene Pedro?

28. En un examen se plantearon 20 problemas. Por cada problema resuelto correctamente se otorgaron 8 puntos, y por cada problema resuelto incorrectamente, 5 puntos negativos; cada problema no resuelto recibió 0 puntos. Si Cristina recibió un total de 13 puntos, ¿cuántos problemas resolvió correctamente y cuántos incorrectamente?

29. Lon números enteros positivos a, b, c y d están en progresión aritmética (en ese orden). Demostrar que

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{d}}=\frac{3}{\sqrt{a}+\sqrt{d}}$$

[Una progresón aritmética es una sucesión de números de la forma x, $x+y$, $x+2y$, $x+3y$,...; por ejemplo la sucesión $10, 13, 16, 19, \ldots$ es una progresión aritmética.]

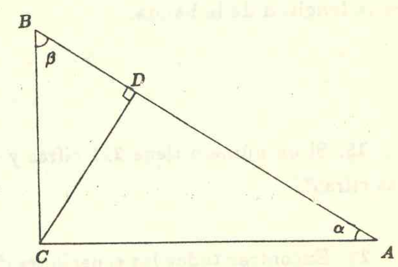
30. Dado un triángulo ABC y un punto P sobre AB hallar un punto Q sobre BC o sobre AC de tal forma que PQ divida al triángulo en dos figuras de la misma área.

Los siguientes 5 problemas (del 31 al 35) corresponden al

Examen Estatal de Jalisco, 1989.
(1^a eliminatoria).

31. Encontrar dos números sin ceros y cuyo producto sea 1 000 000 000.

32. En la figura determinar los ángulos α y β suponiendo que el área del triángulo BDC es la cuarta parte del área del triángulo BCA.



33. Supóngase que AB y CD son dos cuerdas perpendiculares de un círculo, y

sea E su punto de intersección. Supóngase que $AE = 2$, $EB = 6$ y $ED = 3$. Encontrar el diámetro del círculo.

34. Determinar cuántos ceros hay al final del número 1000!. [Si n es un entero positivo, $n!$ significa $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$.]

35. ¿De cuántas maneras se pueden escoger tres números distintos entre el 1 y el 100 de tal forma que la suma sea divisible por 3?

Los siguientes 4 problemas (del 36 al 39) corresponden al

Examen Regional del D. F., 1989.

Duración: 4:30 horas

36. Para $n = 2, 3, \ldots, 32$ defínase A_n como el producto de todos los múltiplos positivos de n menores o iguales que 1000. [Por ejemplo $A_3 = 3 \times 6 \times \cdots \times 999$.] ¿Cuál es el entero positivo más grande que divide a todos los números $A_2, A_3, \ldots, A_{32}$?

37. Sea b un número entero positivo cuyas últimas dos cifras sean 00. Llamemos D la suma de todos los divisores positivos de b distintos de b. Probar que $D > b$.

38. Sobre una mesa se encuentra una semiesfera (mitad de una esfera) de radio 1 con su parte plana hacia abajo. En forma circular, rodeando la semiesfera, se colocan 6 esferas de radio r de tal forma que cada esfera toca la semiesfera, la mesa y las dos esferas adyacentes. ¿Cuánto vale r?

39. Se van escribiendo en orden todos los enteros positivos hasta que entre todas las cifras de los números escritos se hayan usado un millón de unos. ¿Cuál es el último número que se escribe? [Por ejemplo, si la condición para terminar fuera usar cinco unos, el último número que se escribiría sería el 12 pues en la lista $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ se ocupan: un uno para el 1, uno para el 10, dos para el 11 y uno para el 12.]

Los siguientes 6 problemas (del 40 al 45) corresponden a la

3^{ra} Olimpiada Nacional de Matemáticas (1989).

Duración: 2 sesiones de 4:30 horas cada una

40. Considérese un triángulo ABC en el que la longitud de AB es 5, las medianas por A y por B son perpendiculares entre sí y el área es 18. Hallar las longitudes de los lados BC y AC.

41. Encontrar dos números enteros positivos a y b tales que:

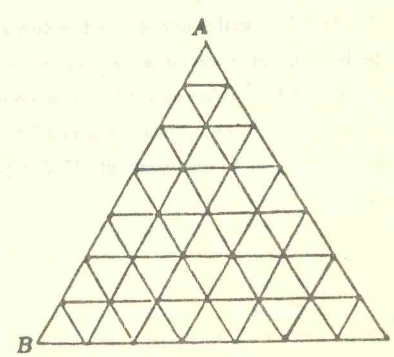
b^2 sea múltiplo de a,
a^3 sea múltiplo de b^2,
b^4 sea múltiplo de a^3 y
a^5 sea múltiplo de b^4,
pero b^6 no sea múltiplo de a^5.

42. Probar que no existe un número entero positivo de 1989 cifras que tenga al menos tres de ellas iguales a 5 y tal que la suma de todas las cifras sea igual al producto de las mismas.

43. Encontrar el entero positivo más pequeño n tal que si su expansión decimal es $n = a_m a_{m-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ y si r es el número cuya expansión decimal es $r = a_1 a_0 a_m a_{m-1} \cdots a_2 0$, entonces r es el doble de n.

44. Sean C_1 y C_2 dos círculos tangentes de radio 1 dentro de un círculo C de radio 2. Sea C_3 un círculo dentro de C tangente a cada uno de los círculos C, C_1 y C_2. Sea C_4 un círculo dentro de C tangente a C, C_1 y C_3. Demostrar que los centros de C, C_1, C_3 y C_4 son los vértices de un rectángulo.

45. Siguiendo las líneas de la figura, ¿cuántos caminos hay para ir del punto A al punto B que no pasen dos veces por el mismo punto y que sólo avancen hacia abajo y hacia los lados, pero no hacia arriba?



Sección 2. SOLUCIONES.

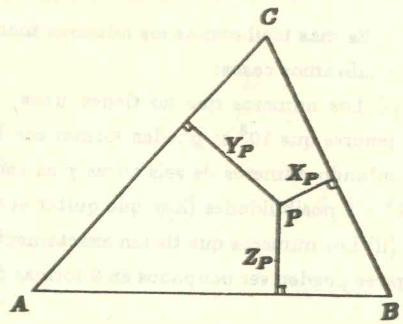
1. Tenemos $\underbrace{1\cdots1}_{2r\text{ cifras}}-\underbrace{2\cdots2}_{r\text{ cifras}}=\underbrace{1\cdots1}_{r\text{ cifras}}\overbrace{0\cdots0}^{r\text{ cifras}}+\underbrace{1\cdots1}_{r\text{ cifras}}-2(\underbrace{1\cdots1}_{r\text{ cifras}})=$

$=\underbrace{1\cdots1}_{r\text{ cifras}}(10^r+1-2)=\underbrace{1\cdots1}_{r\text{ cifras}}(10^r-1)=\underbrace{1\cdots1}_{r\text{ cifras}}(\underbrace{9\cdots9}_{r\text{ cifras}})=9(\underbrace{1\cdots1}_{r\text{ cifras}})^2$

$=(\underbrace{3\cdots3}_{r\text{ cifras}})^2$ que es un cuadrado perfecto.

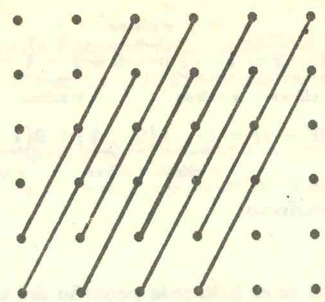
2. Supongamos que CB es el lado más pequeño del triángulo y llamemos h_A la altura por A. Como área(ABC) = área(ABP) + área(BCP) + área(ACP), tenemos que $(CB)h_A=(CB)X_P+(AB)Z_P+(AC)Y_P\geq(CB)X_P+(CB)Z_P+(CB)Y_P$, de manera que $(CB)h_A\geq(CB)(X_P+Y_P+Z_P)$. Así $h_A\geq X_P+Y_P+Z_P$.

Cuando el punto que tomamos para trazar las perpendiculares es el vértice A, tenemos que $X_A=h_A$, $Y_A=0$ y $Z_A=0$, de manera que $X_A+Y_A+Z_A=h_A+0+0\geq X_P+Y_P+Z_P$. Por tanto en A la suma es mayor o igual que en cualquier otro punto P y en consecuencia el punto en el que se alcanza el máximo de la suma es en el vértice opuesto al lado más pequeño del triángulo.



3. Las formas distintas de elegir tres puntos de los 36 disponibles son $C=\frac{36\cdot35\cdot34}{3\cdot2}$. Sin embargo una terna así elegida no formará triángulo si los puntos están alineados; por tanto habrá que ver las posibilidades de que estén alineados y restarlas de C.

Por cada renglón y columna la elección de 3 puntos en ella nos dará uno de los triángulos degenerados que queremos eliminar; éstos son $\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2}$ en cada renglón y en cada columna. Son 6 renglones y 6 columnas, así que debemos restar $12\cdot\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2}$ de C. Otras posibilidades de elegir puntos alineados son sobre las diagonales. Hay dos diagonales con 6 puntos (éstas contribuyen en $2\cdot\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2}$ triángulos degenerados); 4 diagonales de 5 puntos (contribución: $4\cdot\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2}$); 4 diagonales de 4 puntos (contribución: $4\cdot\frac{4\cdot3\cdot2}{3\cdot2}$) y 4 diagonales de 3 puntos (contribución: $4\cdot1$). Por último, hay que restar los triángulos degenerados que se formaron al pasar de un renglón a otro pero saltando columnas y viceversa; estos se pueden contar directamente: son 8 con inclinación /; análogamente hay 8 triángulos degenerados con cada una de las siguientes inclinaciones: \, ⁄ y ﹨. Por ejemplo:



La respuesta final es pues : $\frac{36\cdot 35\cdot 34}{3\cdot 2} - (12\cdot\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2} + 2\cdot\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2} + 4\cdot\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2} + 4\cdot\frac{4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2} + 4\cdot 1 + 32) = 6768$.

4. Es más fácil contar los números menores que 1 000 000 que no tienen dos unos seguidos. Analizamos casos:

(i) Los números que no tienen unos.- En este caso tenemos que contar cuántos números menores que 10^6 se pueden formar con los nueve dígitos restantes 0,1,2,...,9. Como estamos contando números de seis cifras y en cada cifra podemos elegir entre nueve dígitos, tenemos $9^6 - 1$ posibilidades (hay que quitar el 000 000).

(ii) Los números que tienen exactamente un 1.- Este 1 puede ocupar 6 lugares y los demás lugares pueden ser ocupados en 9 formas diferentes, de manera que hay $6\cdot 9^5$ números de estos.

(iii) Los números que tienen exactamente dos unos.- Estos dos unos tienen que estar separados. Las posibilidades para ellos es que ocupen los lugares: 1=1===, 1==1==, 1===1=, 1====1,=1=1==, =1==1=, =1===1, ==1=1=, ==1==1, ===1=1. Los otros cuatro lugares pueden ser llenados con 9 dígitos diferentes, así que hay $10\cdot 9^4$ de éstos.

(iv) Los números que tienen exactamente tres unos.- Las posibilidades para los tres unos son: 1=1=1=, 1=1==1, 1==1=1, =1=1=1, de modo que, en este caso, obtenemos $4\cdot 9^3$.

Ya no se pueden poner cuatro unos porque quedan dos juntos. Por tanto los números que no tienen dos unos seguidos son: $9^6 - 1 + 6\cdot 9^5 + 10\cdot 9^4 + 4\cdot 9^3 = 9^3(9^3 + 6\cdot 9^2 + 10\cdot 9^2 + 4) - 1 = (729)(729 + 486 + 94) - 1 = = 729(1309) - 1 = 954\ 260$. En conclusión hay $999\ 999 - 954\ 260 = 45\ 739$ números menores que 10^6 con dos unos seguidos.

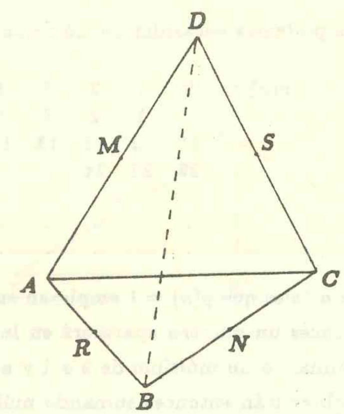
5. Vamos a probar que la única solución es cuando uno de los números es 1 089 y el otro es 900. Para x y y enteros positivos denotemos por (x,y) el máximo común divisor de x y y. Observemos que si $(x,y) = 1$, entonces $(x+y, xy) = 1$ (pues un divisor común de $a+b$ y ab también lo será de a y b). Hecha esta observación vamos a probar que $(a+b,[a,b])=(a,b)$. Sea $m=(a,b)$ y escribamos $a=mr$ y $b=ms$; entonces $(r,s)=1$ y por tanto $[r,s]=rs$. Tenemos entonces $(a+b,[a,b])=(m(r+s),m[r,s])=m(r+s,[r,s])=m(r+s,rs)=m$. Vamos a aplicar esto para encontrar los números a y b. Como $(a,b)[a,b]=ab$ y $(a+b,[a,b])=(a,b)=9$ tenemos que $9(108\,900)=ab=a(1989-a)=1989a-a^2$. Entonces $a^2-1989a+9(108\,900)=0$, de donde $a=900$ o $a=1089$, y con esto queda probada nuestra afirmación.

6. Vamos a ver que $r=11$. Primero observemos que 10 no se puede expresar en la forma $2a+5b$ con a y b enteros positivos. (Para convencernos de esto, notemos que b debe ser 1 o 2, pero en ninguno de estos dos casos es posible encontrar a.) Ahora tomemos $n\geq 11$.

Caso 1: n impar.- Escribamos $n=2m+1$ con $m\geq 5$; entonces $n-5=2m-4=2(2m-2)$; por tanto $n=n-5+5=2(m-2)+5$. Así $a=m-2$ y $b=1$.

Caso 2: n par.- Escribamos $n=2m$ con $m\geq 6$; entonces $n=2m-10+10=2(m-5)+5(2)$. Así $a=m-5$ y $b=2$.

7. Notemos que MS es paralela a AC y mide la mitad de AC. Lo mismo ocurre con RN. Por tanto MS y RN son paralelos y miden lo mismo. Esto implica que M, S, R y N están en un mismo plano y forman un paralelogramo, de manera que los segmentos MN y RS son las diagonales de un paralelogramo y ya se sabe que éstas se intersectan y además lo hacen en su punto medio.



8. Supongamos que de cierta forma y color hay una cantidad C de personajes. De éstos algunos permanecerán iguales, otros cambiaran sólo de color, otros sólo de forma y otros cambiarán tanto de forma como de color.

El número de los de C que quedan igual es $(.2)(.6)(C)$.

El número de los de C que cambian color es $(.8)(.6)(C)$.

El número de los de C que cambian forma es $(.2)(.4)(C)$.

El número de los de C que cambian color y forma es $(.8)(.4)(C)$.

Se nos pregunta cuántos azules esféricos habrá después de un día. Hay de varios tipos:

Los que permanecieron azules esféricos: $(.2)(.6)(5000)$.

Los que eran rojo-esférico y cambiaron color: (.8)(.6)(6000).

Los que eran azul-piramidal y cambiaron forma: (.2)(.4)(10,000).

Los rojo-piramidal que cambiaron color y forma: (.8)(.4)(9,000).

Sumando estas cantidades obtenemos 7 610, que es el resultado del problema.

9. Observemos que si vamos encasillando los números a según el valor de $f(a)$ estos van quedando distribuidos cíclicamente como sigue:

$f(a) =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	19	20	21	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Los números a tales que $f(a) = 1$ empiesan en 1 y después aparecen sumando múltiplos de 9 a 1.

Similarmente podemos encasillar los números a según el valor de $g(a)$:

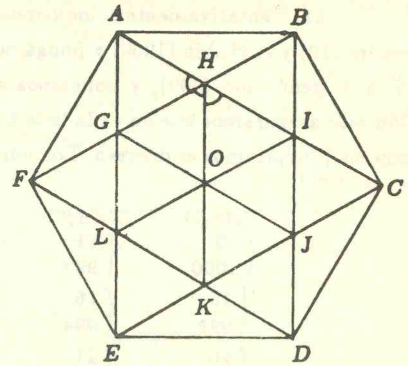
$g(a) =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	11	12	13	13	15	16	17	18	19	20	21
	22	23	24	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

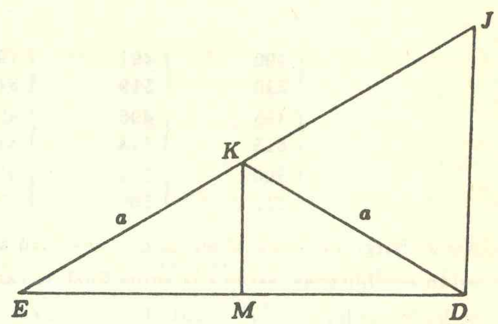
Los números a tales que $g(a) = 1$ empiesan en 1, y después aparecen sumando múltiplos de 11 a 1. Entonces un número aparecerá en la casilla del 1 de ambas clasificaciones cuando se obtenga sumando un múltiplo de 9 a 1 y a la vez sumando un múltiplo de 11 a 1. Estos números se obtendrán entonces sumando múltiplos de $[9, 11] = 99$ a 1, así que serán de la forma $1 + 99t$ con t entero. Ahora, $100\,000 \geq 1 + 99t \geq 1$ si y sólo si $t = 0, 1, 2, ..., 1010$. En conclusión, existen 1011 números con la propiedad (uno para cada t).

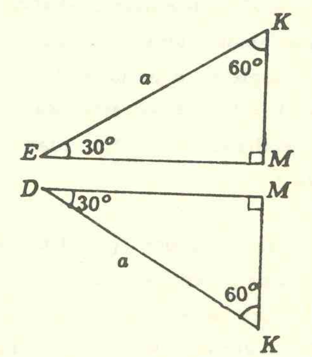
Nota: El problema podría resolverse también con técnicas de congruencias, utilizando que si la expresión decimal de a es $a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0$, entonces $a = a_0 + a_1 10 + \cdots + a_{n-1}10^{n-1} + a_n 10^n$. Luego como $10 \equiv 1 \pmod 9$, tenemos $a \equiv f(a) \pmod 9$, y como $10 \equiv -1 \pmod{11}$ tenemos $a \equiv g(a) \pmod{11}$. Así, los números a con la propiedad deseada son las soluciones de $a \equiv 1 \pmod 9$ y $a \equiv 1 \pmod{11}$ en $\{1, 2, \ldots, 100\,000\}$ y éstas son las soluciones de $a \equiv 1 \pmod{99}$ en $\{1, 2, \ldots, 100\,000\}$.

10. Demos nombres G, H, I, J, K, L a los vértices del nuevo hexágono (como en

el dibujo) y sea O el centro del hexágono. Unamos O con cada uno de los nuevos vértices. Por ser $GHIJKL$ un hexágono regular (la simetría de la construcción nos da esto), todos los triángulos interiores (OHI, OIJ, OJK, OKL, OLG, OGH) son equiláteros e iguales entre sí. Veamos ahora que el triángulo AGH es también igual a ellos. Tenemos que $\angle AHG + \angle GHO + \angle OHI = 180^o$ y, como $\angle GHO = \angle OHI = 60^o$, entonces $\angle AHG = 60^o$. Similarmente, $\angle AGH = 60^o$. Así, el triángulo AGH es equilátero, con un lado común con el triángulo GHO que también es equilátero; entonces son triángulos iguales. De esta forma vemos que todos los triángulos siguientes son iguales: AGH, BHI, CIJ, DJK, EKL, FLG, OHI, OIJ, OJK, OKL, OLG, OGH. Llamemos a a la longitud de sus lados. Ahora examinemos el triángulo EKD. Tenemos que $\angle EKD + \angle DKJ = 180^o$; pero $\angle DKJ = 60^o$, así que $\angle EKD = 120^o$. El triángulo EKD es isósceles, por tanto $\angle KDE = \frac{180^o - 120^o}{2} = 30^o$. Tracemos la bisectriz de $\angle EKD$ y sea M su intersección con el segmento ED. Entonces KM es también altura del triángulo (por ser este isósceles) y KM divide al triángulo EKD en dos triángulos iguales. Cortemos el triángulo EKM a lo largo de KM y juntemos los triángulos poniendo el lado EM del triángulo EKM junto al lado DM del triángulo DMK. Habremos formado así un triángulo igual a los de la lista de arriba. Por tanto el área del triángulo EKD coincide con el área de los de la lista. Lo mismo sucede con cada uno de los triángulos restantes: ELF, FGA, AHB, BIC y CJD.







Ahora, el hexágono interior abarca 6 triángulos, y el complemento (para completar el hexágono original) está formado por 12 triángulos, así que el área buscada es $\frac{1}{3} \cdot 1989 = 663$.

11. Tentativamente coloquemos los números en las listas como sigue: Tomemos el primero (10) y el último (1000) y pongámoslos en la primera lista, luego tomemos el segundo (11) y el penúltimo (999), y pongamos a ambos en la segunda lista, y así sucesivamente. (Con esto aseguramos que en cada lista haya una suma de 1010 cada vez que se agregan dos números.) Repitamos el proceso. Los números van quedando colocados como sigue:

Lista#1	*Lista*#2	*Lista*#3	*Lista*#4	*Lista*#5
$\left\{\begin{array}{l}10\\1000\end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{l}11\\999\end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{l}12\\998\end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{l}13\\997\end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{l}14\\996\end{array}\right.$
$\left\{\begin{array}{l}15\\995\end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{l}16\\994\end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{l}17\\993\end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{l}18\\992\end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{l}19\\991\end{array}\right.$
$\left\{\begin{array}{l}20\\990\end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{l}21\\989\end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{l}22\\988\end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{l}23\\987\end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{l}24\\986\end{array}\right.$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\left\{\begin{array}{l}490\\520\end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{l}491\\519\end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{l}492\\518\end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{l}493\\517\end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{l}494\\516\end{array}\right.$
$\left\{\begin{array}{l}495\\515\end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{l}496\\514\end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{l}497\\513\end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{l}498\\512\end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{l}499\\511\end{array}\right.$
$\left\{\begin{array}{l}500\\510\end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{l}501\\509\end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{l}502\\508\end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{l}503\\507\end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{l}504\\506\end{array}\right.$

Sin embargo podemos observar que nos faltó acomodar el 505. Hasta el momento las listas están equilibradas, así que la suma final de cada una de ellas será la suma que hasta ahora se ha formado, más $\frac{505}{5} = 101$. Fijémonos en la lista que tiene al 404 (que es la quinta pues las terminaciones 4 o 9 para los números hasta el 504 aparecen sólo en esa lista). Si en ella colocamos el 505 y le quitamos el 404, la lista 5 quedará completa. Ahora busquemos el 303. Este lo habíamos colocado en la lista 4, sustituyámoslo por el 404. Así la lista 4 quedará también completa. Repetimos el procedimiento: Sustituimos el 303 por el 202, que había quedado en la lista 3, así esta lista estará ya completa. Ahora sustituyamos el 202 por el 101, que estaba en la lista 2, quedando completa esta última. Finalmente coloquemos el 101 en la lista 1.

12. Llamemos $f(n)$ al número de formas en que el número n se puede expresar como suma de potencias de 2.

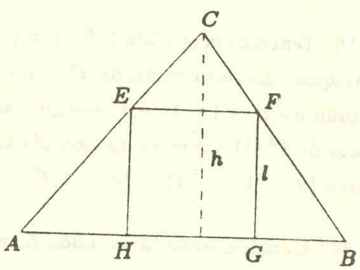
Afirmamos primero que $f(2m+1) = f(2m)$. Para ver esto consideremos una expresión de $2m$ en suma de potencias de 2: $2m = a_1 + a_2 + \ldots + a_r$; Entonces $2m+1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_r + 1$ que es una expresión de $2m+1$ en suma de potencias de 2. Recíprocamente, si $2m+1 = b_1 + b_2 + ... + b_s$, entonces por ser $2m+1$ impar, alguna de las b_i's debe ser 1, supongamos que ésta es b_s ; entonces $2m = b_1 + ... + b_{s-1}$. Hemos probado entonces que a partir de una expresión de $2m$ se puede construir una para $2m+1$, y que todas las expresiones de $2m+1$ se obtienen de una de $2m$; esto prueba lo afirmado.

Ahora vamos a probar que $f(2m) = f(2m-1) + f(m)$, Para ver esto analicemos una expresión de $2m$: $2m = a_1 + a_2 + ... + a_r$. Si alguna a_i es 1, la quitamos y obtenemos una expresión para $2m-1$. Si todas las a_i son mayores que 1, dividimos entre 2 y obtenemos entonces una expresión para m. Hemos probado que $f(2m) \leq f(2m-1) + f(m)$. Para ver la otra desigualdad, simplemente notemos que al sumar 1 a una expresión de $2m-1$ obtenemos una expresión para $2m$ y que al multiplicar por 2 una expresión de m obtenemos una para $2m$. Aplicando las dos formulas $f(2m+1) = f(2m)$ y $f(2m) = f(2m-1) + f(m)$ tenemos:

$f(1)=1$	$f(2)=2$	$f(3)=2$	$f(4)=4$	$f(5)=4$
$f(6)=6$	$f(7)=6$	$f(8)=10$	$f(9)=10$	$f(10)=14$
$f(11)=14$	$f(12)=20$	$f(13)=20$	$f(14)=26$	$f(15)=26$
$f(16)=36$	$f(17)=36$	$f(18)=46$	$f(19)=46$	$f(20)=60$

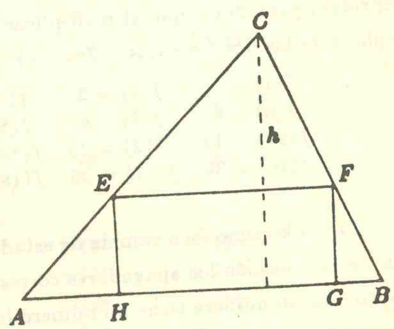
13. El k-ésimo foco cambia de estado cada vez que una persona con número divisor de k cambia de posición los apagadores correspondientes. Así, un foco queda prendido exactamente cuando su número tiene un número impar de divisores. Ahora, si descomponemos k como producto de potencias de primos distintos: $k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r}$, entonces los divisores de k son de la forma $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... p_r^{\beta_r}$ con $\beta_i \leq \alpha_i$ para toda i. Como para cada i las posibilidades para β_i de tal forma que $\beta_i \leq \alpha_i$ son $\alpha_i + 1$, entonces k tiene $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_r+1)$ divisores. Este número es impar si y sólo si cada α_i es par; esto es, si y sólo si, k es un cuadrado perfecto. Entonces los focos que quedan prendidos son exactamente aquéllos que tienen asignado un número cuadrado $1, 4, 9, 16, ...$

14. Basándonos en la notación como en el dibujo tenemos: área(ABC) = área(AHE) + l^2 + área(GBF) + área$(EFC) = \frac{(AH)l}{2} + l^2 + \frac{(GB)l}{2} + \frac{(h-l)l}{2}$. Así $AB \cdot h = AH \cdot l + 2l^2 + GB \cdot l + (h-l)l$ $= l(AH + l + GB) + hl = l(AB + h)$. Por tanto $l = \frac{AB \cdot h}{AB + h}$.



15. Supongamos que $\frac{n}{p} = rs$ con $r, s > 1$. Entonces, por ser p el menor primo divisor de n, tenemos $r, s \geq p$; de aquí que $n = prs \geq p^3$. Pero esto es imposible pues $p > \sqrt[3]{n}$ así que es un absurdo suponer que $\frac{n}{p} = rs$ con $r, s > 1$. Esto implica que $\frac{n}{p}$ debe ser primo.

16. Tenemos $\frac{5h}{2} \leq 26\,950 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11$. Así, $h \leq 2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11$. Por otro lado h debe ser un divisor de 26 950, así que $h = 2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot 7^\gamma \cdot 11^\delta$ con $\beta, \gamma \in \{0,1,2\}$ y $\alpha, \delta \in \{0,1\}$. Si fijamos $\beta \in \{0,1\}$, automáticamente cualquier elección de α, γ y δ nos dará la desigualdad $h \leq 2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11$ que queremos; en este caso tenemos $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ posibilidades. Si ponemos $\beta = 2$, vamos a ver qué posibilidades de α, γ y δ nos dan $2^\alpha \cdot 5^2 \cdot 7^\gamma \cdot 11^\delta \leq 2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11$. Si $\delta = 0$ entonces α y γ pueden tomar cualquier valor: $\alpha = 0, 1$ y $\gamma = 0, 1, 2$; esto nos da 6 posibilidades. Si $\delta = 1$ y $\gamma = 2$, queremos $2^\alpha \cdot 5 \leq 2^2$, así que $\alpha = 0$ (1 posibilidad). Si $\delta = 1$ y $\gamma = 0$ o 1, entonces $\alpha = 0$ o 1; es decir hay 4 posibilidades. En total, las posibilidades son $24 + 6 + 1 + 4 = 35$.



17. Basándonos en la notación dada por el dibujo tenemos: $\text{área}(ABC) = \text{área}(AHE) + EH \cdot HG + \text{área}(GBF) + \text{área}(EFC) = \frac{AH \cdot EH}{2} + EH \cdot HG + \frac{GB \cdot EH}{2} + \frac{HG(h-EH)}{2}$. Así $AB \cdot h = EH(AH + HG + GB) + HG \cdot h = EH \cdot AB + HG \cdot h = EH(AB + hk_0)$. Por tanto $EH = \frac{AB \cdot h}{(AB+hk_0)}$ y $HG = \frac{k_0 h \cdot AB}{(AB+hk_0)}$.

18. Dado cualquier vértice A del polígono éste se puede unir con cualquiera de los $n-1$ puntos restantes, obteniendo una diagonal o un lado. Como la diagonal (o lado) AB es la misma que BA y A se puede escoger de n formas, tenemos que el número de diagonales más el número de lados es $\frac{n(n-1)}{2}$. Por tanto el número de diagonales es $\frac{n(n-1)}{2} - n$. Así tenemos entonces que $\frac{n(n-1)}{2} - n = 252$, es decir, $n^2 - 3n = 504$. La única solución positiva de esta ecuación es $n = 24$.

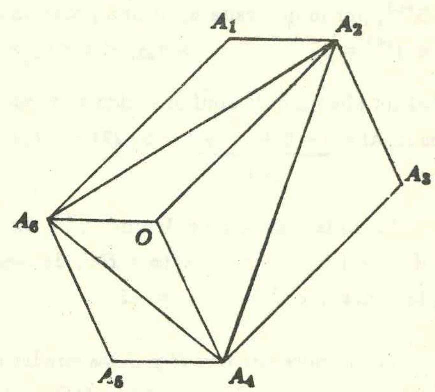
19. Tenemos la igualdad $2^a - 1 = (2^b-1)(2^{b(q-1)} + 2^{b(q-2)} + \dots + 2^b + 1)2^r + (2^r - 1)$, así que cualquier divisor común de $2^a - 1$ y $2^b - 1$ también dividirá a $2^r - 1$; es decir será divisor común de $2^b - 1$ y $2^r - 1$. Recíprocamente, los divisores de $2^b - 1$ y $2^r - 1$ también son divisores de $2^a - 1$ y, por tanto, son divisores comunes de $2^a - 1$ y $2^b - 1$. Hemos probado entonces que $(2^a - 1, 2^b - 1) = (2^b - 1, 2^r - 1)$.

20. Consideremos la sucesión formada por los residuos bajo la división por 9 de la sucesión de Fibonacci. Es decir, consideremos la reducción módulo 9 de la sucesión de Fibonacci. Observemos que se puede construir ésta tomando los dos primeros términos iguales a 1 y, a partir del tercero, sumando los dos residuos anteriores y considerando su residuo; en otras palabras, podemos construir la sucesión utilizando la misma regla que para

construir la sucesión de Fibonacci, pero haciendo las operaciones módulo 9. Así la sucesión es: $1,1,2,3,5,8,4,3,7,1,8,0,8,8,7,6,4,1,5,6,2,8,1,0,\ldots$; a partir de aquí se repite todo (pues $1+0=1$ y $0+1=1$) entonces en esta sucesión aparecen una infinidad de 0's; pero cada vez que aparezca 0 es porque 9 dividía al término correspondiente en là sucesión de Fibonacci, así que esto termina la demostración.

21. Supongamos que c es la hipotenusa. Por el teorema de Pitágoras, $c^2 = a^2 + b^2$. Vamos aprobar que 2, 3 y 5 son todos divisores de abc. Como 2, 3 y 5 no tienen factores comunes, esto implicará que 30 es divisor de abc. Si alguno de a o b es par, entonces ya tenemos que abc es par, así que supondremos que los dos a y b son impares; pero entonces a^2 y b^2 son impares así que $c^2 = a^2 + b^2$ es par. Esto implica que c lo es. Así, en cualquier caso, tenemos que abc es par. Para probar que abc es múltiplo de 3 y 5, haremos un razonamiento como arriba, utilizando el lenguaje de congruencias para simplificar. Notemos primero que si x es un entero y x es múltiplo de 3 entonces $x^2 \equiv 0 \pmod 3$; si x no es múltiplo de 3 entonces $x \equiv 1 \pmod 3$ o $x \equiv 2 \pmod 3$, pero en cualquiera de estos casos $x^2 \equiv 1$ (mod 3). Como antes, si 3 es divisor de a o de b, entonces ya tenemos automáticamente que 3 es divisor de abc, así que supongamos que ni a ni b son múltiplos de 3; entonces $a^2 \equiv 1 \equiv b^2 \pmod 3$, así que $c^2 = a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod 3$; pero esto es imposible pues, según vimos arriba, el cuadrado de un número no puede tener residuo 2. Esto prueba que a o b debe ser múltiplo de 3 y, por tanto, que abc lo es. Para ver que 5 es divisor de abc procederemos como arriba, observando en este caso que si x es entero, entonces $x^2 \equiv 0,1,4 \pmod 5$; así, si a y b no son múltiplos de 5, $c^2 = a^2 + b^2 \equiv 0,2,3 \pmod 5$. Pero 2 y 3 no pueden ser residuos módulo 5 de un número cuadrado, así que $c^2 \equiv 0 \pmod 5$ y, por tanto, c es múltiplo de 5 y entonces también lo es abc.

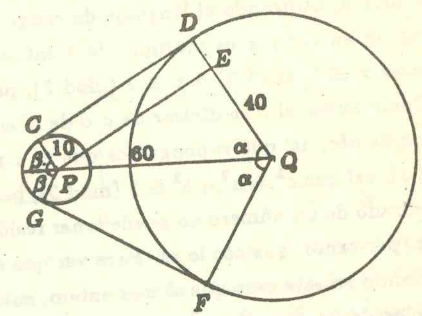
22. Hacia el interior de H tracemos un segmento por A_2 paralelo a A_1A_6 y con la misma longitud. Llamemos O al otro extremo de este segmento. Entonces A_1, A_2, O y A_6 forman un paralelogramo con diagonal A_2A_6. Así área$(A_1A_2A_6)$ = área(A_2OA_6). Similarmente área(OA_2A_4) = área$(A_2A_3A_4)$ y área(OA_4A_6) = área$(A_4A_5A_6)$. De aquí ya es claro que área$(H) = 2\cdot$área$(A_2A_4A_6)$.



23. Para un número cualquiera x denotemos por $[x]$ el mayor entero que es menor

o igual que x. [Por ejemplo $[3.7] = 3 = [3]$]. Para r fija vamos a examinar como debe ser m en términos de r para que $m, rm, r^2m \in \{1, 2, ..., n\}$. Es claro que los enteros m que sirven son los que satisfacen $1 \leq m \leq \frac{n}{r^2}$. Así, el número de ternas con razón r es $[\frac{n}{r^2}]$. Ahora veamos cómo debe ser r para que se pueda construir al menos una terna con esa razón: esto será cuando $[\frac{n}{r^2}] \geq 1$, es decir cuando $r^2 \leq n$. Así, el número T de ternas es $T = [\frac{n}{2^2}] + [\frac{n}{3^2}] + \cdots + [\frac{n}{k^2}]$, donde k es el mayor entero positivo tal que $k^2 \leq n$. Pero para $r = 2, 3, ..., k$ tenemos $\frac{1}{r^2} < \frac{1}{r(r-1)} = \frac{1}{r-1} - \frac{1}{r}$; así $T < n((1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \cdots + (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k})) = n(1 - \frac{1}{k}) < n$.

24. Sean P y Q los centros de A y B, respectivamente. En la figura C, D, F y G son puntos de tangencia y PE es paralela a CD; α y β son los ángulos marcados. Entonces CP y DQ son perpendiculares a CD; de aquí que el triángulo AEB es rectángulo y $\alpha = \beta$. Entonces $CD = PE = \sqrt{60^2 - 30^2} = 30\sqrt{3}$. Como $cos\alpha = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$, tenemos que $\alpha = 60^o$. De esta manera el arco mayor determinado por D y F mide $\frac{2}{3}$ del perímetro del círculo; entonces este arco mide $(\frac{2}{3})(80\pi)$. Similarmente, el arco pequeño determinado por C y G mide $(\frac{1}{3})(20\pi)$. Por tanto la banda mide $60\sqrt{3} + (\frac{1}{3})(180\pi) = 60(\sqrt{3} + \pi)$.



25. Supongamos que $a_1, ..., a_{221}$ son las cifras del número. Entonces $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_{221} = 3^{442}$, por lo que cada a_i es una potencia de 3 y $1 \leq a_i \leq 9$. Si, por ejemplo, $a_1 < 9$, entonces $3^{442} = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_{221} < 9 \times a_2 \times \cdots \times a_{221} \leq 9 \times \underbrace{9 \times \cdots \times 9}_{220} = 9^{221} = 3^{442}$, lo cual es un absurdo; de aquí que cada a_i tiene que ser igual a 9. Por tanto la suma de las cifras es igual a $\underbrace{9 + 9 + \cdots + 9}_{221} = 9 \cdot 221 = 1989$.

26. Si las raíces del polinomio $x^2 + Bx + C = 0$ son B y C, entonces $x^2 + Bx + C = (x - B)(x - C) = x^2 - (B + C)x + BC$, de manera que $B = -B - C$ y $C = BC$. Como $C \neq 0$, tenemos que $B = 1$ y $C = -2$.

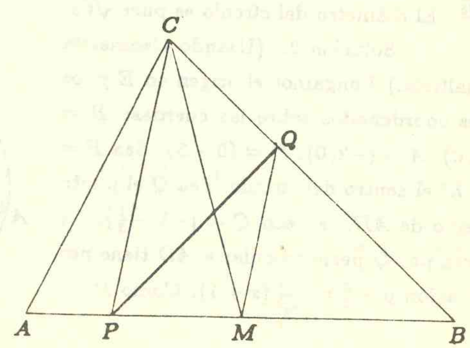
27. Denotemos por P y J las edades de Pedro y Juan respectivamente. La condición del problema implica que $P^2 - J(P + 1) = 18$. Entonces $P = \frac{J \pm \sqrt{J^2 + 4J + 72}}{2}$; pero estamos suponiendo que P y J son enteros positivos, así que la raíz debe ser exacta, es decir,

debe existir un entero $x \geq 0$ tal que $J^2+4J+72 = x^2$. Esto implica que $(J+2)^2 - x^2 = -68$, o, equivalentemente, que $(x - J - 2)(x + J + 2) = 68 = 2^2 \cdot 17$. Escribimos $d = x + J + 2$; entonces $\frac{68}{d} = x - J - 2$ y d es un divisor positivo de 68. Sumando y restando estas dos ecuaciones obtenemos $d+\frac{68}{d} = 2x$ y $d-\frac{68}{d} = 2J+4$. Entonces $x = \frac{(d+\frac{68}{d})}{2}$ y $J = \frac{(d-\frac{68}{d}-4)}{2}$. Ahora, los divisores de 68 son $1, 2, 4, 17, 34$ y 68; para $d = 1, 4, 17$ y 68, x no resulta entero; para $d = 2$, J no es positivo. Así, la única opción posible es $d = 34$ con lo que se obtiene $J = 14$ y $x = 18$. Entonces $P = \frac{(14\pm 18)}{2}$; pero P debe ser positivo así que $P = 16$. Por tanto Pedro tiene 16 años.

28. Llamemos a y b las cantidades de respuestas buenas y malas, respectivamente. Entonces $8a - 5b = 13$, $a, b \geq 0$ y $a + b \leq 20$; de aquí obtenemos que 8 divide a $5b + 13$, de modo que $5b \equiv -13 \pmod 8$, es decir $b \equiv -1 \pmod 8$; por tanto $b = 7$ o $b = 15$. Si $b = 7$ entonces $a = 6$, y si $b = 15$ entonces $a = 11$ que no es solución pues $11 + 15 > 20$. Por tanto la solución es: 6 buenas y 7 malas.

29. Primero observemos que si x y z son números positivos, entonces $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+z}}$ $= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+z}}\left(\frac{\sqrt{x+z}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+z}-\sqrt{x}}\right) = \frac{\sqrt{x+z}-\sqrt{x}}{x+z-x} = \frac{\sqrt{x+z}-\sqrt{x}}{z}$. Ahora, la hipótesis implica que existe $e > 0$ tal que $b = a+e$, $c = b+e$, $d = c+e$ y $d = a+3e$, de manera que $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} +$ $\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{d}} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+e}} + \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{b+e}} + \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{c+e}} = \frac{\sqrt{a+e}-\sqrt{a}}{e} + \frac{\sqrt{b+e}-\sqrt{b}}{e} + \frac{\sqrt{c+e}-\sqrt{c}}{e} = \frac{\sqrt{d}-\sqrt{a}}{e}$. Por otro lado $\frac{3}{\sqrt{a}+\sqrt{d}} = \frac{3}{\sqrt{a}+\sqrt{a+3e}} = 3\left(\frac{\sqrt{d}-\sqrt{a}}{3e}\right) = \frac{\sqrt{d}-\sqrt{a}}{e}$. Comparando las ecuaciones tenemos la igualdad buscada.

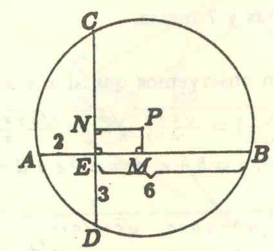
30. Tomemos M el punto medio de AB, y por M tracemos una paralela a CP. Esta paralela corta al triángulo dos veces: una en M y otra en un punto sobre AC o sobre CB que llamaremos Q. Supongamos que Q está sobre BC y vamos a ver que el área del cuadrilátero $ACQP$ es la mitad del área del triángulo ABC, demostrando así que Q es el punto buscado. Puesto que los triángulos AMC y BMC tienen bases iguales ($AM = MB$) y la misma altura, su área es igual. Tambien observemos que el área del triángulo PCM es la misma que la del triángulo PCQ porque tienen base común PC y alturas iguales (pues Q y M están en una paralela a PC); entonces tenemos $\frac{1}{2}$área(ABC) = área(ACM) = área(ACP) + área(PCM) = área(ACP) +



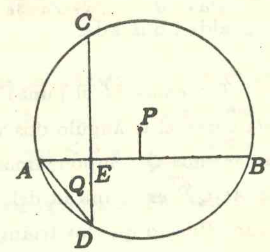
área(PCQ) = área$(APCQ)$. El mismo razonamiento se puede seguir si Q está sobre AC, intercambiando los papeles de A y B.

31. Observemos que $1\ 000\ 000\ 000 = 5^9 \times 2^9$, de manera que si algún factor contiene al menos un 2 y un 5, este factor es múltiplo de 10 y termina en 0. Ahora, $2^9 = 512$ y $5^9 = 1\ 953\ 125$, que no tienen ceros; por tanto la única posibilidad es $10^9 = 512 \times 1\ 953\ 125$.

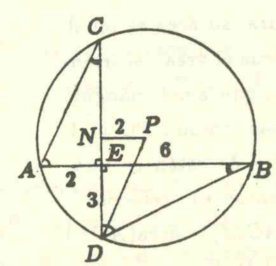
32. Observemos que el triángulo BDC es semejante al triángulo BCA pues ambos son rectángulos y tienen común el angulo β. Entonces $\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{BD}$. Llamemos t a este cociente. Entonces $AC = tDC$ y $BC = tBD$. El área del triángulo ABC es igual a $\frac{AC\cdot BC}{2}$ y la del triángulo BDC vale $\frac{BD\cdot DC}{2}$. Pero por hipótesis, $BD\cdot DC = \frac{1}{4}\cdot AC\cdot BC$, de manera que $4 = (\frac{AC}{DC})\cdot(\frac{BC}{BD}) = t^2$, por lo que $t = 2$. Así $AC = 2CD$ y $sen\alpha = \frac{1}{2}$; esto implica que $\alpha = 30^o$ y, entonces, que $\beta = 60^o$.



33. Solución 1.- Llamemos M y N a los puntos medios de AB y CD, respectivamente, y sea P el centro del círculo. Entonces E, M, P y N forman un rectángulo, así que $PM = EN$ y $PN = EM = \frac{1}{2}AB - AE = \frac{1}{2}(2+6) - 2 = 2$. Calculemos CE. Observemos que los triángulos AEC y DEB son semejantes porque $\angle E$ es recto y $\angle CAB = \angle CDB$ (pues abarcan el mismo arco). Entonces $\frac{CE}{6} = \frac{2}{3}$, lo que implica que $CE = 4$. Tomemos entonces $ND = \frac{1}{2}(CD) = \frac{1}{2}(CE+3) = \frac{7}{2}$ y $NP = 2$ así que, por Pitágoras, $PD = \sqrt{4 + \frac{49}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2}$. El diámetro del círculo es pues $\sqrt{65}$.



Solución 2.- (Usando Geometría Analítica.) Pongamos el origen en E y los ejes coordenados sobre las cuerdas: $B = (6,0)$, $A = (-2,0)$, $D = (0,-3)$. Sea $P = (2,h)$ el centro del círculo. Sea Q el punto medio de AD, es decir $Q = (-1,-\frac{3}{2})$. La recta por Q perpendicular a AD tiene por ecuación $y + \frac{3}{2} = \frac{-1}{\frac{-3}{2}}(x+1)$. Como P



la satisface, resolviendo obtenemos $h = \frac{1}{2}$. Entonces el radio del círculo es la distancia de P a A: $\sqrt{(2+2)^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{65}}{2}$, por lo que el diámetro es $\sqrt{65}$.

34. Tenemos que encontrar cuál es la máxima potencia de 10 que divide a 1000!. Contemos cuántas veces aparece 5 como factor de 1000!. El número de múltiplos de 5 menores o iguales que 1000 es 200. En 1000! aparecen estos doscientos 5's, pero por cada múltiplo de 25 aparece un 5 más. Los múltiplos de $5^2 = 25$ son 40. Por la misma razón también tenemos que contar los múltiplos de $5^3 = 125$ (éstos son 8); y los de 625 (es 1). Entonces el número de veces que aparece 5 como factor de 1000! es $200 + 40 + 8 + 1 = 249$. Es claro que la máxima potencia de 2 que divide a 1000! es mayor que 249. (Para ver esto, uno podría contar exactamente cuál es esta potencia de la misma manera que se hizo con 5.) Entonces la máxima potencia de 10 que divide a 1000! es 249, y ésta es la respuesta.

35. La suma de números es divisible por 3 exactamente cuando la suma de sus residuos al dividirlos por 3 también lo es. Hay 34 números del 1 al 100 que dejan residuo 1 al dividirlos por 3; hay 33 cuyo residuo es 0, y otros 33 con residuo 2. Examinemos las distintas posibilidades de elegir los números:

(i) Los tres con residuo 0: $\frac{33\times 32\times 31}{3!}$.

(ii) Los tres con residuo 1: $\frac{34\times 33\times 32}{3!}$.

(iii) Los tres con residuo 2: $\frac{33\times 32\times 31}{3!}$.

(iv) Uno con residuo 0, otro con residuo 1, y el otro con residuo 2: $33 \times 34 \times 33$.

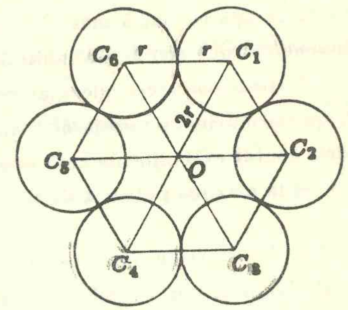
La respuesta es la suma de las cantidades de (i), (ii), (iii) y (iv).

36. Recordemos que si n es un entero positivo, definimos $n!$ como el producto de todos los enteros entre 1 y n: $n! = 1 \times 2 \cdots \times n$. Así

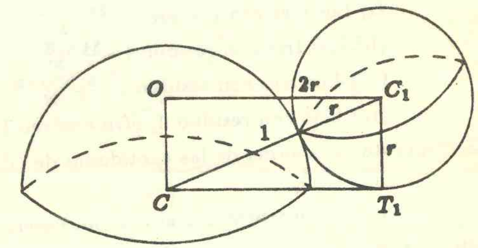
$$\begin{aligned}
A_2 &= 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 1000 = 2^{500}(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 500) = 2^{500} \times 500! \\
A_3 &= 3 \times 6 \times 9 \times \cdots \times 999 = 3^{333}(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 333) = 3^{333} \times 333! \\
&\vdots \\
A_{31} &= 31 \times 62 \times \cdots \times 992 = 31^{32}(1 \times 2 \times \cdots \times 32) = 31^{32} \times 32! \\
A_{32} &= 32 \times 64 \times \cdots \times 992 = 32^{31}(1 \times 2 \times \cdots \times 31) = 32^{31} \times 31!
\end{aligned}$$

Observemos entonces que 31! es un divisor común de $A_1, A_2, \ldots, A_{32}$. Pero 32 también aparece como factor en todos (aparte del 31!), por tanto 32! es divisor de todos. Ahora $\frac{A_{31}}{32!} = 31^{32}$ y $\frac{A_{32}}{32!} = 32^{30}$, y estos números no tienen factores en común. En consecuencia el mayor de los divisores comunes de A_{31} y A_{32} es 32!, por tanto también es el mayor de los divisores comunes de $A_2, A_3, \ldots, A_{32}$.

37. Tenemos que $b = 100a$ con a un entero positivo. Son divisores de b, entre otros, los de la forma ma con m divisor de 100. Los divisores de $100(= 2^2 \cdot 5^2)$ son: $1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100$. Entonces $D + 100a = D + b \geq 1a + 2a + 4a + 5a + 10a + 20a + 25a + 50a + 100a = (1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 + 25 + 50 + 100)a = 217a = 117a + 100a$ así $D \geq 117a > 100a = b$.



38. Sean C_1, C_2,...,C_6 los centros de las esferas de radio r. Entonces C_1, C_2,...,C_6 forman un hexágono regular de lado $2r$. Sea O el centro de este hexágono. Si unimos O con los C_i formaremos 6 triángulos equiláteros; así, la distancia de O a cada C_i es $2r$. Ahora llamemos C al centro de la semiesfera y T_1 al punto de tangencia de la esfera con centro en C_1 con la mesa. Entonces O, C_1, T_1 y C forman un rectángulo. Como la longitud del segmento CC_1 es $1 + r$ y la de C_1T_1 es r entonces, por Pitágoras, tenemos $(1 + r)^2 = r^2 + (2r)^2$. Resolviendo para r tenemos: $1 + 2r + r^2 = r^2 + 4r$, $4r^2 - 2r - 1 = 0$, $r = \frac{2 \pm \sqrt{4+16}}{8} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Como r debe ser positiva, la respuesta es $r = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.



39. Vamos a contar los unos que se ocupan si se escriben todos los números de menos de cierto número fijo de cifras:

Del 1 al 9 utilizamos un 1

Del 1 al 99 utilizamos $10 + 10 = 20$ (10 por los que empiezan en 1, y 10 por los que terminan en 1).

Del 1 al 999 utilizamos $100 + 10 \times 20 = 300$ (100 por los que empiezan en 1, y 20 por cada centena).

Del 1 al 9 999 utilizamos $1000 + 10 \times 300 = 4000$ (1000 por los que empiezan en 1, y 300 por cada millar).

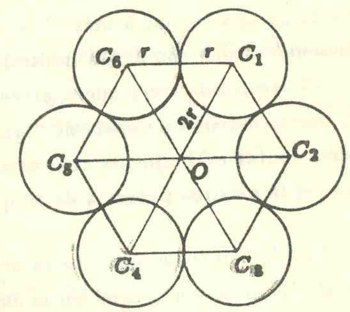
Así continuamos:

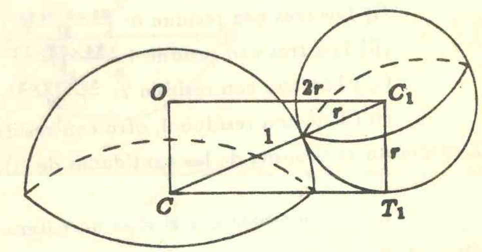
Del 1 al 99 999 utilizamos $10\,000 + 10 \cdot 4\,000 = 50\,000$.

Del 1 al 999 999 utilizamos $100\,000 + 10 \cdot 50\,000 = 600\,000$.

37. Tenemos que $b = 100a$ con a un entero positivo. Son divisores de b, entre otros, los de la forma ma con m divisor de 100. Los divisores de $100(= 2^2 \cdot 5^2)$ son: $1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100$. Entonces $D + 100a = D + b \geq 1a + 2a + 4a + 5a + 10a + 20a + 25a + 50a + 100a = (1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 + 25 + 50 + 100)a = 217a = 117a + 100a$ así $D \geq 117a > 100a = b$.

38. Sean C_1, $C_2,\ldots,C_6$ los centros de las esferas de radio r. Entonces $C_1, C_2,\ldots,C_6$ forman un hexágono regular de lado $2r$. Sea O el centro de este hexágono. Si unimos O con los C_i formaremos 6 triángulos equiláteros; así, la distancia de O a cada C_i es $2r$. Ahora llamemos C al centro de la semiesfera y T_1 al punto de tangencia de la esfera con centro en C_1 con la mesa. Entonces O, C_1, T_1 y C forman un rectángulo. Como la longitud del segmento CC_1 es $1 + r$ y la de C_1T_1 es r entonces, por Pitágoras, tenemos $(1 + r)^2 = r^2 + (2r)^2$. Resolviendo para r tenemos: $1 + 2r + r^2 = r^2 + 4r$, $4r^2 - 2r - 1 = 0$, $r = \frac{2\pm\sqrt{4+16}}{8} = \frac{2\pm2\sqrt{5}}{8} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$. Como r debe ser positiva, la respuesta es $r = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.





39. Vamos a contar los unos que se ocupan si se escriben todos los números de menos de cierto número fijo de cifras:

Del 1 al 9 utilizamos un 1

Del 1 al 99 utilizamos $10 + 10 = 20$ (10 por los que empiezan en 1, y 10 por los que terminan en 1).

Del 1 al 999 utilizamos $100 + 10 \times 20 = 300$ (100 por los que empiezan en 1, y 20 por cada centena).

Del 1 al 9 999 utilizamos $1000 + 10 \times 300 = 4000$ (1000 por los que empiezan en 1, y 300 por cada millar).

Así continuamos:

Del 1 al 99 999 utilizamos $10\,000 + 10 \cdot 4\,000 = 50\,000$.

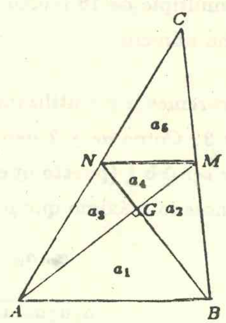
Del 1 al 999 999 utilizamos $100\,000 + 10 \cdot 50\,000 = 600\,000$.

Ahora ya sólo faltan 400 000 unos, así que debemos ir más despacio:

Del 1 000 000 al 1 099 999 hay 100 000 + 50 000 = 150 000 (los primeros 100 000 pues son 100 000 números y todos empiezan en 1; los 50 000 pues éste es el número de unos que se ocupan desde el 0 hasta el 99 999, según vimos arriba).
Ahora faltan 250 000.

Del 1 100 000 al 1 199 999 se ocupan precisamente 250 000 (pues los cien mil números comienzan con dos unos y, otra vez, del 0 al 99 999 se ocupan 50 000 unos).
El número anterior a éste es 1 199 998 y si sólo escribiéramos hasta éste, ocuparíamos 2 unos menos del millón; por otro lado el número siguiente a él es 1 200 000 que también ocupa un 1. Así la única forma de ocupar exactamente un millón de unos es escribiendo hasta el 1 199 999.

40. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_5$ las áreas de los triángulos formados como en la figura (G es la intersección de las medianas; M y N son los puntos medios de BC y AC, respectivamente). Sea x la longitud de AG y sea y la longitud de BG. Entonces $GM = \frac{1}{2}x$ y $GN = \frac{1}{2}y$. [Esto es un resultado conocido, fácil de probar utilizando semejanza de triángulos.] Entonces $a_1 = \frac{xy}{2}$, $a_2 = \frac{xy}{4}$, $a_3 = \frac{xy}{4}$, $a_4 = \frac{xy}{8}$, $a_5 = \frac{18}{4}$. (Esto último pues el triángulo CNM es semejante al triángulo CAB, y sus dimensiones lineales están en razón 1:2).
Pero $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 18$, por tanto $\frac{9}{8}xy + \frac{9}{2} = 18$, es decir, $xy = 12$. Por otro lado, por Pitágoras, tenemos que $x^2 + y^2 = 25$. Así $x^2y^2 = 144$ y $x^2 = 25 - y^2$, de donde $(25 - y^2)y^2 = 144$, $y^4 - 25y^2 + 144 = 0$, $y^2 = \frac{25 \pm \sqrt{625-576}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2} = 16$ o 9. Entonces $y = 3$ y $x = 4$ (o al revés). Entonces, por Pitágoras, $AC = 2\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}} = \sqrt{73}$ y $BC = 2\sqrt{\frac{x^2}{4} + y^2} = 2\sqrt{3}$.



41. Escribamos $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$, $b = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}$, donde $\alpha_i, \beta_i \geq 0$, p_i es primo para cada i y $p_i \neq p_j$ si $i \neq j$. Las condiciones del problema son entonces equivalentes a:

(i) para cada i $\alpha_i \leq 2\beta_i \leq 3\alpha_i \leq 4\beta_i \leq 5\alpha_i$, y

(ii) existe i tal que $5\alpha_i \leq 6\beta_i$ (o sea, $\alpha_i > \frac{6}{5}\beta_i$)

Es claro entonces que basta considerar un solo primo, así que encontraremos α_1 y β_1 que satisfagan (i) y (ii). Esto se puede hacer fácilmente al tanteo, por ejemplo $\alpha_1 = 4$ y $\beta_1 = 3$ sirven (también sirven, por ejemplo, $\alpha_1 = 13$ y $\beta_1 = 10$). Ahora tomemos p_1 cualquier primo, por ejemplo 2. Así una pareja que satisface las condiciones pedidas es $a = 2^4$ y

$b = 2^3$.

42. Supongamos que sí existe un número con las condiciones del problema. Sea P el producto de sus cifras y sea S la suma. Sabemos que $P = S$, lo que nos implica que no hay ceros. Llamemos $a_1, a_2, \ldots, a_{1989}$ las cifras del número. Entonces, como cada a_i es a lo más 9, $S = \sum a_i \leq 9 \times 1989 = 17\ 901$. Así $P \leq 17\ 901$. Por otro lado sabemos que hay por lo menos tres 5's, así que el producto de las demás cifras es menor o igual que $\frac{17\ 901}{125} < 144$. Contemos ahora, aparte de los tres 5's, cuántas cifras pueden ser distintas de 1. Como $2^8 > 143$, a lo más serán 7; cambiando de notación si fuera necesario, supongamos que las cifras no 1 se encuentran entre $a_1, a_2, \ldots, a_7$. Tenemos: $P = 125 a_1 a_2 \cdots a_7$ $S = 15 + a_1 + a_2 + \cdots + a_7 + (1989 - 3 - 7) = a_1 + a_2 + \cdots + a_7 + 1994$. Entonces $a_1 a_2 \cdots a_7 = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_7}{125} + \frac{1994}{125}$. Como $0 < \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_7}{125} < 1$, entonces $\frac{1994}{125} < a_1 a_2 \cdots a_7 < \frac{1994}{125} + 1$; así $a_1 a_2 \cdots a_7$ es 16 o 17. Pero 17 es primo y cada a_i es un dígito, por lo tanto $a_1 a_2 \cdots a_7 = 16$. Las posibilidades entonces para $a_1, a_2, \ldots, a_7$ son (en desorden):

(i) $2, 2, 2, 2, 1, 1, 1$; aquí $S = 15 + 8 + (1989 - 7) = 2005$.

(ii) $2, 2, 4, 1, 1, 1, 1$; aquí $S = 15 + 8 + (1989 - 6) = 2006$.

(iii) $2, 8, 1, 1, 1, 1, 1$; aquí $S = 15 + 10 + (1989 - 5) = 2009$.

(iv) $4, 4, 1, 1, 1, 1, 1$; aquí $S = 15 + 8 + (1989 - 5) = 2007$.

En ningún caso S es múltiplo de 16 (como debía serlo pues P lo es); en consecuencia, no es posible encontrar dicho número.

43. Encontraremos n y r utilizando el algoritmo usual para multiplicar dos números, en este caso, n y 2. Como $a_0 \times 2$ debe terminar en 0, tenemos que a_0 debe ser 0 o 5. Por otro lado a_1 debe ser 0 o 1 (puesto que un dígito multiplicado por 2 es a lo más 18, y si "llevábamos" 1, entonces lo máximo que podemos obtener es 19).

$$\begin{array}{r} a_m a_{m-1} \cdots a_2 a_1 a_0 \\ \times 2 \\ \hline a_1 a_0 a_m a_{m-1} \cdots a_3 a_2 0 \end{array}$$

Examinaremos todas las combinaciones con con $a_0 = 0, 5$ y $a_1 = 0, 1$. En cada una iremos construyendo el número hasta que en el resultado aparezcan los números $a_1 a_0$ juntos. (Se podría continuar con la operación, pero el número que encontraríamos sería mayor que el ya obtenido)

(i) $a_0 = 0$, $a_1 = 0$: En este caso $n = 0$, así que éste no sirve.

(ii) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$:

$$\begin{array}{r} 526315789473684210 = n \\ \times 2 \\ \hline 1052631578947368420 = 2n = r \end{array}$$

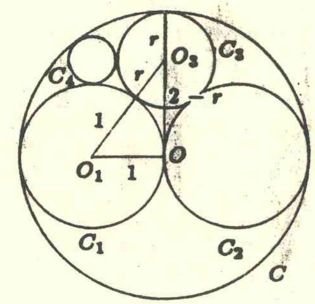
(iii) $a_0 = 5$, $a_1 = 0$:

$$\begin{array}{r} 263157894736842105 \\ \times\ 2 \\ \hline 0526315789473684210 \end{array}$$

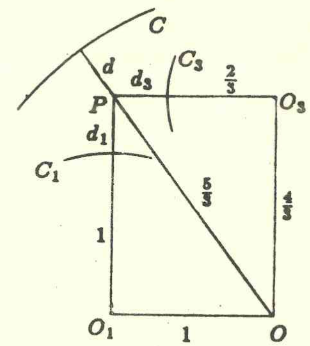
(iv) $a_0 = 5$, $a_1 = 1$:

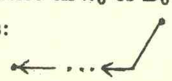
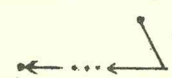
$$\begin{array}{r} 789473684210526315 \\ \times\ 2 \\ \hline 1578947368421052630 \end{array}$$

Así, el número más chico es el de (iii).

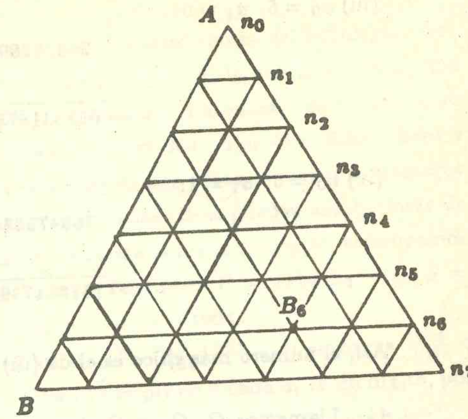


44. Llamemos O, O_1 y O_3 los centros de C, C_1 y C_3, respectivamente, sea r el radio de C_3. Entonces la longitud de OO_3 es $2 - r$, y los segmentos O_1O y O_3O son perpendiculares; en consecuencia, por Pitágoras, r satisface $(2-r)^2+1 = (1+r)^2$, o sea $4-4r+r^2+1 = 1+2r+r^2$, lo que implica que $r = \frac{2}{3}$. Sea P el otro vértice del rectángulo determinado por O, O_1 y O_3. Probaremos que P es el centro de C_4. Para ello bastará que comprobemos que las distancias de P a cada uno de los círculos C, C_1 y C_3 son iguales. Llamemos a éstas d, d_1 y d_3, respectivamente. Entonces $d = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$ (pues el radio de C es 2, y la longitud de OP es la misma que la de O_1O_3, y ésta es $1 + r = \frac{5}{3}$). También $d_1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$ y $d_3 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.



45. Llamemos $n_0, n_1, \ldots, n_7$ los niveles horizontales marcados en el dibujo. Sea k el número buscado. Elijamos un vértice arbitrario B_6 en el nivel n_6 y sea k' el número de caminos de A a B cuyo último vértice en n_6 es B_6. Entonces $k = 7k'$ y como para llegar de B_6 a B hay sólo dos posibilidades:  y ,

entonces $k' = 2k_6$, donde k_6 denota el número de caminos de A a B_6. Observemos que éste último no depende del vértice B_6 escogido, pues una vez que se llega al nivel n_6, para moverse hacia cualquier vértice del mismo nivel sólo hay una forma. Entonces $k = 7 \times 2k_6$. Hagamos ahora lo mismo para determinar k_6: $k_6 = 6 \times 2k_5$, donde k_5 es el número de caminos de A a un vértice fijo B_5 del nivel n_5. Así sucesivamente, obtenemos: $k = 2{\times}7{\times}k_6 = 2^2{\times}7{\times}6{\times}k_5 = \cdots = 2^6{\times}7{\times}6{\times}\cdots{\times}2{\times}k_1 = 2^7 \times 7 \times 6 \times 5 \times \cdots \times 2 \times 1 = 2^7 \times 7!$.



Sección 3. EXAMENES.

Examen para elegir a la delegación olímpica mexicana 1990

Duración: 3 sesiones de 4:30 horas cada una.

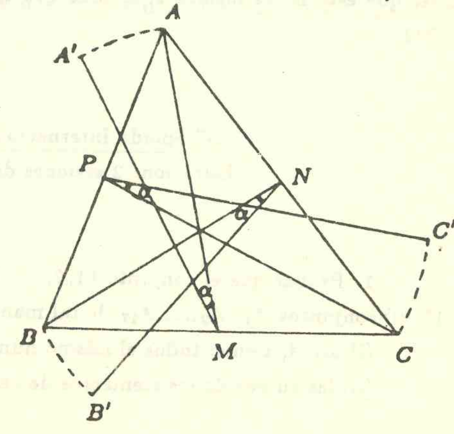
1. Considérese el plano cartesiano. Para cada pareja de enteros positivos (i,j), sea $L(i,j)$ el segmento que va del punto (i,j) al punto $((j+1)i, j+1)$ quitándole los extremos. Probar que no hay ningún entero positivo n tal que el segmento S_n que va de $(1,n)$ a $(n,1)$ intersecte a 1 000 de los $L(i,j)$.

2. Tómense los siguientes elementos fijos en el plano: una circunferencia C; una recta L que pase por el centro O de C, y un punto A sobre L exterior al círculo C. Para cada circunferencia C_1 tangente a L en A y que intersecte a C tómese el punto medio M_1 de la cuerda que une los puntos de intersección de C_1 con C. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos M_1?.

3. Sea $f(n)$ la función definida por $f(n) = f(n-1) + (n-2)! - n\left[\frac{(n-2)!}{n}\right]$, $n \in N$, $n > 5$. Si $f(5) = 3$, calcular $f(100)$. [Aquí $[x]$ denota el mayor entero menor o igual que x.]

4. Determinar cuántos enteros a entre 1 y 5 satisfacen las condiciones siguientes:
(i) a no es divisible por 4, y
(ii) existe un entero n para el cual $[n, \varphi(n)] = a$.
[Aquí φ es la función de Euler y $[x,y]$ denota el mínimo común múltiplo de x y y.]

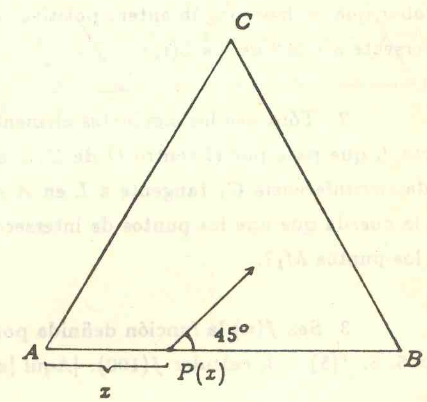
5. Sea ABC un triángulo y sean M, N y P los puntos medios de BC, AC y AB respectivamente. Sea α un ángulo fijo. Con centro en cada uno de M, N y P, rótese el vértice opuesto un ángulo α en el sentido contrario de las manecillas del reloj. Probar que el triángulo $A'B'C'$ formado por los puntos obtenidos es semejante al triángulo ABC.



6. Supóngase que S_1, S_2,...,S_{1990} son 1990 segmentos en el plano, situados de tal forma que de cada cuarteta al menos dos no se cortan. Para cada i llámese n_i al número de segmentos que intersectan a S_i (sin cortar al mismo S_i). Probar que alguna n_i es menor o igual que 1326.

7. Probar que si n es un entero positivo primo relativo con 10, entonces n divide a una infinidad de los siguientes números: 1990, 19901990, 199019901990, ...

8. Sean A, B y C los vértices de una mesa de billar triangular en la que cada lado mide 1. Para cada real x con $0 \leq x < 1$ sea $P(x)$ el punto sobre el lado AB cuya distancia a A es x. Sea $Q(x)$ el primer punto sobre AB al que la pelota toca después de haber sido lanzada desde $P(x)$ con un ángulo de 45° (ver la figura). Defínase $f(x)$ como la distancia de $Q(x)$ a A. Encontrar el valor que deben tener los números reales a, b, c, d y x_0 para que la función f quede definida por la fórmula



$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & si\ 0 \leq x \leq x_0, \\ cx + d, & si\ x_0 \leq x < 1 \end{cases}$$

9. Probar que se pueden encontrar 100 rectas en el plano de tal manera que ninguna terna sea concurrente y tal que el número de intersecciones entre ellas sea exactamente 1322. Probar que esto no es posible si se pide que el número de intersecciones sea 1321 en lugar de 1322.

Olimpiada Internacional (Alemania; 1989)

Duración: 2 sesiones de 4:30 horas cada una.

1. Probar que el conjunto $\{1, 2, \ldots, 1989\}$ se puede expresar como la unión ajena de 17 subconjuntos A_1, A_2,...,A_{17} de tal manera que:

(i) los A_i tienen todos el mismo número de elementos.

(ii) las sumas de los elementos de cada A_i son todas iguales.

2. Sea ABC un triángulo acutángulo. Llámese A_1 a la intersección de la bisectriz del ángulo $\angle A$ con el circuncírculo de ABC y defínanse B_1 y C_1 de manera análoga. Sea A_0 el punto de intersección de AA_1 con las bisectrices de los ángulos exteriores en B y C, y defínanse B_0 y C_0 de manera análoga. Demostrar que:

(i) área$(A_0B_0C_0)$ =2· área$(AC_1BA_1CB_1)$ y

(ii) área$(A_0B_0C_0)\geq$ 4· área(ABC).

3. Sea S un conjunto de n puntos en el plano. Supóngase que S satisface las siguientes condiciones:

(i) No hay tres puntos de S que sean colineales.

(ii) Para cada punto P de S existen al menos k puntos en S con la misma distancia a P.

Probar que $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

4. El cuadrilátero $ABCD$ cumple las siguientes condiciones:

(i) $AB = AD + BC$,

(ii) Hay un punto P en el interior de $ABCD$ a una distancia x del lado CD para el cual $AP = x + AD$ y $BP = x + BC$.

Probar que $\frac{1}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}$.

5. Demostrar que para cada entero positivo n existen n enteros consecutivos que no son potencia de números primos.

6. Sea n un entero positivo. Dígase que una permutación $(x_1x_2\ldots x_{2n})$ del conjunto $\{1,2,\ldots,2n\}$ tiene la propiedad P si $|x_i - x_{i+1}| = n$ para al menos un $i \in \{1,2,\ldots,2n-1\}$. Demostrar que para cada n hay más permutaciones con la propiedad P que sin ella.

Apéndice. CONGRUENCIAS.

En esta sección exponemos algunos conceptos básicos sobre Congruencias. Esta es una herramienta que usualmente no se estudia en niveles preuniversitarios pero que es fácil de aprender y que resulta muy útil en la teoría de divisibilidad de números enteros. Antes de intentar aplicar esta técnica en los problemas de la sección 1, resuelve los ejercicios que aquí proponemos pues son sencillos y te ayudarán a entender mejor la teoría.

Definición.- Dados dos números enteros a y b, y un entero positivo n, definimos

$$a \equiv b \pmod{n}$$

(léase "a congruente con b módulo n") si n divide a la diferencia $a - b$.

Ejemplos.- $7 \equiv 1 \pmod{6}$, $0 \equiv 32 \pmod{4}$.

De aquí en adelante n será un entero positivo; $a, b, c, \ldots$ denotarán enteros arbitrarios.

Tenemos el siguiente resultado cuya demostración te dejamos como un ejercicio sencillo.

Si r es el residuo de la división de a entre n (es decir $a = nq + r$, con $0 \le r < n$), entonces $a \equiv r \pmod{n}$.

Gracias a este resultado tenemos que todo entero es congruente con (exactamente) uno de los de la lista: $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Los que son congruentes con 0 son precisamente los múltiplos de n, es decir, los de la forma nq con q un entero. Los que son congruentes con 1 son los de la forma $nq + 1$, con q entero, etc.

Ejercicio 1. Encuentra 7 números distintos que sean congruentes con 2 módulo 6.

Las siguientes propiedades nos dicen que la relación de congruencia se comporta, en buena medida, como la relación de igualdad. Todas son fácilmente comprobables a partir de la definición. Te dejamos como ejercicio su demostración.

(1) $a \equiv a \pmod{n}$.
(2) Si $a \equiv b \pmod{n}$, entonces $b \equiv a \pmod{n}$.
(3) Si $a \equiv b \pmod{n}$ y $b \equiv c \pmod{n}$, entonces $a \equiv c \pmod{n}$.

(4) Si $a \equiv b \pmod{n}$, entonces $a + c \equiv b + c \pmod{n}$.
(5) Si $a \equiv b \pmod{n}$, entonces $ac \equiv bc \pmod{n}$.

Por otro lado sabemos que la relación de igualdad satisface la propiedad de cancelación bajo la multiplicación, es decir: "Si $ab = ac$ y $a \neq 0$, entonces $b = c$". Esta propiedad no siempre es cierta con congruencias; por ejemplo: $4 \times 3 \equiv 2 \times 3 \pmod{6}$ pero $4 \not\equiv 2 \pmod{6}$. Lo que hace que en el ejemplo no se pueda "cancelar" el 3 es que 3 y 6 tienen divisores comunes. Cuando esto no ocurre, sí se puede cancelar. Enunciamos esto:

Supongamos que a y n no tienen factores en común aparte de ± 1. Si $ab \equiv ac \pmod{n}$, entonces $b \equiv c \pmod{n}$.

[Para convencerte que este resultado es cierto simplemente recuerda que si x es divisor de un producto yz, y x y y no tienen factores en común, entonces x debe ser un divisor de z.]

Otra propiedad importante de las congruencias es:

Si a y n no tienen factores comunes (aparte de ± 1) y b es un entero, entonces existe un entero x tal que $ax \equiv b \pmod{n}$.

[Para probar esto considera el conjunto $\{ax | x = 0, 1, \ldots, n-1\}$. Gracias a la propiedad de cancelación de a, este conjunto tiene n elementos no congruentes dos a dos; eso quiere decir que los residuos de la división por n de los números ax cuando x varía entre $0, 1, \ldots, n-1$ son los mismos $0, 1, \ldots, n-1$ (en desorden) y, en consecuencia, en algún momento $ax \equiv b \pmod{n}$.]

Ejercicio 2.- Para cada $a \in \{1, 2, \ldots, 12\}$ encontrar $b \in \{1, 2, \ldots, 12\}$ de manera que $ab \equiv 1 \pmod{13}$. Usar esto para resolver las congruencias $7x \equiv 3 \pmod{13}$ y $6x - 2 \equiv x + 1 \pmod{13}$.

Ejercicio 3.- Prueba el criterio de división por 3: "Un entero a es divisible por 3 exactamente cuando la suma de las cifras de a lo es". [Sugerencia.- Considera la expansión decimal de a, $a = a_m a_{m-1} \cdots a_1 a_0$; entonces $a = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \cdots + a_m 10^m$. Ahora usa que $10 \equiv 1 \pmod{3}$ y aplica propiedades de congruencias módulo 3.]

Ejercicio 4.- Prueba el criterio de división por 11: "Un entero a es divisible por 11 exactamente cuando la diferencia de la suma de las cifras de a que ocupan posición par en la expresión decimal de a, con la suma de las que ocupan posición impar, también lo es".

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA.

1. Cárdenas, Lluis, Raggi, Tomás. Algebra Superior. Edit. Trillas.

2. Coxeter. Geometry Revisited. Mathematical Association of America. New Mathematical Library.

3. Lidski, et al. Problemas de Matemáticas Elementales. Edit. MIR, Moscú.

4. Luque Luna, Alberto. Elementos de Geometría Euclidiana. Edit. Limusa.

5. Niven y Zuckerman. Introducción a la Teoría de los Números, Caps. I y II. Edit. Limusa-Wiley.

6. Shariguin. Problemas de Geometría. Edit. MIR, Moscú.

7. Spiegel Murray. Algebra Superior. Serie Schaum.

8. Thompson. Geometría. Edit. UTEHA.

9. Vasiliev y Gutemájer. Rectas y Curvas. Edit. MIR, Moscú.

10. Temas Matemáticos. (Varios títulos de diversos autores). Edit. MIR, Moscú.