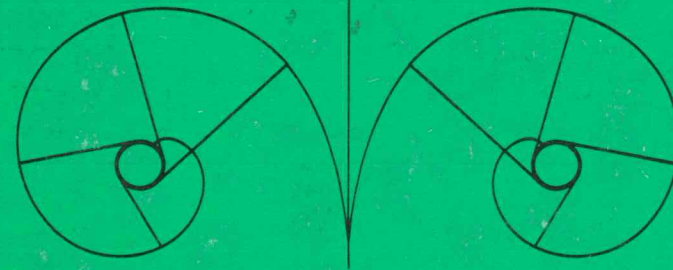
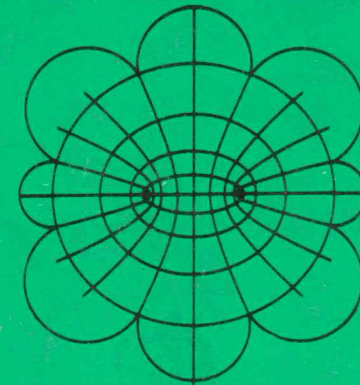


PROBLEMAS
PARA LA 7^a.

Olimpiada de MATEMATICAS



Javier Alfaro
Carlos Bosch
José Antonio Gómez
Marcela González
Renata Villalba

PATROCINADORES

SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA

CONSEJO NACIONAL DE CIENCIA Y TECNOLOGIA

INSTITUTO NACIONAL DE ESTADISTICA, GEOGRAFIA E INFORMATICA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

INSTITUTO TECNOLOGICO AUTONOMO DE MEXICO

COMITE ORGANIZADOR

JAVIER ALFARO PASTOR

CARLOS BOSCH GIRAL

JOSE ANTONIO GOMEZ ORTEGA

MARCELA GONZALES PELAEZ

RENATA VILLALBA COHEN

PRESENTACION

Durante 1993, en el marco de las Olimpiadas Nacionales de la Ciencia, la Sociedad Matemática Mexicana conjuntamente con la Academia de la Investigación Científica, A.C., está organizando la 7a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los ganadores serán la base para conformar la selección mexicana que representará a nuestro país en la XXXV Olimpiada Internacional de Matemáticas, a celebrarse en julio de 1993, en Hong Kong, en la 9a. Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas a celebrarse en Brasil en septiembre de 1994 y en la Olimpiada de la Cuenca del Pacífico, versión 1994, competencia que se lleva a cabo por correo y cuyo examen se aplicará en el mes de marzo de 1994.

En la 7a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los jóvenes mexicanos nacidos después del 1o. de agosto de 1974. Los concursantes deberán estar inscritos en el bachillerato durante el primer semestre de 1994. Para el 20 de julio del mismo año no deberán estar inscritos en ninguna universidad o equivalente.

Como en años anteriores, hemos preparado un folleto que sirva de orientación a los alumnos que deseen participar en esta competencia.

Como ya es costumbre, hemos incluido problemas varios con su solución, algunos exámenes regionales y los exámenes de las competencias internacionales del año pasado.

Los problemas que aquí aparecen, no son los ejercicios rutinarios a los que se enfrentan los alumnos en sus cursos normales, sino problemas que requieren de una buena dosis de ingenio y creatividad y también de mucho esfuerzo. Es conveniente discutirlos tanto con compañeros como con profesores.

Extendemos una cordial invitación a maestros y alumnos para que nos hagan llegar problemas de su creación con la solución incluida. Los mejores serán publicados en el folleto de la siguiente Olimpiada.

La participación en cualquiera de las tres etapas que abajo se detallan es INDIVIDUAL.

ETAPAS DE LA OLIMPIADA

La Olimpiada Mexicana de Matemáticas consta de tres etapas: concursos estatales, concurso nacional y entrenamiento y selección de la delegación mexicana que participará en competencias internacionales.

En cada estado de la República, con base en los resultados del concurso estatal, se selecciona a seis alumnos para asistir al concurso nacional y en el caso del Distrito Federal a diez alumnos.

Durante el concurso nacional, el examen se lleva a cabo en dos sesiones de cuatro horas y media cada una. De este certamen, se elige al grupo de ganadores que conforman la preselección mexicana.

La última etapa consiste en el entrenamiento intensivo de la preselección, a base de cursos y exámenes tipo. Con base en los resultados que obtengan en los exámenes de clasificación, se elige a los estudiantes que conformarán la delegación mexicana que participará en las olimpiadas internacionales.

AGRADECIMIENTOS

Durante 1992 se llevó a cabo la 6a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas. El concurso nacional tuvo lugar en el centro vacacional La Trinidad, en el estado de Tlaxcala del 25 al 31 de octubre de 1992. Los ganadores de ese certamen participaron en la Olimpiada de la Cuenca del Pacífico, versión 1993 y son la base para integrar la delegación mexicana que acudirá a la XXXIV Olimpiada Internacional de Matemáticas, a celebrarse en Turquía en julio de 1993 y a la 8a. Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se llevará a cabo en México, en septiembre de 1993.

La 6a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas no hubiera sido posible sin el generoso patrocinio de diversas instituciones y organismos de carácter público y privado. Agradecemos a:

La Secretaría de Educación Pública a través de la Subsecretaría de Educación Básica.

El Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

La Universidad Nacional Autónoma de México, a través de la Rectoría, la Secretaría General, la Facultad de Ciencias, el Instituto de Matemáticas, el Instituto de Investigación en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, el Centro Universitario de Comunicación de la Ciencia y la Coordinación de la Investigación Científica.

La Academia de la Investigación Científica, A.C.

La Universidad Autónoma Metropolitana a través de su Rectoría General y de su unidad Iztapalapa.

El Instituto Tecnológico Autónomo de México.

El Centro de Investigaciones en Matemáticas, A.C.

La Universidad de Guadalajara.

El Colegio de Bachilleres del estado de Tlaxcala.

Por sus generosos donativos para integrar los premios de los ganadores, agradecemos a las siguientes editoriales: CECSA, SITEA, Iberoamericana, Interamericana, Limusa, Mc.Graw-Hill y Trillas, así como a las secciones editoriales de la U.N.A.M., la U.A.M. y el CONACYT.

Queremos agradecer, en forma muy especial, a los delegados estatales que hacen posible que los concursos existan a lo largo de toda la República Mexicana, así como a todas las instituciones que los patrocinan y apoyan.

Agradecemos también el entusiasmo de todos los jóvenes concursantes. Su participación es el objetivo fundamental de este esfuerzo.

Finalmente queremos agradecer a todas las personas que han colaborado con nosotros. Sin ellas, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas no sería posible.

**COMITE ORGANIZADOR DE LA OLIMPIADA
MEXICANA DE MATEMATICAS**

Abril 1993

RESUMEN DE RESULTADOS

OLIMPIADAS INTERNACIONALES DE MATEMATICAS

Desde 1987, año en que la Sociedad Matemática Mexicana organiza la 1a. Olimpiada, los resultados han sido los siguientes:

Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1988	Australia	49	37
1989	Rep. Fed. de Alemania	50	31
1990	Rep. Popular de China	54	36
1991	Suecia	55	35
1992	Moscú	56	49
1993	Turquía	Se llevará a cabo en julio de 1993	

OLIMPIADAS IBEROAMERICANAS

Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1989	Cuba	13	3
1990	España	15	3
1991	Argentina*	16	5
1992	Venezuela	16	5
1993	México	Se llevará a cabo en septiembre de 1993	

(*) México obtuvo la primera medalla de oro en este tipo de competencias. El joven Bernardo Abrego Lerma, originario del Distrito Federal, distinguió a nuestro país con este logro.

En resumen, en las olimpiadas internacionales se han obtenido cuatro medallas de bronce y once menciones honoríficas. En las cuatro olimpiadas iberoamericanas en las que México ha participado se han obtenido una medalla de oro, siete medallas de plata, seis medallas de bronce y dos menciones honoríficas.

OLIMPIADA DE LA CUENCA DEL PACIFICO

Este concurso se realiza por correo. Actualmente el Comité Organizador tiene su sede en Australia y a partir de septiembre de 1993, México tendrá el honor de convertirse en la sede de esta competencia. México ha participado en tres ocasiones. En 1990, se obtuvo una medalla de bronce y dos menciones honoríficas. En 1991, se obtuvieron dos medallas de bronce y siete menciones honoríficas. En marzo de 1992 se obtuvo una medalla de bronce y siete menciones honoríficas. En marzo de 1993, el examen de la Cuenca del Pacífico se aplicó en la ciudad de México y el Comité Organizador en Australia nos hará llegar los resultados en mayo de 1993.

PROBLEMAS

PROBLEMA 1.

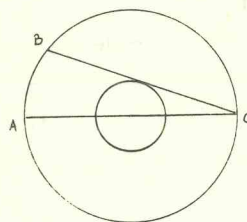
Calcule $6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6$.

PROBLEMA 2.

Sean a, b, c enteros positivos tales que a y b son impares. ¿Cuál es el residuo de $3^a + (b-1)^2c$ al dividirlo por 4?

PROBLEMA 3.

La razón de los radios de 2 circunferencias concéntricas es 1:3. Si AC es un diámetro del círculo grande, BC es una cuerda del círculo grande que es tangente al círculo pequeño y $AB = 12$, ¿Cuál es el radio del círculo grande?



PROBLEMA 4.

Determine todos los pares de enteros positivos (a,b) con $a+b \leq 100$ que satisfacen

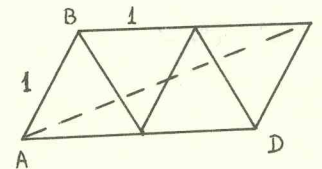
$$\frac{a + b^{-1}}{a^{-1} + b} = 13.$$

PROBLEMA 5.

Encuentre cinco enteros menores o iguales que $1992 \cdot 35$ tales que tengan al menos 100 divisores.

PROBLEMA 6.

Calcule la diagonal AC del siguiente paralelogramo:



donde el paralelogramo está formado por cuatro triángulos equiláteros de lado 1.

PROBLEMA 7.

Sean a, b, c, d, e números reales tales que:

- i) $a > b$
- ii) $e - a = d - b$
- iii) $c - d < b - a$
- iv) $a + b = c + d$

Ordene los números a, b, c, d, e de mayor a menor.

PROBLEMA 8.

Determine todas las parejas de enteros (x, y) que satisfagan:

$$(x^2 - 4x + 3)^{x-3y} = 1.$$

PROBLEMA 9.

Dos círculos se cortan en A y B. Una recta ℓ pasa por A y corta a los círculos en M y N.

a) Estudie los ángulos del triángulo BMN cuando ℓ pivotea alrededor de A (rota alrededor de A).

b) Pruebe que si los círculos tienen el mismo radio, $BN = BM$.

PROBLEMA 10.

Dado un triángulo ABC y su ortocentro H. Encuentre los ortocentros de los triángulos ABH, ACH y BCH.

PROBLEMA 11.

En un país es posible viajar en avión entre dos ciudades cualesquiera; si no hay vuelo directo, hay al menos uno indirecto pasando por alguna o algunas otras ciudades. Un camino, es una ruta aérea entre dos ciudades que pasa no más de una vez por cada ciudad intermedia. La longitud del camino, es el número total de ciudades que atravieza, contando la última y sin contar la salida.

Sea M la longitud máxima en ese país. Pruebe que dos caminos de longitud igual a M tienen que tener al menos una ciudad en común.

PROBLEMA 12.

Sea p un número primo. Demuestre que si $\dots, a_1, a_{1+1}, \dots, a_{1+p-1} \dots$ están en progresión aritmética y d es la diferencia entre sus términos, entonces p divide a d o p divide a uno de los a_{1+k} con $k = 0, 1, \dots, p-1$.

Examen de SELECCION DE LA DELEGACION MEXICANA aplicado a los ganadores de la V OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMATICAS.

PRIMER EXAMEN

PROBLEMA 13.

Demuestre que 1992 divide a uno (y por lo tanto a una infinidad)

PROBLEMA 17.

Sean ABCD los vértices de un tetraedro. Supongamos que E es un punto en AD, F en BD y G en CD tales que ABEF y ACGE son cíclicos. Pruebe que:

- a) BCGF son cíclico.
- b) ABCEFG están todos en la misma esfera.

PROBLEMA 18.

Sea $k = 1988$, ¿Cuántos números capicúas de la forma

$$a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1} a_k \dots a_2 a_1$$

hay, tales que la suma de sus cifras sea igual a 9?

Exámenes de selección para la VII OLIMPIADA IBEROAMERICANA.

PRIMER EXAMEN

PROBLEMA 19.

Considere un círculo y A, B y C, tres puntos en él. Sean D y E puntos en el círculo tales que el $\angle BAD = \angle DAE = \angle EAC$. Sean M, N y P las intersecciones de AD y BC, AE y BC, AE y CD, respectivamente. Pruebe que:

$$\frac{BM}{BN} + \frac{CP}{CD} = 1.$$

PROBLEMA 20.

Encuentre todas las soluciones enteras de la ecuación:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1992}$$

PROBLEMA 21.

Sea n un número natural. Definimos dos sucesiones binarias de longitud n como equivalentes si una es igual a la otra leída de derecha a izquierda.

¿Cuántas sucesiones de longitud n , no equivalentes, hay?

PROBLEMA 22.

Encuentre una expresión para el n -ésimo término de la sucesión:

$$a_0 = 1 \quad \text{y} \quad a_n = n \cdot a_{n-1} + n! \cdot F_n$$

donde F_n es el término $n+1$ de la sucesión de Fibonacci.

SEGUNDO EXAMEN

PROBLEMA 23.

Pruebe que si los puntos medios de las aristas de un tetraedro ABCD, están en una esfera, entonces el tetraedro es ortogonal, es decir, las aristas opuestas son perpendiculares y

$$AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$$

PROBLEMA 24.

Sea S la suma de todos los números que tienen sus cifras en orden estrictamente creciente. Pruebe que

$$S = \sum_{k=1}^9 k(2^{k-1})(11^{9-k})$$

PROBLEMA 25.

Pruebe que:

$$10^{10} + 10^{10^2} + \dots + 10^{10^r} \equiv 0 \pmod{7} \Leftrightarrow r \equiv 0 \pmod{7}$$

PROBLEMA 26.

Pruebe que para todo número natural $n > 1$,

$$1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} < 2$$

TERCER EXAMEN

PROBLEMA 27.

El número 1234...9991000 se multiplica por algún entero n , $1 \leq n \leq 9$ y al resultado se le quitan todos los unos. El nuevo número se multiplica por m , $1 \leq m \leq 9$, y del nuevo resultado se quitan los unos, etc. Halle el menor número que se puede obtener de tal modo.

PROBLEMA 28.

Dado un polígono regular de 5 o más lados (puede ser como caso típico un hexágono), se trazan las diagonales que unen cada vértice con los dos vértices consecutivos a los adyacentes a dicho vértice.

i) Pruebe que los puntos de intersección de dichas diagonales determinan un polígono semejante al dado.

ii) Halle la relación existente entre las áreas de los dos polígonos.

PROBLEMA 29.

Un número natural n se dice abundante si la suma de sus divisores (incluido n) es mayor que $2n$. Pruebe que todo número par mayor que 46 se puede expresar como suma de dos números abundantes.

Examen del CONCURSO NACIONAL correspondiente a la VI OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMATICAS.

PRIMER DIA

PROBLEMA 30.

Un tetraedro OPQR es tal que los ángulos POQ, POR y QOR son rectos. Muestre que si X, Y, Z son los puntos medios de PQ, QR y RP, entonces el tetraedro OXYZ es isósceles, es decir, tiene sus cuatro caras iguales.

PROBLEMA 31.

Sea p un número primo, encuentre todas las cuartetitas de enteros (a,b,c,d) distintas, con $0 \leq a, b, c, d \leq p-1$ tales que $ad - bc$ sea múltiplo de p.

PROBLEMA 32.

Considere siete puntos dentro o sobre un hexágono regular y pruebe que tres de ellos forman un triángulo cuya área es menor o igual que $\frac{1}{6}$ del área del hexágono.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 33.

Muestre que 100 divide a $1 + 11^{11} + 111^{111} + \dots + \underbrace{11\dots1}_{10 \text{ cifras}}^{\overbrace{11\dots1}^{10 \text{ cifras}}}$.

PROBLEMA 34.

Sean x, y, z números reales positivos tales que $x + y + z = 3$. Si

$$S = \sqrt{2x+3} + \sqrt{2y+3} + \sqrt{2z+3}, \text{ pruebe que } 6 < S \leq 3\sqrt{5}.$$

PROBLEMA 35.

Sea ABCD un rectángulo. Sean I el punto medio de CD y M la intersección de BI con la diagonal AC.

- Pruebe que DM pasa por el punto medio de BC.
- Sea E un punto exterior al rectángulo tal que ABE sea un triángulo isósceles y rectángulo en E. Además, supongamos que $BC = BE = a$. Pruebe que ME es bisectriz del ángulo AMB.
- Calcule el área del cuadrilátero AEEM en función de a.

PROBLEMA 36.

Sea p un número primo, encuentre todas las cuartetos de enteros (a,b,c,d) distintas, con a, b, c, y d también distintos y $0 \leq a,b,c,d \leq p-1$, tales que $ad - bc$ sea múltiplo de p.

A PARTIR DE AQUI, PRESENTAMOS UNA SERIE DE EXAMENES QUE FUERON APLICADOS EN DIFERENTES CONCURSOS.

VI OLIMPIADA DE MATEMATICAS
CONCURSO ESTATAL DE AGUASCALIENTES

PRIMERA PRUEBA

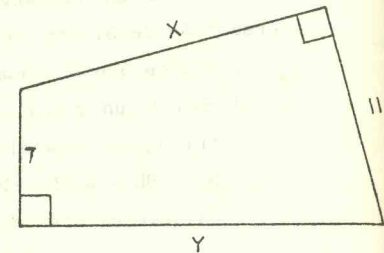
PROBLEMA 1.

Una compañía de teléfonos celulares asegura que la carga de cada uno de sus aparatos dura 90 minutos de conversación continua o hasta 15 horas en espera de llamada (línea libre).

Suponiendo cierto lo que afirma el anunciante, ¿cuánto tiempo duró en conversación un cliente si la carga se le terminó al cabo de 9 horas? (Advertencia: no son 36 minutos).

PROBLEMA 2.

El cuadrilátero de la figura tiene en centímetros, medidas enteras y distintas en todos sus lados. Las medidas anotadas, 7 y 11, corresponden a los lados menores. ¿Cuánto miden los lados x y y ?

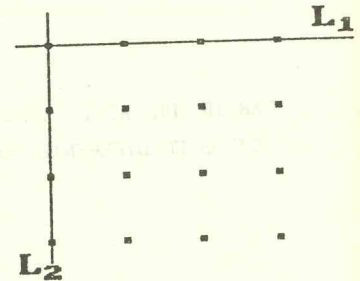


PROBLEMA 3.

En la siguiente figura, se tienen 16 puntos que forman una retícula cuadrada y dos rectas, L_1 y L_2 , perpendiculares entre sí.

- a) ¿Cuántos cuadrados se pueden formar, de tal manera que sus vértices pertenezcan a la retícula, pero que ninguno de sus lados sea paralelo a L_1 ni a L_2 ?

- b) ¿Cuántos triángulos isósceles se pueden formar, de tal manera que sus vértices pertenezcan a la retícula, pero que ninguno de sus lados sea paralelo a L_1 ni a L_2 ?



PROBLEMA 4.

Mediante la utilización del producto notable $(x - y) \cdot (x^{m-1} + x^{m-2}y + x^{m-3}y^2 + \dots + xy^{m-2} + y^{m-1}) = x^m - y^m$, si $m \in \mathbb{N}$ es posible demostrar que $2^{3k} - 1$ es divisible entre 7 y que $2^{2k} - 1$ es

divisible entre 3, para todo valor $k \in \mathbb{N}$.

¿De qué forma debe ser $n \in \mathbb{N}$ para que $2^n - 1$ sea divisible entre 21? Justifica tu respuesta.

SEGUNDA PRUEBA

PROBLEMA 1.

Se sabe que el producto de 1992 números naturales es 1992.

¿Cuántos de dichos factores deben ser iguales a 1? Da el mínimo y el máximo de este tipo de factores.

PROBLEMA 2.

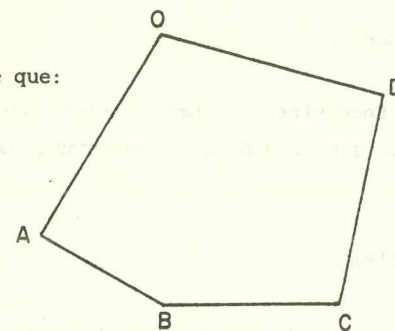
En la figura adjunta se tiene que:

$$OA = OD \quad \angle OAB = 90^\circ$$

$$AB = 6 \quad \angle OBC = 90^\circ$$

$$DC = 10 \quad \angle ODC = 90^\circ$$

Calcula la medida BC.



PROBLEMA 3.

Di por qué es cierto que:

$$\text{si } n > 0, \text{ entonces } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}$$

PROBLEMA 4.

Demuestra que $8n(n^2 + 5)$ es divisible entre 48 para todo valor de $n \in \mathbb{N}$.

VI OLIMPIADA DE MATEMATICAS

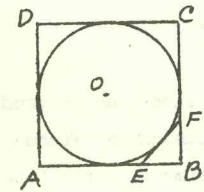
EXAMEN REGIONAL DEL D.F.

PROBLEMA 1.

Sea ABCD un cuadrado y sea O el centro del cuadrado. Supóngase que una línea corta a los lados AB y BC del cuadrado en los puntos E y F, respectivamente. Pruebe que:

a) Si la línea EF es tangente a la circunferencia inscrita, entonces el ángulo EOF es de 45° .

b) Si el ángulo EOF es de 45° , entonces la línea EF es tangente a la circunferencia inscrita.



PROBLEMA 2.

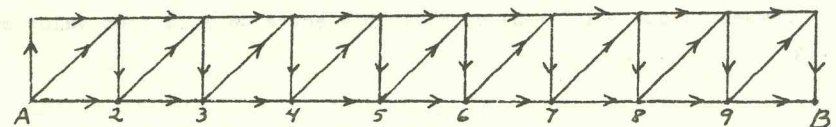
Encuentre un número entero positivo n menor que 2100 tal que $n = p^3 \cdot q \cdot r$, con p , q y r números primos distintos y $r > 80$.

PROBLEMA 3.

Sea ABCD un trapecio tal que sus diagonales se intersectan en ángulo recto. Pruebe que $(AB + CD)^2 = (AC)^2 + (BD)^2$.

PROBLEMA 4.

En la siguiente figura, para llegar del punto A al punto B, solamente se pueden recorrer caminos en la dirección que indican las flechas. ¿Cuántos de estos caminos distintos se pueden encontrar?

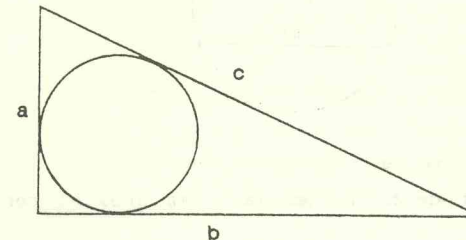


VI OLIMPIADA DE MATEMATICAS
CONCURSO ESTATAL DE DURANGO

PRIMER DIA

PROBLEMA 1.

Inscriba un círculo de diámetro d en un triángulo rectángulo de hipotenusa c y lados a y b , como se muestra en la figura.



Pruebe que $a + b = c + d$.

PROBLEMA 2.

Calcule la suma

$$[(2 \times 1000) - 1] + 2[(2 \times 1000) - 3] + 3[(2 \times 1000) - 5] + \dots + 999[(2 \times 1000) - 1997] + 1000[(2 \times 1000) - 1999].$$

PROBLEMA 3.

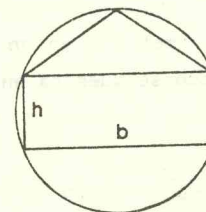
Encuentre un número de cuatro dígitos si se sabe que:

- i) La suma de los cuadrados de los dos dígitos extremos es igual a 13;
- ii) La suma de los cuadrados de los dos dígitos medios es igual a 85;
- iii) Si del número buscado se resta 1089, se obtiene un número que se escribe con los mismos dígitos, pero en orden contrario.

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 1.

Inscriba un rectángulo de base b y altura h y un triángulo isósceles de base b en un círculo de radio uno, como se muestra en la figura.



¿Para qué valor de h , tienen la misma área el rectángulo y el triángulo?

PROBLEMA 2.

Agregue al final del número 523, otros tres dígitos, de tal manera que el número de seis dígitos resultante, sea múltiplo de 7, 8 y 9. Determine todas las soluciones.

PROBLEMA 3.

Sean a , b y c números reales tales que

$$\frac{1}{bc - a^2} + \frac{1}{ca - b^2} + \frac{1}{ab - c^2} = 0$$

Pruebe que:

$$\frac{1}{(bc - a^2)^2} + \frac{1}{(ca - b^2)^2} + \frac{1}{(ab - c^2)^2} = 0$$

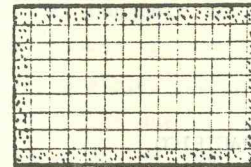
VI OLIMPIADA DE MATEMATICAS
CONCURSO ESTATAL DE JALISCO

PROBLEMA 1.

Al multiplicar un número de tres cifras por 7 se obtiene un número que termina a la derecha en 638. Encontrar ese número.

PROBLEMA 2.

Se dibuja un rectángulo (el término no excluye al cuadrado) en papel cuadriculado y se somborean las casillas del contorno. En este caso, el número de cuadrículas sombreadas es inferior al de las que

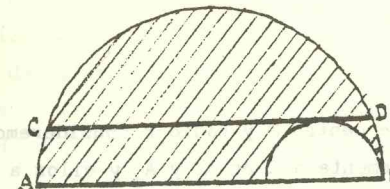


permanecen en blanco, en el interior. ¿Será posible dibujar un rectángulo de proporciones tales que el borde -de una casilla de anchura- contenga igual número de cuadrados que el rectángulo blanco

interior?. De ser así, la tarea consiste en hallar todas la soluciones.

PROBLEMA 3.

Calcular el área de la región sombreada, si sabemos que la cuerda CD de longitud 24 es paralela al diámetro AB y el semicírculo pequeño es tangente a la cuerda dada.



PROBLEMA 4.

Sea ABCD un cuadrilátero y M, N, P, Q, los puntos medios de AB, BC, CD y DA, respectivamente; K y L son los puntos medios de AC y BD. Las rectas PM y QN se cortan en O. Demostar que los puntos K, O y L están alineados y que $KO = OL$.

PROBLEMA 5.

Se pueden pintar todos los vértices de un cubo de blanco o bien de negro, o bien unos de blanco y otros de negro. ¿Cuántas formas distintas de pintado existen? (Dos cubos se consideran pintados de diferente manera, si no se les puede confundir, por más que giremos el cubo).

OLIMPIADA DE LA CUENCA DEL PACIFICO

MARZO DE 1992

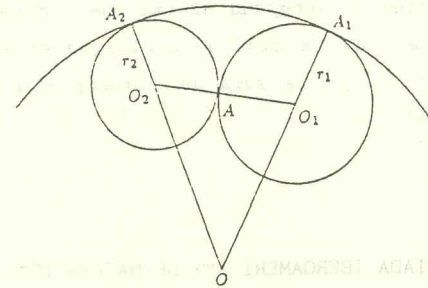
PREGUNTA 1.

Considere un triángulo cuyos lados están dados y se denotan por a, b y c. Sea S el semiperímetro, es decir $S = (a + b + c)/2$. Construya un triángulo cuyos lados midan $S-a$, $S-b$ y $S-c$. Este proceso se repite hasta que no se pueda construir un triángulo con la longitud de lados indicada. ¿Para qué triángulos iniciales este proceso se puede repetir una infinidad de veces?

PREGUNTA 2.

En el círculo C de centro O y radio r consideremos dos círculos C_1 y C_2 tangentes interiormente a C en A_1 y A_2 y ellos a su vez tangentes exteriormente en A. Sean O_1 , O_2 y r_1 , r_2 los centros y radios

respectivos de C_1 y C_2 . Pruebe que las rectas OA_1 , O_1A_2 y O_2A_1 son concurrentes.



PREGUNTA 3.

Sea n un entero tal que $n > 3$. Supongamos que se escogen tres números del conjunto $\{2, 3, \dots, n\}$. Usando esos tres números únicamente una vez y usando la suma, la multiplicación y los paréntesis, formemos todas las posibles combinaciones.

(a) Pruebe que si los tres números son mayores que $n/2$, entonces los valores de las combinaciones son distintos.

(b) Sea p un número primo tal que $p \leq \sqrt{n}$. Pruebe que el número de maneras de elegir tres números tal que el más pequeño sea p y los valores de las combinaciones no son todos distintos, es precisamente el número de divisores positivos de $p-1$.

PREGUNTA 4.

Determine todas las parejas (h, s) de números enteros positivos con las siguientes propiedades:

Si se dibujan h rectas horizontales y otras s que satisfacen

- (i) no son horizontales
- (ii) no hay dos de ellas paralelas
- (iii) no hay tres de las $h+s$ rectas concurrentes
- (iv) el número de regiones delimitadas por esas $h + s$ rectas es 1992.

PREGUNTA 5.

Encuentre la sucesión de longitud máxima que consiste de enteros distintos de cero en la cual la suma de cualesquiera siete términos consecutivos es positiva y que la suma de cualesquiera once términos consecutivos es negativa.

VII OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICAS

PRIMERA PRUEBA

PREGUNTA 1.

Para cada entero positivo n , sea a_n el último dígito del número $1 + 2 + 3 + \dots + n$.
Calcular $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{1992}$.

PREGUNTA 2.

Dadas la colección de n números reales tales que

$$0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$$

y la función

$$f(x) = \frac{a_1}{x + a_1} + \frac{a_2}{x + a_2} + \dots + \frac{a_n}{x + a_n},$$

determinar la suma de las longitudes de los intervalos, disjuntos dos a dos, formados por todos los x tales que $f(x) \geq 1$.

PREGUNTA 3.

En un triángulo equilátero ABC cuyo lado tiene longitud 2 se inscribe la circunferencia Γ .

a) Demostrar que para todo punto P de Γ la suma de los cuadrados de sus distancias a los vértices A, B y C es 5.

b) Demostrar que para todo punto P de Γ es posible construir un triángulo cuyos lados tienen las longitudes de los segmentos AP, BP y CP y que su área es $\sqrt{3}/4$.

VII OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICAS

SEGUNDA PRUEBA

PREGUNTA 4.

Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números enteros que verifican las siguientes condiciones:

- i) $a_0 = 0$; $b_0 = 8$.
- ii) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$; $b_{n+2} = 2b_{n+1} - b_n$
- iii) $a_n^2 + b_n^2$ es un cuadrado perfecto para todo n.

Determinar al menos dos valores del par (a_{1992}, b_{1992}) .

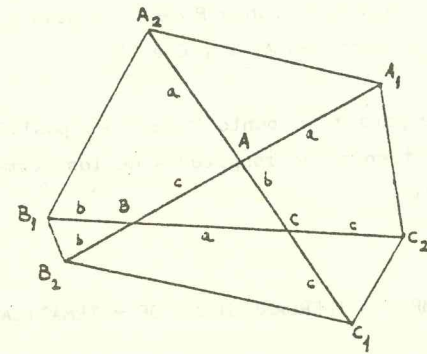
PREGUNTA 5.

Se da la circunferencia Γ y los números positivos h y m de modo que existe un trapecio ABCD inscrito en Γ , de altura h y en el que la suma de las bases AB y CD es m. Construir el trapecio ABCD.

PREGUNTA 6.

A partir del triángulo T de vértices A, B y C se construye el hexágono H de vértices A_1, A_2, B_1, C_1 y C_2 como se muestra en la figura. Demostrar que

área de H ≥ 13 (área de T).



XXXIII OLIMPIADA INTERNACIONAL

PRIMER DIA

PROBLEMA 1.

Hallar todos los enteros a, b, c con $1 < a < b < c$, tales que $(a-1)(b-1)(c-1)$ divide a $abc-1$

PROBLEMA 2.

Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Hallar todas las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que para todos x, y en $\mathbb{R}$ se verifica que:

$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2.$$

PROBLEMA 3.

Se consideran nueve puntos en el espacio, tales que no hay cuatro en un mismo plano. Cada dos puntos se unen por una arista (es decir, un segmento de recta). Cada arista o bien se colorea de azul a bien de rojo o se deja sin colorear. Hallar el menor valor de n tal que siempre que se colorean exactamente n aristas se tiene necesariamente

algún triángulo cuyas aristas son del mismo color.

XXXIII OLIMPIADA INTERNACIONAL

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4.

En el plano sean C una circunferencia, L una recta tangente a C y M un punto de L . Encontrar el lugar geométrico de los puntos P con la siguiente propiedad:

Existen dos puntos Q, R en L tales que M es el punto medio de QR y C es la circunferencia inscrita en el triángulo PQR .

PROBLEMA 5.

Sea S un conjunto finito de puntos en el espacio tridimensional con el sistema de coordenadas cartesianas. Sean S_x, S_y, S_z los conjuntos formados por las proyecciones ortogonales de los puntos de S sobre los planos yz, zx, xy , respectivamente. Demostrar que

$$|S|^2 \leq |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|,$$

donde $|A|$ denota el número de elementos del conjunto finito A .

Nota: La proyección ortogonal de un punto sobre un plano es el pie de la perpendicular trazada desde el punto al plano.

PROBLEMA 6.

Para cada entero positivo n , se define $S(n)$ como el mayor entero tal que, para todo entero k , $1 \leq k \leq S(n)$, n^2 puede escribirse como suma de k cuadrados estrictamente positivos.

(a) Demostrar que $S(n) \leq n^2 - 14$ para cada $n \geq 4$.

(b) Hallar un entero n tal que $S(n) = n^2 - 14$.

(c) Demostrar que hay un número infinito de enteros n tales que $S(n) = n^2 - 14$.

SOLUCIONES

SOLUCION DEL PROBLEMA 1.

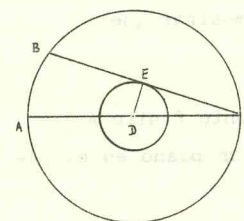
$$6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 = 6 \cdot 6^6 = 6^7$$

SOLUCION DEL PROBLEMA 2.

Como b es impar, $b-1$ es par y por lo tanto $(b-1)^2 \cdot c \equiv 0 \pmod{4}$. Como a es impar, $3^a \equiv 3 \pmod{4}$ y por lo tanto, el número $3^a + (b-1)^2 c$ deja residuo 3 al dividirse entre 4.

SOLUCION DEL PROBLEMA 3.

Sea D el centro de los círculos. Si dibujamos el radio del círculo pequeño desde D hacia el punto E de tangencia con BC , tenemos que DE



es perpendicular a BC . Así, $\triangle DEC$ y $\triangle ABC$ son triángulos rectángulos semejantes y de aquí que $\frac{DE}{AB} = \frac{CD}{CA} = \frac{1}{2}$.

Con esto se tiene que DE , el radio del círculo pequeño, es 6 ya que AB es 12.

Como la razón de los radios es 1:3, el radio del círculo grande es 18.

SOLUCION DEL PROBLEMA 4.

$$\frac{a + b^{-1}}{a^{-1} + b} = 13 \text{ implica que } \frac{a}{b} = 13 \text{ y de aquí que } a = 13b.$$

Como $a + b \leq 100$, se tiene que $14b \leq 100$, lo que implica que $b \leq 7$.

De aquí se deduce que las posibles parejas que satisfacen las condiciones son:

$(13,1)$, $(26,2)$, $(39,3)$, $(52,4)$, $(65,5)$, $(78,6)$, $(91,7)$.

SOLUCION DEL PROBLEMA 5.

$$1992 = 2^3 \cdot 3 \cdot 83; \quad 1992 \cdot 35 = 69720 = 2^3 \cdot 3 \cdot 83 \cdot 5 \cdot 7.$$

Cinco números que cumplen con las condiciones son:

$$69300 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$$

$$65520 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$$

$$60480 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$55440 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$$

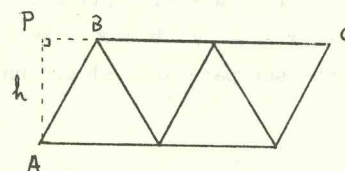
$$50400 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$$

SOLUCION DEL PROBLEMA 6.

Si llamamos P al pie de la perpendicular de A a BC , se tiene que AP mide $\sqrt{3}/2$ y CP mide $5/2$.

Así, tenemos que

$$AC = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{28}{4}} = \sqrt{7}.$$



SOLUCION DEL PROBLEMA 7.

De las condiciones (iii) y (iv) se tiene que

$$c - d - a - b < b - a - e - d,$$

de donde, $2c < 2b$ y $c < b$.

De (i), $b < a$, así $c < b < a$, por lo que, nuevamente por (iii) y (iv) tenemos que $c - d + a + b < b - a + c + d$ y $2a < 2d$, esto es, $a < d$.

Por otra parte, de (i) y (ii), $e - a + a > d - b + b$, así $e > d$ y por lo tanto, $c < b < a < d < e$.

SOLUCION DEL PROBLEMA 8.

Consideremos a^b , con a y b enteros; se tiene que $a^b = 1$ en los siguientes casos:

- i) $b = 0$, pero $a \neq 0$;
- ii) $a = 1$ y b es cualquier entero;
- iii) $a = -1$ y b es par.

Consideremos el problema $a = x^2 - 4x + 3$ y $b = x - 3y$.

i) $b = 0$ implica $x - 3y = 0$, es decir, $x = 3y$ con $y \in \mathbb{Z}$, pero $a = (x - 1)(x - 3)$ tiene que ser distinto de cero, así que $x \neq 1$ y $x \neq 3$; como $x = 3y$, las parejas que cumplen son del tipo $(3n, n)$ con $n \neq 1$.

ii) $a = 1$ implica $x^2 - 4x + 3 = 1$, esto es, $x^2 - 4x + 2 = 0$, pero esta ecuación no tiene soluciones enteras.

iii) $a = -1$ implica $x^2 - 4x + 3 = -1$, esto es, $(x - 2)^2 = 0$, esto es, $x = 2$ y $b = x - 3y = 2 - 3y$ tiene que ser par, por lo que y debe ser par. Así, el conjunto de soluciones es $(2, 2n)$ con $n \in \mathbb{Z}$.

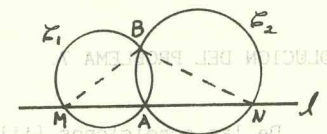
SOLUCION DEL PROBLEMA 9.

a)

$\angle AMB = \angle NMB$ pues interceptan al arco AB del círculo $\mathcal{C}_1$; como A y B son fijos, ese ángulo es fijo.

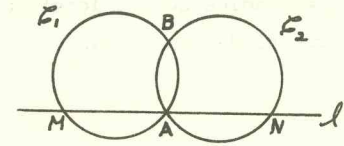
Análogamente $\angle ANB = \angle MNB$.

Por lo tanto, el tercer ángulo $\angle MBN = 180^\circ - (\angle MNB + \angle NMB)$, también es fijo. Los tres ángulos son invariantes al rotar ℓ .

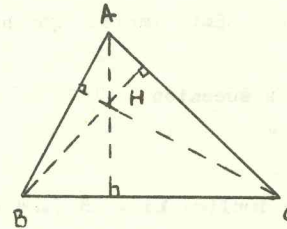


b)

Como $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ tienen el mismo radio, el arco AB en $\mathcal{C}_1$ es igual al arco AB en $\mathcal{C}_2$. Así que $\angle NMB = \angle MNB$ y el triángulo es isósceles, por lo tanto, $BM = BN$.



SOLUCION DEL PROBLEMA 10.



Observando la figura, se puede deducir fácilmente que:

$\triangle ABH$ tiene ortocentro C.

$\triangle ACH$ tiene ortocentro B.

$\triangle BCH$ tiene ortocentro A.

SOLUCION DEL PROBLEMA 11.

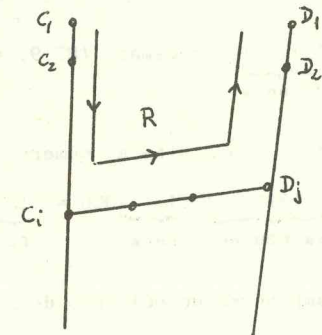
Sean $C_1, C_2, \dots, C_{M+1}$ y $D_1, D_2, \dots, D_{M+1}$ las ciudades de los caminos P_C y P_D , ambos de longitud M y supongamos, para obtener una contradicción, que P_C y P_D no tienen ciudades comunes. Según las condiciones, se tiene que poder volar de C_1 a D_1 así que tienen que haber ciudades C_i en P_C y D_j en P_D que están unidas por un camino al que llamamos Q .

Podemos suponer que C_1 está, al menos a la mitad del camino P_C (si no, unimos C_{M+1} con D_1) y que D_j está al menos a la mitad de P_D ,

es decir, $i \geq \frac{M+2}{2}$ y $j \geq \frac{M+2}{2}$.

Considere el camino R de C_1 a C_i por P_C , luego de C_i a D_j por Q y de D_j a D_1 por P_D . Este camino tiene al menos $i+j$ ciudades, así

$$i + j \geq \frac{M+2}{2} + \frac{M+2}{2} = M+2.$$



De aquí se tiene que R tiene longitud al menos M+1, lo cual contradice que la longitud máxima sea M. Por lo tanto, P_c y P_d tienen una ciudad en común.

SOLUCION DEL PROBLEMA 12.

Supongamos que $p \nmid d$. Por el algoritmo de la división, todo número dividido entre p deja residuo r, con $0 \leq r \leq p-1$. Esto implica que hay exactamente p residuos distintos.

Considerando p términos consecutivos de la sucesión

$$a_{i+k} = a_i + kd \quad \text{con } k = 0, 1, \dots, p-1$$

hay dos posibilidades:

1o.- $a_{i+k} \equiv a_{i+j} \pmod{p}$, con $k \neq j$ que implica $kd \equiv jd \pmod{p}$

y por lo tanto $k \equiv j \pmod{p}$ que es una contradicción.

2o.- $a_{i+k} \not\equiv a_{i+j} \pmod{p}$ si $k \neq j$ que implica $a_{i+k} \equiv 0 \pmod{p}$ para alguna $0 \leq k \leq p-1$.

SOLUCION DEL PROBLEMA 13.

La descomposición de 1992 como producto de primos es $2^3 \cdot 3 \cdot 83$.

Por otro lado, por el Teorema de Euler se tiene que

$$10^{\phi(83)} \equiv 1 \pmod{83}$$

como $\phi(83) = 82$ y $10^{82} - 1 = \underbrace{999\dots 9}_{82 \text{ nueves}} = 9 \underbrace{(111\dots 1)}_{82 \text{ unos}}$, entonces

$83 \mid 9 \underbrace{(111\dots 1)}_{82 \text{ unos}}$, además, $(83; 9) = 1$ implica que $83 \mid \underbrace{(111\dots 1)}_{82 \text{ unos}}$

Así, 83 divide al número

$$\underbrace{111\dots 111}_{82 \text{ unos}} \underbrace{\dots 111}_{82 \text{ unos}} \underbrace{\dots 1000}_{82 \text{ unos}} = \underbrace{(111\dots 1)}_{82 \text{ unos}} 10^{167} + \underbrace{(111\dots 1)}_{82 \text{ unos}} 10^{85} + \underbrace{(111\dots 1)}_{82 \text{ unos}} 10^3$$

que también es un múltiplo de 3 y de 8. De aquí que 1992 lo divide.

Agregando ceros al final, por ejemplo, se ve que hay una infinidad de números de esta forma que 1992 los divide.

SOLUCION DEL PROBLEMA 14.

Si $k = n = 0$ en (i), se tiene $f(0) + f(0) = 2f(0)f(0)$ y de aquí que $2f(0)(f(0)-1) = 0$. Por lo tanto, $f(0) = 0$ ó $f(0) = 1$.

1er. Caso: $f(0) = 0$

Sea $n = 0$ en (i), entonces $f(k) + f(k) = 2f(k)f(0) = 0$.

Por lo tanto, $f(k) = 0$, para toda $k \in \mathbb{Z}$.

2o. Caso: $f(0) = 1$

Sea $k = 0$ en (i), entonces $f(n) + f(-n) = 2f(0)f(n)$, lo que implica que $f(n) = f(-n)$. Así, basta determinar $f(n)$ para n positiva.

Sea $k = n$ en (i), entonces $f(2n) + f(0) = 2[f(n)]^2$ de aquí que

$$f(2n) = 2[f(n)]^2 - 1 \quad \dots (*)$$

Sea $n = 1$ en (i), entonces $f(k+1) + f(k-1) = 2f(k)f(1)$, así que

$$f(k+1) = 2f(k)f(1) - f(k-1) \quad \dots (**)$$

Si determinamos a $f(1)$, por (**), tenemos determinada a $f(k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Supongamos que $f(1) \geq 2$ ó $f(1) \leq -2$.

Por (*), $f(2) = 2[f(1)]^2 - 1 \geq 7$

$f(2^2) = 2[f(2)]^2 - 1 \geq 97$ y claramente $f(2m)$

va creciendo lo cual contradice (ii).

Así se tiene que, $f(1) = 0, 1$ ó -1 .

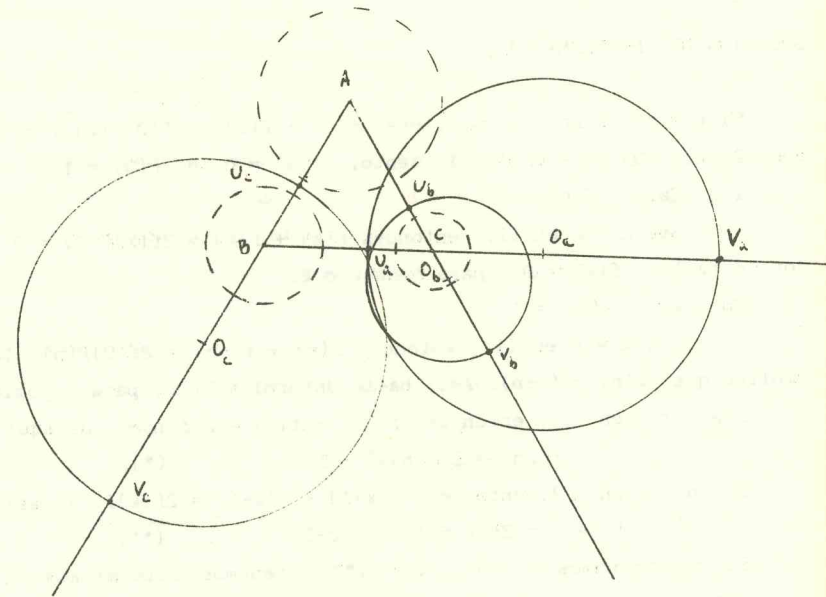
(1) $f(1) = 1$ Por (**), $f(k+1) = 2f(k) - f(k-1)$, así, $f(2) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$,
 $f(3) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$, ... esto es, $f(n) = 1, \forall n \in \mathbb{Z}$.

(2) $f(1) = -1$ Por (**), $f(k+1) = -2f(k) - f(k-1)$, así,
 $f(2) = -2f(1) - f(0) = -2(-1) - 1 = 1$,
 $f(3) = -2f(2) - f(1) = -2(1) - (-1) = -1$,
 $f(4) = -2(-1) - 1 = 1$, ... y por inducción
 $f(n) = (-1)^n$, para toda $n \in \mathbb{Z}$.

(3) $f(1) = 0$ Por (**), $f(k+1) = -f(k-1)$, así, $f(2) = -f(0) = -1$,
 $f(3) = -f(1) = 0$, $f(4) = -f(2) = 1$, ... y por inducción,
 $f(4m) = 1$, $f(4m+1) = 0$, $f(4m+2) = -1$,
 $f(4m+3) = 0$, $\forall m \in \mathbb{Z}$.

SOLUCION DEL PROBLEMA 15.

Primero construiremos una figura que describa el problema.



En la figura, U_c y V_c son los puntos que dividen al segmento AB en la razón r/s , uno interna y el otro externamente; O_c es el punto medio del segmento U_cV_c y es el centro del círculo de similitud de los círculos (A, r) y (B, s) . U_a , V_a , O_a , U_b , V_b y O_b se definen de manera análoga.

- a) Como O_a , O_b , O_c se encuentran, respectivamente, sobre los lados BC, CA, AB del triángulo tenemos, por el Teorema de Menelao, que serán colineales si:

$$\frac{AO_c}{O_cB} \cdot \frac{BO_a}{O_aC} \cdot \frac{CO_b}{O_bA} = -1 \quad \dots \dots \dots (*)$$

Esta ecuación, desde luego se satisface si:

$$\frac{AO_c}{O_cB} = -\frac{r^2}{s^2}, \quad \frac{BO_a}{O_aC} = -\frac{s^2}{t^2} \quad \text{y} \quad \frac{CO_b}{O_bA} = -\frac{t^2}{r^2} \quad \dots \dots \dots (**)$$

Bastará entonces demostrar una de estas igualdades y las demás se tendrán por analogía.

Para determinar $\frac{AO_c}{O_c B}$, como $AO_c = AU_c + U_c O_c$ y $O_c B = O_c U_c + U_c B$ debemos encontrar AU_c , $U_c O_c$ y $U_c B$.

$$\text{Sabemos que } \frac{AU_c}{U_c B} = \frac{r}{s}, \text{ luego } \frac{AB}{U_c B} = \frac{r}{s} + 1 = \frac{r+s}{s}$$

$$\text{y como } AB = 1, \text{ se tiene que: } U_c B = \frac{s}{r+s} \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{como } \frac{AU_c}{U_c B} = \frac{r}{s}, \text{ por (1) se tiene que } AU_c = \frac{r}{r+s} \quad \dots \dots \dots (2)$$

En forma semejante y usando que $\frac{AV_c}{V_c B} = -\frac{r}{s}$, se demuestra que:

$$AV_c = \frac{r}{r-s} \text{ y } V_c B = \frac{s}{s-r} \quad \dots \dots \dots (3)$$

El radio ρ_c del círculo de similitud de (A,r) y (B,s) es:

$$\begin{aligned} \rho_c &= U_c O_c = O_c V_c = \frac{1}{2} \cdot U_c V_c = \frac{1}{2} \cdot (U_c B + BV_c) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{s}{r+s} + \frac{s}{r-s} \right) = \frac{rs}{r^2-s^2} \quad \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

$$\text{Finalmente, } AO_c = AU_c + U_c O_c = \frac{r}{r+s} + \frac{rs}{r^2-s^2} = \frac{r^2}{r^2-s^2} \quad \dots \dots (5)$$

$$O_c B = O_c U_c + U_c B = \frac{-rs}{r^2-s^2} + \frac{s}{r+s} = \frac{-s^2}{r^2-s^2} \quad \dots \dots (6)$$

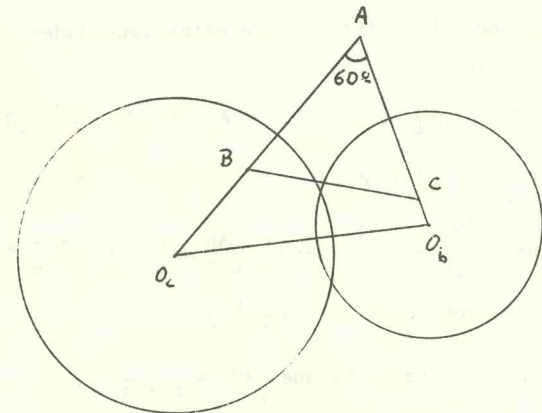
$$\text{y por tanto, } \frac{AO_c}{O_c B} = -\frac{r^2}{s^2}, \text{ con lo que termina la demostración de (a).}$$

b) Primero recordemos que el círculo de similitud de dos círculos (A,r), (B,s) coincide con el conjunto de puntos X del plano que satisfacen $\frac{AX}{BX} = \frac{r}{s}$, por lo que los tres círculos de similitud son:

$$\mathcal{C}_{AB} = \left\{ X \mid \frac{AX}{BX} = \frac{r}{s} \right\}, \quad \mathcal{C}_{BC} = \left\{ X \mid \frac{BX}{CX} = \frac{s}{t} \right\} \text{ y } \mathcal{C}_{CA} = \left\{ X \mid \frac{CX}{AX} = \frac{t}{r} \right\}$$

y es entonces inmediato que los tres círculos se intersectan si dos de ellos lo hacen.

Considerando ρ_c y ρ_b los radios de los círculos de similitud de (A,r) y (B,s), y, (A,r) y (C,t), respectivamente, se tiene que (O_c, ρ_c) y (O_b, ρ_b) se intersectan si y sólo si $O_b O_c \leq \rho_b + \rho_c \quad \dots \dots (7)$



Por la ley de los cosenos:

$$O_b O_c^2 = (O_b C + CA)^2 + (AB + BO_c)^2 - 2(O_b C + CA)(AB + BO_c) \cos(60^\circ) \quad \dots (8)$$

pero por (5), se tiene que: $O_b C = \frac{t^2}{r^2 - t^2}$ y $BO_c = \frac{s^2}{r^2 - s^2}$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} O_b O_c^2 &= \left(\frac{t^2}{r^2 - t^2} + 1 \right)^2 + \left(1 + \frac{s^2}{r^2 - s^2} \right)^2 - 2 \left(\frac{t^2}{r^2 - t^2} + 1 \right) \left(1 + \frac{s^2}{r^2 - s^2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) = \\ &= \left(\frac{r^2}{r^2 - t^2} \right)^2 + \left(\frac{r^2}{r^2 - s^2} \right)^2 - \left(\frac{r^2}{r^2 - t^2} \right) \left(\frac{r^2}{r^2 - s^2} \right) = \\ &= \left(\frac{t^4}{(r^2 - t^2)^2 (r^2 - s^2)^2} \right) \left[(r^2 - s^2)^2 + (r^2 - t^2)^2 - (r^2 - s^2)(r^2 - t^2) \right] \end{aligned}$$

Por otro lado, como $\rho_b = \frac{rt}{r^2 - t^2}$ y $\rho_c = \frac{rs}{r^2 - s^2}$, se tiene que (7)

es equivalente a:

$$r^2 \left[(r^2 - s^2)^2 + (r^2 - t^2)^2 - (r^2 - s^2)(r^2 - t^2) \right] \leq \left[s(r^2 - t^2) + t(r^2 - s^2) \right]^2$$

✧

$$r^2(r^2 - s^2)(t^2 - s^2) + (r^2 - t^2)^2 r^2 \leq s^2(r^2 - t^2)^2 + 2st(r^2 - t^2)(r^2 - s^2) + t^2(r^2 - s^2)^2$$

✧

$$(r^2 - s^2) \left(r^2(t^2 - s^2) - t^2(r^2 - s^2) \right) + (r^2 - t^2)^2(r^2 - s^2) \leq 2st(r^2 - t^2)(r^2 - s^2)$$

✧

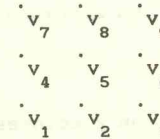
$$(r^2 - s^2)(r^2 - t^2)(r^2 - t^2 - s^2) \leq 2st(r^2 - t^2)(r^2 - s^2)$$

✧ $(r^2 - t^2 - s^2) \leq 2st$ ✧ $r^2 \leq (s + t)^2$ que es la condición dada.

SOLUCION DEL PROBLEMA 16.

Primero veremos que en un cuadrado de 2×2 siempre existe un triángulo rectángulo con sus tres vértices del mismo color.

Sean los vértices de la cuadrícula del cuadrado numerados de la siguiente forma:



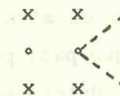
y sean "x" y "o" los dos colores distintos.

Sin perder generalidad podemos suponer dos casos: que v_1 y v_2 son del mismo color, o que v_2 y v_4 son del mismo color.

1er Caso.- Sea (x) el color de v_1 y v_2 , entonces v_4 y v_5 tienen color

(o) ya que si no se formarían los triángulos $v_1v_2v_4$ ó $v_1v_2v_5$ habríamos terminado; igualmente v_7 y v_8 tienen color (x) para no formar los triángulos $v_4v_5v_6$ ó $v_4v_5v_8$ del mismo color. v_9 y v_3 son de color (o) ya que si no estarían los triángulos $v_1v_7v_9$ o $v_1v_3v_7$ con los vértices del mismo color.

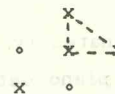
Se forma de todas formas el triángulo $v_3v_5v_7$ cuyos tres vértices son de color (o):



2o. Caso.- Sean v_2 y v_4 de color (o), esto fuerza a que v_1 y v_5 sean de

color (x) ya que si no se formarían $v_4v_2v_5$ ó $v_1v_2v_4$ isósceles del mismo color; igualmente v_6 y v_8 tendrían que ser de color (x) ya que si no se formarían los triángulos $v_2v_4v_6$ ó $v_2v_4v_8$.

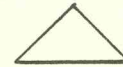
Por lo tanto se forma el triángulo $v_5v_6v_8$ que tiene de color (x) todos sus vértices:



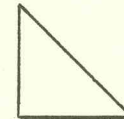
Ahora, existen 24 tipos distintos de triángulos que caben en un cuadro de 2×2 :



y sus 4 rotaciones con 2 colores que dan 8 triángulos



y sus 4 rotaciones con 2 colores que dan 8 triángulos

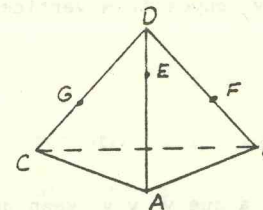


y sus 4 rotaciones con 2 colores que dan 8 triángulos

que representan un total de 24 triángulos distintos posibles.

Como la cuadrícula de 10×10 se puede partir en 25 cuadrados de 2×2 , por el principio de las casillas existen 2 cuadrados que contienen cada uno un triángulo del mismo tipo y por lo tanto el problema queda resuelto.

SOLUCION DEL PROBLEMA 17.



Como A, B, C, E son cuatro puntos no todos en el mismo plano, hay una única esfera que pasa por todos ellos.

A, B y E determinan un plano y ese plano corta a la esfera en un círculo.

Como tres puntos determinan de manera única un círculo, el único círculo que pasa por A, B y E es éste. Así que F pertenece a la esfera.

Análogamente con el plano determinado por los puntos A, C y E, al ser ACGE cíclico, G está en el círculo ACE y por lo tanto en la esfera.

Finalmente, B, C, G y F son coplanares (ya que todos están en el plano determinado por C, B y D) y el plano determinado por C, B y D corta a la esfera en un círculo, así que B, C, G y F están todos en ese círculo y por lo tanto BCGF es cíclico.

SOLUCION DEL PROBLEMA 18.

En este problema, se pueden considerar entre las soluciones posibles aquellas que contengan cero a la izquierda o pensar que no se considera esta posibilidad.

Primera solución: Considerando los números que tienen cero a la izquierda.

El problema es equivalente a contar cuántas soluciones enteras hay de la ecuación

$$2x_1 + 2x_2 + \dots + 2x_k + x_{k+1} = 9$$

con $x_i \geq 0$, $\forall i = 1, 2, \dots, k+1$,

que es equivalente a encontrar las soluciones enteras de

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = \frac{9 - x_{k+1}}{2}, \quad \text{con } x_i \geq 0.$$

De aquí que x_{k+1} debe ser impar, esto es, $x_{k+1} = 9, 7, 5, 3, 1$ y analizando cada caso se tiene que el número de soluciones es:

$$\begin{pmatrix} 1987 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1988 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1989 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1990 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1991 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1992 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Segunda solución: Sin considerar a los números que tienen cero a la izquierda.

Al igual que en el anterior, se pueden contar estos números contando las soluciones de la ecuación

$$2x_1 + 2x_2 + \dots + 2x_k + x_{k+1} = 9$$

con $x_i \geq 0$, $\forall i = 2, 3, \dots, k+1$, y $x_1 > 0$.

Esto es equivalente a contar el número de soluciones enteras de la ecuación

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = \frac{9 - x_{k+1}}{2} - 1, \quad \text{con } x_i \geq 0.$$

$$\text{De éstas hay: } \begin{pmatrix} 1987 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1988 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1989 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1990 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1991 \\ 3 \end{pmatrix}$$

SOLUCION DEL PROBLEMA 19.

Como, por hipótesis, $\angle BAD = \angle EAC$
 y, por otra parte, $\angle BAE = \angle BAD + \angle DAE$,
 y $\angle DAC = \angle DAE + \angle EAC$ se tiene que
 $\angle BAE = \angle DAC$. Además, $\angle ABC = \angle ADC$, ya que
 subtienen el mismo arco. Por lo tanto,
 el $\triangle ABN$ es semejante al $\triangle ADC$, de donde,

$$\frac{BN}{AB} = \frac{CD}{AD} \dots \dots \dots (1)$$

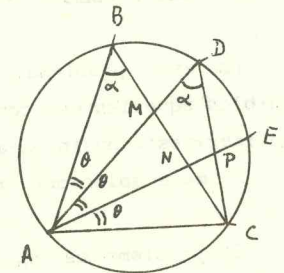
También se tiene que $\triangle ABM \sim \triangle ADP$, pues tienen dos ángulos
 iguales, así que

$$\frac{BM}{AB} = \frac{PD}{AD} = \frac{CD - CP}{AD} \dots \dots \dots (2)$$

Dividiendo (2) entre (1) queda:

$$\frac{BM}{BN} = \frac{CD - CP}{CD} = 1 - \frac{CP}{CD}$$

$$\text{Por lo tanto, } \frac{BM}{BN} + \frac{CP}{CD} = 1$$



SOLUCION DEL PROBLEMA 20.

Despejando x de la ecuación $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1992}$ tenemos que

$$x = \frac{1992y}{y - 1992}$$

de donde, $y \neq 1992$.

Sea $y = 1992 + y'$, con $y' \in \mathbb{Z}$, $y' \neq 0$. Entonces

$$x = \frac{(1992 + y') \cdot 1992}{1992 + y' - 1992} = \frac{1992^2 + 1992y'}{y'} = \frac{1992^2}{y'} + 1992$$

Por lo tanto, y' divide a 1992^2 .

Como $1992^2 = \left((2^2)(3)(83) \right)^2 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 83^2$, entonces 1992^2 tiene
 $(6+1)(2+1)(2+1) = 63$ divisores positivos, por lo que hay 126
 posibilidades para y' y cada una de ellas determina una solución de la
 ecuación original; de aquí que las soluciones son de la forma:

$$(x, y) = \left(\frac{1992^2}{y'} + 1992, y' + 1992 \right), \text{ tales que } y' | 1992.$$

SOLUCION DEL PROBLEMA 21.

Las sucesiones binarias de n cifras se pueden partir en dos tipos: las que sean capicúas y las que no.

De las primeras, si n es impar hay $2^{(n+1)/2}$ y $2^{n/2}$ si n es par.

El número de sucesiones no capicúas es el complemento, es decir, $2^n - 2^{(n+1)/2}$ si n es impar o $2^n - 2^{n/2}$ si n es par.

Como cada sucesión capicúa es equivalente sólo a ella misma y si una sucesión no es capicúa solamente es equivalente a su reflejada, entonces el número de distintas clases es

$$\begin{aligned} & \frac{2^{(n+1)/2} + 2^{(n+1)/2}}{2} \text{ si } n \text{ es impar o} \\ & \frac{2^n + 2^n - 2^{n/2}}{2} \text{ si } n \text{ es par.} \end{aligned}$$

SOLUCION DEL PROBLEMA 22.

Probaremos primero que para toda $n \geq 1$, $a_n = n!(1 + F_1 + \dots + F_n)$, considerando $F_1 = F_2 = 1$ y $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Si $n = 1$, entonces $a_1 = 1 \cdot a_0 + 1 \cdot F_1 = 2 = 1!(1 + F_1)$.

Supongamos que $n \geq 1$ y $a_n = n!(1 + F_1 + \dots + F_n)$, entonces

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (n+1)a_n + (n+1)!F_{n+1} \\ &= (n+1)n!(1 + F_1 + \dots + F_n) + (n+1)!F_{n+1} \\ &= (n+1)!(1 + F_1 + \dots + F_n + F_{n+1}). \end{aligned}$$

Así se tiene la igualdad deseada.

Un resultado conocido, que también se prueba por inducción es que

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1,$$

de aquí que $a_n = n!F_{n+2}$, para toda $n \geq 0$.

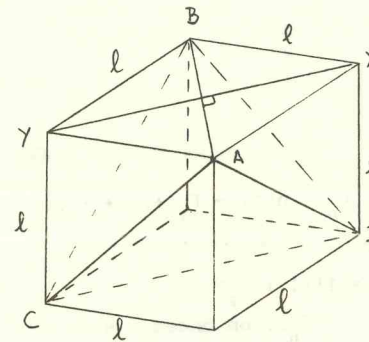
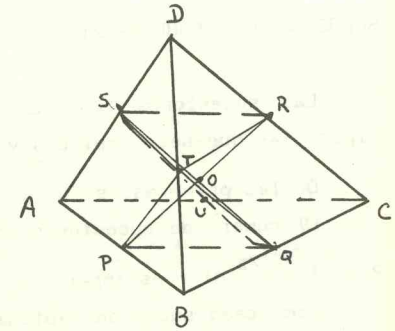
SOLUCION DEL PROBLEMA 23.

Sean P, Q, R, S, T y U los puntos medios de los lados AB, BC, CD, DA, BD y AC, respectivamente.

PQ es paralelo a AC por se P y Q puntos medios de AC y BC, respectivamente. Análogamente, SR es paralelo a AC, por lo que PQ es paralelo a SR. De igual forma PS es paralelo a QR. Así, PQRS es un paralelogramo que está sobre la esfera (por hipótesis) y en el plano que determinan P, Q, R (y S), luego deberá ser un rectángulo.

Por lo tanto, PQ es perpendicular a QR y AC es perpendicular a BD. Análogamente, BC es perpendicular a AD y AB es perpendicular a DC. Por lo tanto, el tetraedro es ortogonal.

Por otra parte, las diagonales se intersectan en G, el centro del tetraedro que, desde luego, es el centro de la esfera PQRSTU.



Además, el tetraedro está inscrito en un paralelepípedo de diagonales ortogonales, ya que como CD es paralelo a XY (ver figura) y ya se probó que AB es perpendicular a CD, entonces XY es perpendicular a AB. De aquí que, los lados del paralelepípedo son todos iguales; sea l su medida.

Así, por la Ley del Paralelogramo, $AB^2 + CD^2 = AX^2 + XB^2 + BY^2 + YA^2 = 4l^2$.

Con esto quedan probadas las últimas igualdades.

SOLUCION DEL PROBLEMA 24.

Usando la cifra 1 podemos construir sólo un número con sus cifras estrictamente crecientes. Usando el 1 y el 2, podemos construir los números 1, 2 y 12. Usando el 1, 2 y 3, podemos construir los que ya tenemos 1, 2 y 12, esos mismos agregándoles un 3 al final, es decir, 13, 23 y 123 y el número 3, por lo que con estos tres números podemos formar $7 = 2^3 - 1$ números. Con el mismo razonamiento resulta que con 1

circa podemos formar $2(2^{i-1}-1) + 1 = 2^i - 1$ números.

Para calcular la suma, en cada uno de los números sumamos por separado sus unidades, sus decenas, sus centenas, etc.. Ahora tomamos una $i \in \{1, 2, \dots, 9\}$; para ver cuál es la aportación en la suma total de los números que tienen a i , tenemos que ver cuántas veces aparece i en las unidades, en las decenas, etc..

Para que i aparezca en las unidades se necesita que a su izquierda no haya nada o que haya un número formado con las cifras 1, 2, ..., $i-1$. Por lo tanto hay $1 + 2^{i-1} - 1 = 2^{i-1}$ números que tienen a i en las unidades. Observemos que para formar un número que tenga a i en las decenas, a su izquierda podemos poner cualquiera de los 2^{i-1} números previamente mencionados y a su derecha tenemos que poner cualquiera de los números $i+1, \dots, 9$, lo cual nos da $\binom{9-i}{1}$ elecciones para el lado derecho. Por tanto, i aparece $2^{i-1} \binom{9-i}{1}$ veces en las decenas y análogamente $2^{i-1} \binom{9-i}{2}$ veces en las centenas, etc.. De manera que en la suma total, i aparece multiplicado por

$$2^{i-1} + 2^{i-1} \binom{9-i}{1} 10 + 2^{i-1} \binom{9-i}{2} 10^2 + \dots + 2^{i-1} \binom{9-i}{9-i} 10^{9-i} = 2^{i-1} (1+10)^{9-i} \\ = 2^{i-1} (11)^{9-i}$$

y de aquí se sigue inmediatamente la igualdad que se quería probar.

SOLUCION DEL PROBLEMA 25.

Analizamos los residuos de $10^{10^k} \pmod{7}$.

Para ello vemos que:

$$10 \equiv 3 \pmod{7}$$

$$10^2 \equiv 2 \pmod{7}$$

$$10^3 \equiv 6 \pmod{7}$$

$$10^5 = 10^3 \cdot 10^2 \equiv 6 \cdot 2 \equiv 5 \pmod{7}$$

$$10^{10} = 10^5 \cdot 10^5 \equiv 5 \cdot 5 \equiv 4 \pmod{7}$$

$$\text{Entonces } 10^{10^2} \equiv 4^{10} \pmod{7} \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{puesto que } 10^{10^2} = 10^{100} = (10^{10})^{10} \equiv 4^{10} \pmod{7}.$$

Ahora, los residuos $\pmod{7}$ de 4^i son:

$$4^1 \equiv 4 \pmod{7}$$

$$4^2 = 16 \equiv 2 \pmod{7}$$

$$4^3 \equiv 4 \cdot 2 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$4^4 \equiv 4 \cdot 1 \equiv 4 \pmod{7}, \text{ etc.}$$

Así, en general se tiene que:

$$4^i \equiv 4 \pmod{7} \text{ si } i \equiv 1 \pmod{3}$$

$$4^i \equiv 2 \pmod{7} \text{ si } i \equiv 2 \pmod{3}$$

$$4^i \equiv 1 \pmod{7} \text{ si } i \equiv 0 \pmod{3}$$

Volviendo a la congruencia (1), tenemos que como $10 \equiv 1 \pmod{3}$,

$$10^{10^2} \equiv 4 \pmod{7}$$

En general, $10^k \equiv 1 \pmod{3}$ por lo que $10^{10^k} \equiv 4 \pmod{7} \quad \forall k \geq 0$.

Así, en la suma

$$10^{10} + 10^{10^2} + 10^{10^3} + \dots + 10^{10^r} \equiv 4 + 4 + \dots + 4 \equiv 4r \pmod{7}$$

Por lo tanto, $4r \equiv 0 \pmod{7}$ si y sólo si $r \equiv 0 \pmod{7}$ y así queda probado el resultado en los dos sentidos.

SOLUCION DEL PROBLEMA 26.

Sea $S = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1}$. Fácilmente se ve que

$$S \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} < \frac{2(n+1)}{n+1} = 2$$

Por otra parte, S se puede asociar de la siguiente manera, sumando el primer término con el último, el segundo con el penúltimo, etc.

$$S = \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{3n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{3n} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+2} \right) + \frac{1}{2n+1}$$

Usando la desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1+k} + \frac{1}{3n+1-k} &= \frac{4n+2}{(n+1+k)(3n+1-k)} \geq \frac{4n+2}{\left(\frac{n+1+k+3n+1-k}{2} \right)^2} = \frac{4(4n+2)}{(4n+2)^2} \\ &= \frac{2}{2n+1} \end{aligned}$$

$$\text{Así, } S \geq n \cdot \frac{2}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} = 1.$$

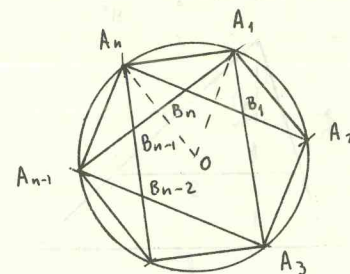
Nótese que la igualdad se cumple si $n+1+k = 3n+1-k$ para cada k , lo cual es imposible.

SOLUCION AL PROBLEMA 27.

Se obtiene cero independientemente del número del que se parte. La idea es la siguiente: los ceros a la derecha son irrelevantes; suprimidos los unos (si hay alguno) el número que resulta es menor que el original; si a la derecha tenemos 3, 7 ó 9, al multiplicar por 7, 3 y 9 respectivamente y suprimir los unos obtenemos 2, 2 u 8, respectivamente. Si a la derecha tenemos un número par, al multiplicar por 5 y cancelar unos, obtenemos un número menor que el original y si termina en 5 multiplicamos por 2 y obtengo un cero a la derecha el cual es irrelevante. En todos los casos puedo reducir el número hasta obtener cero.

SOLUCION AL PROBLEMA 28.

Por claridad para la figura tomemos un hexágono regular:



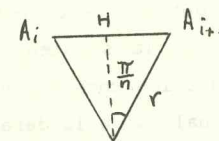
Denotemos los vértices por $A_1, \dots, A_n$ y la intersección de las diagonales $A_1 A_{1+2}$ con $A_{1-1} A_{1+2}$ por B_1 con la salvedad de que B_1 es $A_1 A_3$ intersección con $A_2 A_n$ y B_n es $A_n A_2$ con $A_{n-1} A_1$.

Es claro que se tiene n puntos del tipo B_i y como el polígono es regular, los ángulos del tipo $A_{i-1} A_i A_{i+2}$ son todos iguales, así que todos los triángulos del tipo $A_{i-1} A_i B_i$ son iguales y de donde los segmentos $A_i B_{i-1}$ son iguales a $A_i B_i$ y con esto los triángulos del tipo $A_i B_{i-1} B_i$ son congruentes ya que los ángulos correspondientes también son congruentes así, los lados $B_i B_{i+1}$ son todos iguales lo mismo que los ángulos $B_{i-1} B_i B_{i+1}$. Con esto se ve que los vértices B_i forman un polígono regular de n lados y tiene que ser semejante al polígono formado por las A_i .

Para encontrar la relación de las áreas de los polígonos basta

encontrar la relación de las áreas de los triángulos $OA_i A_{i+1}$ y $OB_i B_{i+1}$.

La altura de $OA_i A_{i+1}$ es, por el teorema de Pitágoras, $OH = \frac{\sqrt{4r^2 - l^2}}{2}$, donde l es la longitud de $A_i A_{i+1}$ y r el radio del círculo circunscrito.

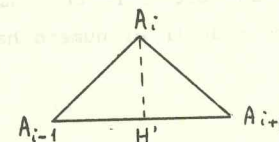


Notemos ahora que $OH' = r - A_i H'$, pero $A_i H'$ es la altura del triángulo $A_{i-1} A_i A_{i+1}$ y sabemos que el ángulo $A_{i-1} A_i A_{i+1}$ es igual a

$$\alpha/n, \text{ así que } \sin(\alpha/n) = \frac{A_i H'}{A_{i-1} A_i} = \frac{A_i H'}{l};$$

pero como $A_{i-1} O A_i$ mide $2\alpha/n$, entonces

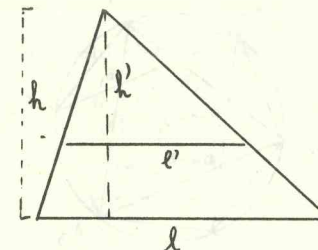
$$OHA_i \text{ mide } \alpha/n \text{ y } \sin(\alpha/n) = \frac{l/2}{r}, \text{ así } A_i H' = l^2/2r \text{ de modo que } OH' = r - \frac{l^2}{2r}.$$



Recordemos que la razón de las áreas de dos triángulos semejantes es el cuadrado de las alturas; ya que

$$\frac{A'}{A} = \frac{H' l'}{H l} \text{ y como } \frac{H'}{H} = \frac{l'}{l}, \quad l' = \frac{H' l}{H}, \text{ se tiene que } \frac{A'}{A} = \frac{H'^2}{H^2}$$

$$\begin{aligned} \text{De modo que } \frac{A'}{A} &= \frac{\frac{4r^2 - l^2}{4}}{\left(r - \frac{l^2}{2r}\right)^2} = \\ &= \frac{r^2(4r^2 - l^2)}{(2r^2 - l^2)^2} \end{aligned}$$



SOLUCION AL PROBLEMA 29.

Como n es par, dividiendo por 6 resulta $n = 6k$ o $n = 6k + 2$ o $n = 6k + 4$.

Ahora bien, $6k$ es abundante para todo natural k , pues entre los divisores de $6k$ se encuentran 1, k , $2k$, $3k$, $6k$, todos distintos y cuya suma es mayor que $2 \cdot 6k$. Luego, si $n = 6k$ y $k \geq 2$ tenemos $n = 6k = 6 \cdot 2 + 6(k-2)$ y cada término es abundante. Si $n = 6k+2$ y $k \geq 5$,

tenemos $n = 6k + 2 = 6 \cdot 3 + 6(k-3) + 2 = 20 + 6(k-3)$, y como 20 es abundante, resulta que n es la suma de dos abundantes.

Si $n = 6k + 4$ y $k \geq 8$, tenemos

$$n = 6k + 4 = 6 \cdot 6 + 6(k-6) + 4 = 40 + 6(k-6),$$

como 40 es abundante, n también es la suma de dos abundantes.

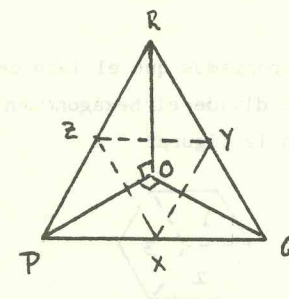
SOLUCION DEL PROBLEMA 30.

En el triángulo PQR, se observa que $YZ = \frac{1}{2} PQ \dots \dots \dots (1)$

En el triángulo rectángulo POQ se tiene que

$$OX = OQ = \frac{1}{2} PQ \dots \dots \dots (2)$$

pues ambos son radios de la misma circunferencia.



Por (1) y (2) se tiene que $YZ = OX$ y análogamente se prueba que $XY = OZ$ y que $ZX = OY$.

Como cada cara del tetraedro OXYZ se forma tomando un segmento de cada uno de los tres siguientes conjuntos:

$$\{YZ, OX\}, \{XY, OZ\}, \{ZX, OY\}$$

se tiene que todas sus caras son iguales.



SOLUCION DEL PROBLEMA 31.

- 1o. Si $a \equiv b \equiv 0 \pmod{p}$, entonces hay p^2 soluciones posibles.
- 2o. Si $a \not\equiv 0$ o $b \not\equiv 0 \pmod{p}$, entonces hay $p^2 - 1$ posibilidades para a y b , y para c y d se tienen tres casos posibles:
 - 1er Caso.- Si $a \equiv 0 \pmod{p}$, $b \not\equiv 0 \pmod{p}$, entonces en la congruencia $ad \equiv bc \pmod{p}$, $c \equiv 0 \pmod{p}$ y d tiene p posibilidades.
 - 2o. Caso.- Si $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ y $b \equiv 0 \pmod{p}$, en forma análoga al anterior se tiene que en $ad \equiv bc \pmod{p}$, $d \equiv 0 \pmod{p}$

y c tiene p posibilidades.

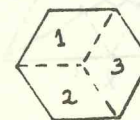
3er Caso.- Si $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ y $b \not\equiv 0 \pmod{p}$, entonces en la congruencia $ad \equiv bc \pmod{p}$, por cada $c \pmod{p}$ existe una única $d \pmod{p}$ que satisface, y por lo tanto, hay p posibles parejas.

Así se ve que en total hay $p^2 + (p^2 - 1) \cdot p$ cuartetos distintas.

SOLUCION DEL PROBLEMA 32.

Supongamos que el lado del hexágono es uno.

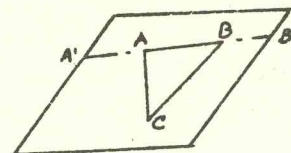
- 1o. Se divide el hexágono en tres partes congruentes como se muestra en la figura:



Al dividir el hexágono en tres partes se debe tener que en alguna hay tres puntos (por el principio de las casillas).

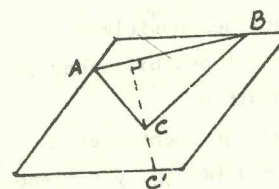
Supongamos que es en (1).

- 2o. El área del triángulo formado por tres puntos dentro de (1) es mayor si los puntos están en las orillas de (1).

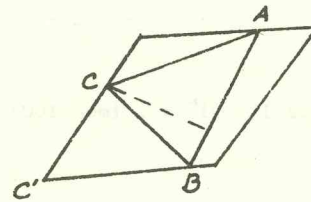


En efecto, si todos los puntos son interiores se prolonga por ejemplo el segmento AB hasta intersectar los lados del rombo en A' y B' , respectivamente, y el área del triángulo $A'B'C$ es mayor que la del ABC . Análogamente se puede agrandar el área si A o B son interiores y el otro queda en una orilla.

Si A y B están en la orilla, pero C no, entonces al mover C sobre la perpendicular a AB por C tocará en un punto C' a la orilla (si nos desplazamos en el lado en que está C), el área del triángulo ABC' es mayor que la del triángulo ABC (pues tiene una mayor altura).

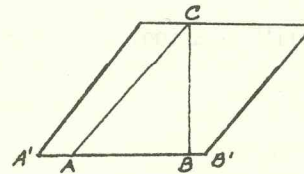


30. El área del triángulo será mayor cuando dos puntos estén sobre un mismo lado del rombo.



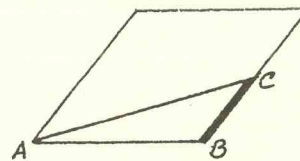
Si dos puntos están en dos lados paralelos del rombo, digamos A y B, al desplazar el punto C sobre el lado del rombo llegará C a un vértice C' del rombo donde se tendrá que el área del triángulo ABC' es mayor o igual que la del ABC.

40. El área es mayor cuando dos vértices del triángulo coinciden con dos vértices del rombo.



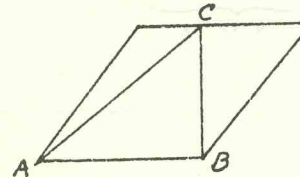
Sabemos que hay dos vértices del triángulo en un lado, digamos A y B. Si pensamos en AB como base del triángulo ABC, el área es mayor si la base es igual al lado del rombo.

50. El área es mayor cuando dos vértices A y B coinciden con dos vértices consecutivos del rombo y C está en el lado paralelo al que se encuentran A y B.



C puede estar como se indica o bien en un lado del rombo adyacente a la base AB. En este último caso, al recorrer C sobre el lado hasta el vértice del rombo se obtiene un triángulo de mayor área.

60. El área del triángulo de área mayor es $\frac{1}{6}$ del área del hexágono.



El área del triángulo ABC es $\frac{AB \cdot h}{2}$ que es la mitad del área del rombo, que a su vez es $\frac{1}{3}$ del área del hexágono.

SOLUCION DEL PROBLEMA 33.

Nótese que $11 \dots 1 = 11 \dots 100 + 11 = n + 11$, donde $n = 11 \dots 100$ y de aquí que $11 \dots 1^{n+11} = (11 \dots 1^n) \cdot (11 \dots 1^{11})$.

Además, $11\dots 1 = 11\dots 10 + 1$ y de aquí que

$$\begin{aligned} 11\dots 1^{100} &= (11\dots 10 + 1)^{100} \\ &= (11\dots 10)^{100} + 100(11\dots 10)^{99} + \dots + 100(11\dots 10) + 1 \\ &\equiv 1 \pmod{100} \end{aligned}$$

Como $11\dots 1^{100} \equiv 1 \pmod{100}$ se tiene que $11\dots 1^n \equiv 1 \pmod{100}$ y por lo tanto, $11\dots 1^{n+11} \equiv 11\dots 1^{11} \pmod{100}$, esto es,

$$\underbrace{11\dots 1}_{r \text{ cifras}}^{\overbrace{11\dots 1}^{r \text{ cifras}}} \equiv \underbrace{11\dots 1}_{r \text{ cifras}}^{11} \pmod{100} \dots (1)$$

$$\text{Por otro lado, } \underbrace{11\dots 1}_{r \text{ cifras}}^{11} = (n + 11)^{11} \equiv 11^{11} \pmod{100} \dots (2)$$

ya que $n \equiv 0 \pmod{100}$.

Así mismo se tiene que

$$(10 + 1)^{11} = \sum_{i=0}^{11} \binom{11}{i} 10^{11-i} \equiv 11 \cdot 10 + 1 \equiv 11 \pmod{100}$$

y de aquí que $11^{11} \equiv 11 \pmod{100} \dots (3)$

Por (1), (2) y (3) tenemos que

$$1 + 11^{11} + 111^{111} + \dots + \underbrace{11\dots 1}_{10 \text{ cifras}}^{\overbrace{11\dots 1}^{10 \text{ cifras}}} \equiv 1 + \underbrace{11 + \dots + 11}_{9 \text{ veces}} \equiv 0 \pmod{100}$$

SOLUCION DEL PROBLEMA 34.

Elevando S al cuadrado tenemos:

$$\begin{aligned} S^2 &= 2x+3+2y+3+2z+3 + 2\sqrt{(2x+3)(2y+3)} + 2\sqrt{(2y+3)(2z+3)} + 2\sqrt{(2x+3)(2z+3)} \\ &= 15 + 2\left(\sqrt{(2x+3)(2y+3)} + \sqrt{(2y+3)(2z+3)} + \sqrt{(2x+3)(2z+3)}\right) \dots (1) \end{aligned}$$

1o. Probaremos que $6 < S$

Como $x, y, z > 0$ y $x + y + z = 3$, podemos suponer que $z \geq 1$ y así,

$$\begin{aligned} S^2 &= 15 + 2 \left(\sqrt{(2x+3)(2y+3)} + \sqrt{(2y+3)(2z+3)} + \sqrt{(2x+3)(2z+3)} \right) > \\ &> 15 + 2 \left(\sqrt{(3)(3)} + \sqrt{(3)(5)} + \sqrt{(3)(5)} \right) = 21 + 4\sqrt{15} = 21 + \sqrt{(16)(15)} \\ &> 21 + \sqrt{(15)(15)} = 36, \end{aligned}$$

por lo tanto, $S > 6$.

2o. Para probar que $S \leq 3\sqrt{5}$, usamos la desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética, es decir, $\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+$.

De (1) se ve que:

$$\begin{aligned} S^2 &\leq 15 + 2 \left(\frac{(2x+3)+(2y+3)}{2} + \frac{(2y+3)+(2z+3)}{2} + \frac{(2x+3)+(2z+3)}{2} \right) = \\ &15 + 4(x+y+z) + 6(3) = 15 + 12 + 18 = 45 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $S \leq 3\sqrt{5}$.

SOLUCION DEL PROBLEMA 35.

a) El triángulo IMC es semejante al BMA por lo que

$$\frac{MC}{MA} = \frac{IC}{AB} = \frac{IM}{BM}$$

Además $IC = \frac{1}{2} AB$, de aquí que

$$\frac{MC}{MA} = \frac{1}{2} \dots \dots \dots (1)$$

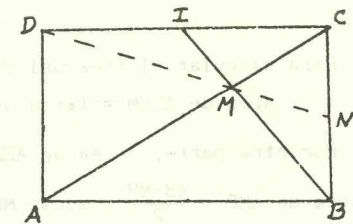
Sea N la intersección de DM y BC, entonces los triángulos CMN y AMD son semejantes. Así,

$$\frac{CN}{AD} = \frac{MC}{MA} = \frac{MN}{MD},$$

de donde

$$\frac{CN}{AD} = \frac{CN}{BC} = \frac{1}{2}$$

y por lo tanto, N es punto medio de BC.

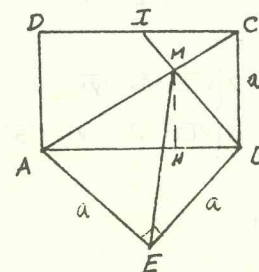


- b) Primero veamos que el triángulo AMB es rectángulo. (*)

Como $AB = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$, se tiene que $IC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, de aquí que

$$\frac{BC}{IC} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad \text{y}$$

$$\frac{CD}{AD} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2},$$



así, $\frac{BC}{IC} = \frac{CD}{AD}$ y por lo tanto, el triángulo BCI es semejante al triángulo CDA. Con esto se ve que $\angle IBC = \angle ACD$, $\angle BIC = \angle CAD$ y

$$\angle ICM + \angle CIM = \angle DCA + \angle BIC = \angle DCA + \angle CAD = 90^\circ,$$

de aquí que el triángulo CIM es rectángulo en M y por lo tanto el triángulo AMB también lo es.

Así, como el $\angle AEB$ también es recto, el cuadrilátero MAEB es cíclico teniendo circunscrito el círculo de diámetro AB. Los ángulos AME y BME son iguales ya que interceptan cuerdas que son iguales, AE y EB.

- c) Para calcular el área del cuadrilátero AEBM observemos que

$$\text{Área de AEBM} = (\text{área de AEB}) + (\text{área de AMB}).$$

$$\text{Por otra parte, área de AEB} = \frac{AE \cdot BE}{2} = \frac{1}{2} a^2 \quad \dots \dots \dots (2)$$

y área de AMB = $\frac{AB \cdot MH}{2}$, donde MH es la altura de AMB por H.

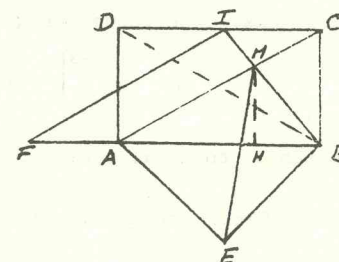
Como el triángulo AMH es semejante al triángulo ACB con razón $\frac{2}{3}$ por (1), se tiene que $\frac{MH}{CB} = \frac{2}{3}$, esto es, $MH = \frac{2a}{3}$. Por lo tanto,

$$\text{área de AMB} = \frac{(a\sqrt{2}) \cdot (2/3)a}{2} = \frac{a^2(\sqrt{2})}{3} \quad \dots \dots (3)$$

y así, por (2) y (3) tenemos:

$$\text{Área de AEBM} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2(\sqrt{2})}{3} = \frac{a^2(3 + 2\sqrt{2})}{6}$$

Trazamos la recta paralela a AC que pasa por I y ésta intersecta al lado AB en un punto F. Probaremos que BIF es triángulo rectángulo.



Así, $IB = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ (4)

Además, $IF = AC$ y en el triángulo rectángulo ABC se tiene

$$AC = a\sqrt{3} \text{ , por lo tanto, } IF = a\sqrt{3} \text{ (6)}$$

$$IF^2 + IB^2 = 3a^2 + \frac{3a^2}{2} = \frac{9a^2}{2} = \left(\frac{3a\sqrt{2}}{2} \right)^2 = BF^2$$

SOLUCION DEL PROBLEMA 36.

1er. Caso.- $ad \equiv bc \equiv x^2 \pmod{p}$

2o. Caso. - $ad \equiv bc \not\equiv x^2 \pmod{p}$

Antes de analizar estos dos casos veamos cuántos cuadrados distintos y diferentes de cero se tienen módulo p . Si $x^2 \equiv y^2 \pmod{p}$, con $0 \leq x, y \leq p-1$, entonces $p \mid (x+y)(x-y)$ y de aquí que $p \mid x+y$ o $p \mid x-y$, como la segunda no se puede dar y $\underline{x}$ y $\underline{y}$ son menores que p se tiene que $x+y = p$, esto es, $y = p-x$. Así, el número de cuadrados distintos, diferentes de cero, es $p-1/2$.

1er. Caso.- Se puede ver que por cada cuadrado diferente de cero

hay $8 \binom{\frac{p-3}{2}}{2}$ cuartetos distintos que son solución y

por lo tanto, en total para este caso hay: $\frac{p-1}{2} \left[8 \binom{\frac{p-3}{2}}{2} \right]$.

2o. Caso.- Aquí, se puede ver que por cada número que no es

cuadrado hay $8 \binom{\frac{p-1}{2}}{2}$ cuartetos distintos que son

solución y por lo tanto, en este caso hay $\frac{p-1}{2} \left[8 \binom{\frac{p-1}{2}}{2} \right]$.

Por lo tanto, el número de cuartetos buscados es:

$$4(p-1) \left[\binom{\frac{p-3}{2}}{2} + \binom{\frac{p-1}{2}}{2} \right] = 4(p-1) \left[\frac{(p-3)^2}{4} \right] = (p-1)(p-3)^2.$$