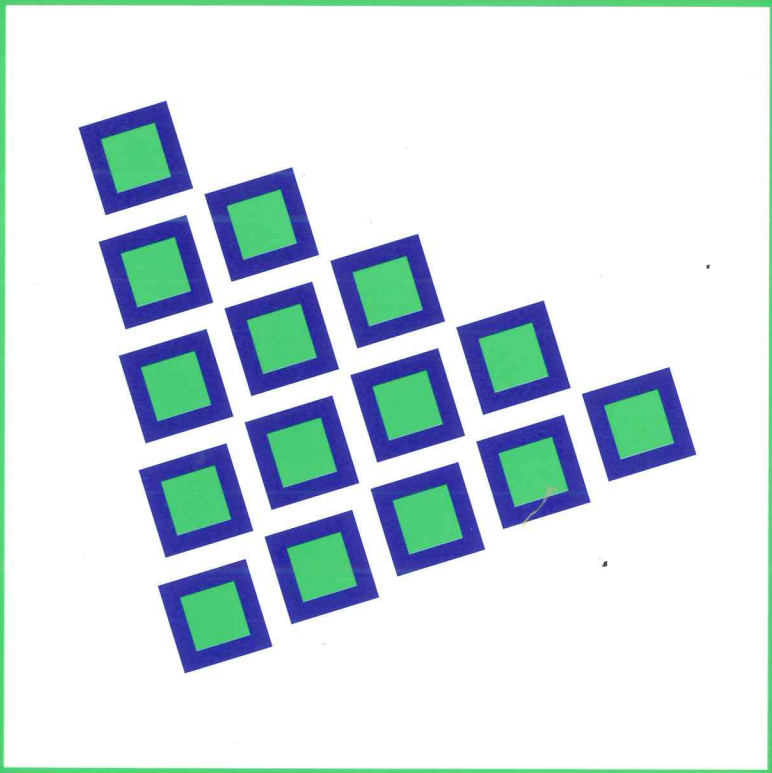
morelos 2001

olimpiada mexicana de matemáticas



Problemas del Calendario Matemático 2002

Anne Alberro
Radmila Bulajich
Ana Rechtman

Anne Alberro Semerena
Facultad de Ciencias, UAEM.

Radmila Bulajich Manfrino
Facultad de Ciencias, UAEM.

Ana Rechtman Bulajich
Facultad de Ciencias, UNAM.

Contenido

Presentación v

Problemas del Calendario Matemático 2002 **1**
Problemas de Enero 1
Problemas de Febrero 4
Problemas de Marzo 6
Problemas de Abril 8
Problemas de Mayo 11
Problemas de Junio 14
Problemas de Julio 16
Problemas de Agosto 19
Problemas de Septiembre 22
Problemas de Octubre 23
Problemas de Noviembre 26
Problemas de Diciembre 30

Soluciones de los Problemas **32**
Soluciones de los Problemas de Enero 32
Soluciones de los Problemas de Febrero 37
Soluciones de los Problemas de Marzo 43
Soluciones de los Problemas de Abril 50
Soluciones de los Problemas de Mayo 55
Soluciones de los Problemas de Junio 61
Soluciones de los Problemas de Julio 66
Soluciones de los Problemas de Agosto 73
Soluciones de los Problemas de Septiembre 78
Soluciones de los Problemas de Octubre 83
Soluciones de los Problemas de Noviembre 89
Soluciones de los Problemas de Diciembre 94

Presentación

En este folleto presentamos las soluciones detalladas de los problemas del Calendario Matemático 2002. La intención del calendario es dar a conocer el tipo de problemas que aparecen en los primeros niveles de las Olimpíadas de Matemáticas. La matemática que aquí se presenta pretende apoyar a aquella que se enseña en la escuela, presentando ejercicios cuya solución no sólo requiere de la aplicación directa de algoritmos sino también de una cierta dosis de ingenio. En la búsqueda de sus soluciones, los jóvenes adquirirán habilidades y destrezas de gran utilidad.

Las soluciones presentadas no son necesariamente las únicas o las mejores y sólo deben tomarse como una guía hacia el tipo de razonamiento que estos problemas buscan estimular.

La primera Olimpíada de Matemáticas fue realizada en Leningrado (ahora San-Petersburgo) en 1934 y en 1935 se realizó la segunda en Moscú. La organización la realizaron B.N. Delone y G.M. Frijtengolts. En una conferencia el Prof. Delone expresó: *"un alumno no es un recipiente que hay que llenar de conocimientos, sino una antorcha que hay que encender"*.

Este es el espíritu que prevalece hasta nuestros días en la preparación de los alumnos de las Olimpíadas. Las Olimpíadas de Matemáticas fueron creciendo y en la década de los años cincuenta ya se realizaba en toda la Unión Soviética. Más tarde, se extendió a otros países socialistas como Hungría, Rumania, Polonia, Alemania Oriental, Bulgaria y Checoslovaquia.

En 1959 se realizó la primera Olimpíada Internacional de Matemáticas con la participación de siete países; actualmente participan alrededor de 80 países. México empezó a participar hace apenas 14 años.

Actualmente la Olimpíada Mexicana de Matemáticas consta de tres etapas:

Estatal. Esta etapa está a cargo del Delegado Estatal, quien es nombrado por el Comité Olímpico Nacional. Cada estado elige la selección que lo representará en el Concurso Nacional. La selección está conformada por seis alumnos, con excepción del Distrito Federal que participa con diez alumnos.

Concurso Nacional. Este concurso se lleva a cabo en general durante el mes de noviembre en algún estado de la República Mexicana. En él se elige a la preselección mexicana.

Entrenamientos. A los alumnos de la preselección se les entrena intensivamente durante un semestre, para determinar a los alumnos que representarán a México en los distintos eventos internacionales. México participa en: la Olimpíada Centroamericana y del Caribe, la Olimpíada Iberoamericana y la Olímpiada Internacional.

Agradecemos a todas las Instituciones que se anunciaron en el Calendario Matemático 2002. Sin el apoyo de ellas, no hubiera sido posible la realización del mismo.

Noviembre 2001

Problemas del Calendario Matemático

2002

Problemas del Mes de Enero.

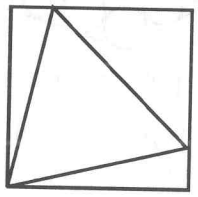
Martes 1. Si la base de un triángulo aumenta en un 10% y su altura disminuye en un 10%, ¿cuánto cambia su área?

Miercoles 2. ¿Qué tiene que cumplir x para que el residuo de dividir x^2 entre 8 sea 1?

Jueves 3. Elena en los primeros tres exámenes sacó 8, 9 y 10. ¿Cuánto tiene que sacar para obtener 9 de promedio con cuatro exámenes?

Viernes 4. Cada ficha del dominó se puede pensar como una fracción menor o igual a uno. Calcula la suma de todas estas fracciones.

Lunes 7. Calcula la medida del lado de un triángulo equilátero inscrito en un cuadrado de lado 1, sabiendo que ambas figuras tienen un vértice en común.



Martes 8. ¿Cuántos números enteros positivos n satisfacen la desigualdad

$$\frac{2}{5} < \frac{n}{17} < \frac{11}{13}?$$

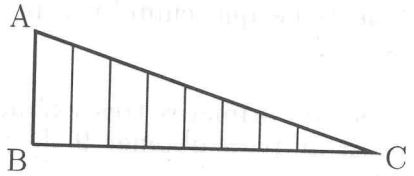
Miercoles 9. El 70% de los habitantes de un país habla un idioma y el 60% de la misma población habla otro idioma. ¿Qué porcentaje de la población habla los 2 idiomas, sabiendo que cada habitante habla al menos uno de ellos?

Jueves 10. Consideremos la expresión $n^3 - n$ para cualquier entero positivo n. ¿Cuál es el mayor número natural que siempre divide a dicha expresión?

Viernes 11. Un niño nació el 29 de febrero de 1976. Sabiendo que ese día era jueves, ¿en qué año será su cumpleaños otra vez en jueves?

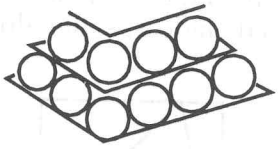
Lunes 14. ¿Cuál es la diferencia entre novecientos noventa y nueve mil y 990001?

Martes 15. El lado BC de un triángulo ABC se divide en 8 partes iguales. Siete segmentos de recta paralelos a AB se dibujan desde los puntos de división. Si $AB = 10$, ¿cuánto mide la suma de las longitudes de los 7 segmentos?



Miercoles 16. ¿Cuál número tiene más divisores, el 192 o el 320?

Jueves 17. Tenemos una pirámide de base rectangular formada por pelotas. Los niveles quinto y sexto de la pirámide se muestran en la siguiente figura:

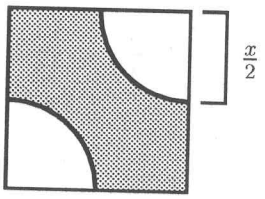


¿Cuál es el número total de pelotas en la pirámide?

Viernes 18. ¿Qué número representa el cuadro en la adición

$$\square 000 + \square 998 + \square 999 = 22997?$$

Lunes 21. ¿Cuál es el área de la figura sombreada si cada lado del cuadrado mide x?

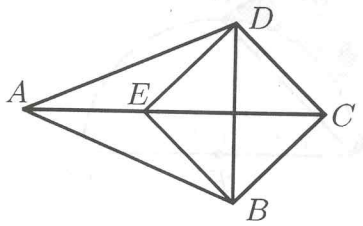


Martes 22. Cada letra representa un número en el siguiente arreglo. La suma de cualesquiera tres números consecutivos es 18. ¿Cuánto vale H?

3	B	C	D	E	8	G	H	I

Miercoles 23. ¿Cuántas veces aparece el número 5 entre los números del 1 al 1000?

Jueves 24. En la figura, $DEBC$ es un cuadrado y $AB = AD = \sqrt{130}$. El área del triángulo AEB es igual al área del cuadrado $DEBC$. ¿Cuánto vale dicha área?



Viernes 25. Construye el mayor número con las cifras 1,1,2,2,3,3,4,4 de tal forma que los dos "unos" estén separados por una cifra, los "dos" por dos cifras, los "tres" por tres y los "cuatros" por cuatro cifras.

Lunes 28. ¿Cuántos ceros tiene el número $n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2002}$ si lo escribimos en base 2?

Martes 29. ¿Cuántos minutos hay entre las 11:41 y las 14:02?

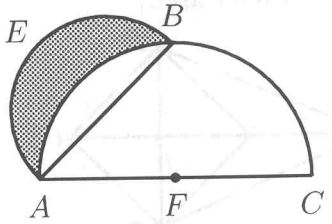
Miercoles 30. Si $(r + \frac{1}{r})^2 = 3$, entonces, ¿a qué es igual $r^3 + \frac{1}{r^3}$?

Jueves 31. Un triángulo isósceles con base BC está inscrito en una circunferencia $\mathcal{C}_1$. Sean α el ángulo ABC y $\mathcal{C}_2$ una circunferencia tangente a la base BC del triángulo en su punto medio y tangente interna a $\mathcal{C}_1$. Encuentra el radio de $\mathcal{C}_2$.

Problemas del Mes de Febrero.

Viernes 1. Una moneda circular de radio 1 está sobre una mesa. Si ponemos cuatro monedas más grandes e iguales alrededor de ella, ¿cuál es el radio de las monedas grandes que permite que cada una sea tangente a las dos adyacentes y a la de radio 1?

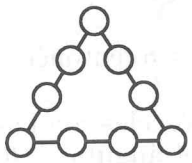
Lunes 4. En la siguiente figura ABC y AEB son semicírculos, F es el punto medio del diámetro AC, B es punto medio del arco AC y $AF = 1$. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



Martes 5. ¿Cuántos números enteros mayores que 10 y menores que 100 se incrementan en 9 cuando sus dígitos se invierten?

Miercoles 6. Un esquiador calcula que si avanza a $10\frac{km}{hr}$ llegará a su destino a la 1 P.M. y si avanza a $15\frac{km}{hr}$ llegará a su destino a las 11 A.M. ¿A qué velocidad tiene que avanzar para llegar a las 12 A.M.?

Jueves 7. En los círculos de este triángulo coloca los números del 1 al 9 de forma que la suma de cada lado sea 20.

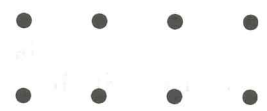


Viernes 8. ¿Cuál es el menor entero positivo que multiplicado por 60 da un cubo perfecto?

Lunes 11. Se tienen dos dados, uno de seis caras numeradas del 1 al 6; el otro de cuatro caras numeradas del 1 al 4. ¿Cuál es la probabilidad de que en una tirada de ambos dados la suma sea 7?

Martes 12. Si a y b son dos números enteros tales que $b > a$, ¿cuántos números enteros x existen que cumplan $a < x < b$?

Miercoles 13. Con vértices en los puntos de la figura, ¿cuántos cuadriláteros se pueden dibujar?



Jueves 14. La sucesión $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ de números está definida como sigue: $a_1 = 0$, $a_2 = 2$ y para $n > 2$

$$a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}.$$

¿Cuánto vale a_{2002}?

Viernes 15. Expresa al número 100 utilizando cada una de las diez primeras cifras.

Lunes 18. Si r es el resultado de duplicar tanto la base como el exponente de a^b, siendo $b \neq 0$, y $r = a^b x^b$, ¿cuánto vale x?

Martes 19. Si el radio de un círculo aumenta en π, ¿cuánto aumenta su perímetro?

Miercoles 20. Si (a, b) denota al máximo común divisor de a y b, ¿cuál es el valor de $(a^4 - b^4, a^2 - b^2)$?

Jueves 21. Dos números m y n son tales que $5 \leq m \leq 10$ y $20 \leq n \leq 30$. ¿Cuál es el mayor valor posible de $\frac{m}{n}$?

Viernes 22. ¿Cuántos números del 1 al 10,000 tienen sus cifras en orden estrictamente creciente? (Por ejemplo 12,379 tiene la propiedad y 280 no la tiene)

Lunes 25. Consideremos una cinta a lo largo del ecuador. Si se corta dicha cinta en un punto y se intercala un metro adicional de cinta, ¿a qué distancia se separará la cinta de la superficie?

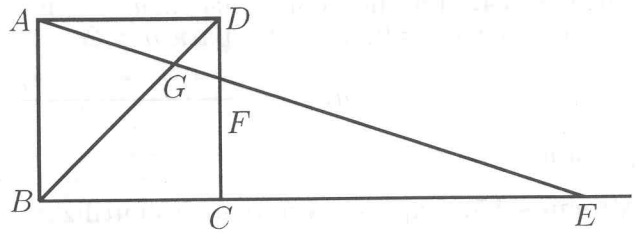
Martes 26. El número 120 está expresado en base 3. ¿Cuál es el número equivalente en base 2?

Miercoles 27. Si una gallina pone 2 huevos en tres días, ¿cuántos días se necesitan para que 4 gallinas pongan dos docenas de huevos?

Jueves 28. Se escriben en orden todos los enteros positivos hasta que entre todas las cifras de los números escritos se hayan usado 600,000 unos. ¿Cuál es el último número que se escribe? (Por ejemplo, si la condición para terminar fuera usar un 1, el último número que se escribiria sería el 9.)

Problemas del Mes de Marzo.

Viernes 1. Sea $ABCD$ un cuadrado. Por el vértice A se traza una línea que intersecta a la extensión del lado BC en E, al lado DC en F y a la diagonal BD en G. Si $AG = 3$ y $GF = 1$, ¿cuál es la longitud de FE?



Lunes 4. ¿Cuántos enteros positivos n hay tales que $\frac{2n^2+4n+18}{3n+3}$ sea un entero?

Martes 5. ¿Cuál es el número más grande que se puede escribir con cuatro números 1?

Miercoles 6. Encuentra el número entero más pequeño formado solamente con los dígitos 3 y 7, de manera que tanto el entero como la suma de sus dígitos sea divisible entre 3 y 7.

Jueves 7. Los lados iguales de un triángulo isósceles exceden en 2 a la base. Si su perímetro es 34, calcula la longitud de cada lado.

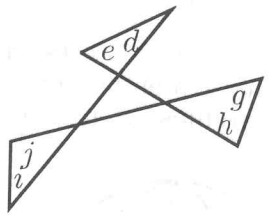
Viernes 8. ¿Cuánto vale m si

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{m}\right)=1?$$

Lunes 11. Expresa el número 100 empleando cinco cifras iguales.

Martes 12. ¿Cuántos números enteros menores que 100 son divisibles entre 2 ó 3, pero no entre 5?

Miercoles 13. ¿Cuánto suman los ángulos marcados en la siguiente figura?



Jueves 14. ¿Cuántas soluciones distintas tiene la siguiente ecuación?

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

Viernes 15. Dividir la figura de un cuarto creciente de luna en seis partes trazando solamente dos líneas rectas.

Lunes 18. El gerente de una fábrica de coches recuerda que el primer año se produjo la décima parte de los coches que se han fabricado; en el segundo año, se fabricaron varios séptimos del total y en el tercero se produjeron 399 coches. ¿Cuántos coches se fabricaron en total?

Martes 19. Sea $ABCD$ un cuadrado, P y Q son puntos fuera del cuadrado, tales que los triángulos ADP y CDQ son equiláteros. ¿Cuánto mide el ángulo PQD?

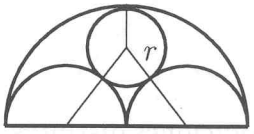
Miercoles 20. En la siguiente suma, ¿cuánto valen X, Y y Z?

$$\begin{array}{cccccc} & X & X & X & X \\ + & Y & Y & Y & Y \\ & Z & Z & Z & Z \\ \hline Y & X & X & X & Z \end{array}$$

Jueves 21. Pedro presume que todavía es joven. Si divide su edad entre 2, 3, 4, 5 ó 6 le sobra 1, ¿cuál es la edad de Pedro?

Viernes 22. Hay dos soluciones de agua oxigenada: una al 30% y la otra al 3%. Estas soluciones se deben mezclar para obtener una solución al 12%. ¿Cuáles son las proporciones correspondientes?

Lunes 25. Dos semicírculos de radio 3 están inscritos en un semicírculo de radio 6, como se muestra en la figura. Un círculo de radio r es tangente a los tres semicírculos. ¿Cuánto vale r?



Martes 26. Considera la siguiente sucesión de números $3, 6, 12, 15, 30, 33, \ldots$. ¿Cuáles son los siguientes dos términos de la sucesión?

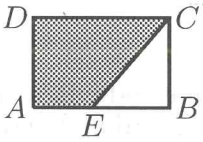
Miercoles 27. En un jardín hay pinos, acacias y robles. Todos los árboles son pinos menos 2, todos son acacias menos 2 y todos son robles menos 2. ¿Cuántos árboles hay?

Jueves 28. Cuando caminaba a lo largo de la vía del tren, observé que cada 12 minutos me alcanzaba uno de esos vehículos, y cada 4 minutos otro de ellos pasaba en dirección contraria. Tanto el tren como yo nos desplazábamos con velocidad constante. ¿Cada cuántos minutos salían los trenes de las estaciones terminales?

Viernes 29. Un escritor escribe una novela cada dos años. Cuando publica su séptima novela, la suma de los años en los cuales fueron publicadas las novelas es 13804. ¿En qué año publicó su primera novela?

Problemas del Mes de Abril.

Lunes 1. Sean $ABCD$ un rectángulo de área 24 y E el punto medio del lado AB. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



Martes 2. ¿Cuántos números enteros hay entre 1001^2 y 1002^2, sin incluir estos dos números?

Miercoles 3. En el siguiente arreglo de números 4, _, _, _, 32 cada número, a partir del tercero, es la suma de los dos números anteriores. ¿Cuánto suman los cinco números?

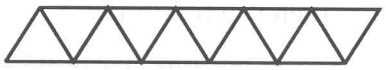
Jueves 4. ¿Existe un número de 6 dígitos divisible por 11, cuyos dígitos sean 1, 2, 3, 4, 5, 6 escritos en algún orden y sin que se repitan?

Viernes 5. La suma de todos los dígitos del número $10^{99} - 99$ es:

Lunes 8. La suma de cinco números, de los cuales cada uno es el doble del anterior, es 62. ¿Cuál es el mayor de los cinco números?

Martes 9. Si x hombres en y días hicieron z casas, ¿cuántos días les tomará a q hombres construir r casas?

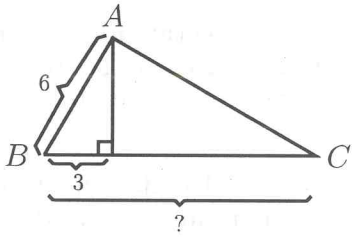
Miercoles 10. La siguiente figura está formada por triángulos equiláteros de lado uno. Si fueran 50 triángulos, ¿cuál sería el perímetro de la figura?



Jueves 11. Se tiene un cubo de lado 5 formado por cubitos de lado 1. ¿Cuántos cubitos quedan totalmente ocultos a la vista?

Viernes 12. Empieza con el número 1. Una "operación" consiste en multiplicar el número por 3 y sumarle 5. ¿Cuál es la cifra de las unidades después de aplicar la operación 2002 veces?

Lunes 15. En el triángulo rectángulo ABC ¿cuál es la longitud del segmento indicado?



Martes 16. ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar un número entre 401 y 700 (inclusive) el número tenga sus tres cifras diferentes?

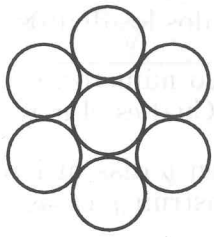
Miercoles 17. Si los números naturales

$$1, 2, 3, 4, ..., x-1, x+1, ..., n$$

suman 2002 y $13 \leq x \leq 17$, ¿cuál es el valor de n y x?

Jueves 18. Si 10 niños de cada 80 usan lentes, ¿cuántos no usan lentes en un grupo de 2000 niños?

Viernes 19. En la siguiente figura todos los círculos tienen radio 1. ¿Cuánto vale el área comprendida entre los siete círculos?



Lunes 22. Un turista recorre una calle de cierta ciudad y observa que del lado derecho los números de los inmuebles son pares consecutivos. Si el turista ve desde el número 386 al 542, ¿cúantos inmuebles de numeración par recorrió?

Martes 23. ¿Cuál es la medida del radio del círculo inscrito en un triángulo de lados 3, 4 y 5?

Miercoles 24. ¿Cuántos números positivos de tres cifras hay que sean divisibles por 9 y por 11?

Jueves 25. Descuentos sucesivos del 10% y del 20% son equivalentes a un simple descuento del:

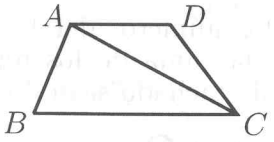
Viernes 26. Encuentra los números primos positivos que son, tanto la suma de dos primos, como la diferencia de dos primos.

Lunes 29. Si un lado b de un rectángulo se aumenta en 10 y el otro lado, a, se disminuye en 5, el área no se altera. Asimismo, el área no se altera si se disminuye b en 5 y se aumenta a en 4. ¿Cuál es el área del rectángulo?

Martes 30. Se reúnen 15 delegados de Africa, América, Asia y Europa. Cada continente envía un número diferente de delegados, y cada uno está representado, por lo menos, por un delegado. América y Asia envían un total de 6 delegados, Asia y Europa envían un total de 7 delegados. ¿Cuál continente puede enviar 4 delegados?

Problemas del Mes de Mayo.

Miercoles 1. En el trapecio $ABCD$ los lados AD y BC son paralelos, la diagonal AC y el lado BC miden lo mismo. Si el ángulo ADC mide $110°$ y el ángulo DCA mide $30°$, ¿cuánto mide el ángulo BAC ?

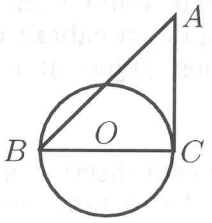


Jueves 2. La resta de los cuadrados de dos números enteros positivos no consecutivos es 93. ¿Cuál es el mayor de estos dos números?

Viernes 3. En un conjunto de cinco números el promedio de los primeros tres es 85 y el promedio de los últimos dos es 95. ¿Cuál es el promedio de los cinco números?

Lunes 6. ¿Cuál es el entero positivo más pequeño con exactamente 11 divisores positivos, que al dividirlo entre 11, deja residuo 1?

Martes 7. El ángulo BCA es recto, $BA = 5$ y $AC = 3$. ¿Cuál es el área del círculo con centro en O?

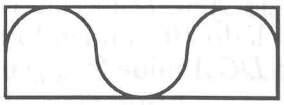


Miercoles 8. ¿De cuántas formas se pueden acomodar los enteros del 1 al 16 en una sucesión, de tal manera que la suma de dos términos adyacentes sea un cuadrado perfecto?

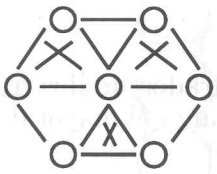
Jueves 9. En una canasta hay 5 manzanas. ¿Cuántas maneras hay de repartirlas entre Pedro, Paco y Pablo si a cada uno le toca al menos una manzana y todas son iguales?

Viernes 10. Encuentra un número natural X de 100 dígitos, todos distintos de cero, que sea divisible por la suma de sus dígitos.

Lunes 13. El lado mayor del rectángulo es 12. Si la curva está formada por tres semicircunferencias, ¿cuál es la longitud de la curva?



Martes 14. Coloque los números del 1 al 7 en los círculos de la figura, de manera que, la suma de los números que están en los vértices de cada triángulo tachado sean 3 números consecutivos.

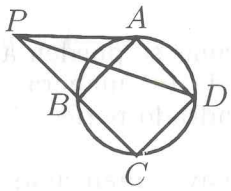


Miercoles 15. Un cubo de madera tiene todas sus caras pintadas de azul. Si lo cortamos en 27 cubitos, ¿cuántos cubitos tendrán dos caras pintadas de azul?

Jueves 16. Paula numeró las 96 páginas de un libro. Juan arrancó 25 hojas al azar y sumó los 50 números escritos en ellas. ¿Puede ser la suma igual a 2002?

Viernes 17. Si una persona que mide 1.75 m recorre la Tierra siguiendo el ecuador, la coronilla de su cabeza describiría una línea más larga que la planta de los pies. ¿Qué diferencia hay entre estas dos longitudes?

Lunes 20. El cuadrado $ABCD$ está inscrito en un círculo de radio 1. Si C, B, P son colineales y PA es tangente al círculo, ¿cuánto mide PD?



Martes 21. El domingo pasado Marta tuvo varios invitados. Cuando Pedro llegó ya estaba Raúl. Jesús y Rita llegaron juntos. Luisa le abrió la puerta a Arturo y Arturo a Jesús. Raúl llegó después de Rita. ¿Quién fue el último en llegar?

Miercoles 22. En un triángulo ABC sabemos que el ángulo CBA es el doble del ángulo BCA, el lado CA es 2 unidades mayor que el lado AB y BC mide 5. ¿Cuánto miden AB y CA?

Jueves 23. En una tarea Ana sacó 80 de calificación y así elevó su promedio de 68 a 69. ¿Cuántas tareas había antes de esta última?

Viernes 24. Divide el siguiente reloj en 6 partes de manera que la suma de los números de cada parte sea la misma.

Lunes 27. Se define la operación $*$ entre a y b como

$$a * b = \frac{a+b}{2}.$$

Si $x * (x * 14) = x$, ¿cuánto vale x?

Martes 28. En una fiesta cada persona estrecha una vez la mano de cada uno de los invitados. Si en total se observaron 55 apretones de manos, ¿cuántas personas asistieron a la fiesta?

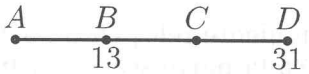
Miercoles 29. Dos ruedas dentadas A y B, fijas en su centro, con 630 y 180 dientes respectivamente, funcionan acopladas. ¿Cuál es el mínimo de vueltas completas que debe dar B para que A dé un número de vueltas completas?

Jueves 30. Con 48 cubitos de madera se quiere formar una pirámide de tres niveles de tal forma que el segundo nivel tenga el doble de cubitos que el tercero, y el primer nivel tenga el triple que el tercero. ¿Cuántos cubitos debe tener el segundo nivel, si todos los cubitos deben ser utilizados?

Viernes 31. ¿Cuál es el número que sigue en la sucesión $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$?

Problemas del Mes de Junio.

Lunes 3. En la recta numérica los puntos B y C dividen AD en tres partes iguales. ¿Qué número le corresponde a A?



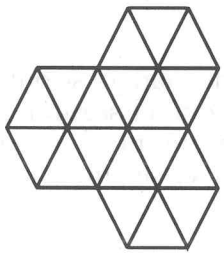
Martes 4. Un número de 5 cifras que termina en 7 excede en 4 unidades a un número capicúa y le faltan 7 unidades para ser igual al siguiente número capicúa. ¿Cuál es el número de 5 cifras? (Un número es capicúa si es lo mismo leerlo de derecha a izquierda que de izquierda a derecha).

Miercoles 5. ¿Cuál es el mayor número de partes en las que podemos dividir un círculo utilizando unicamente 3 líneas rectas?

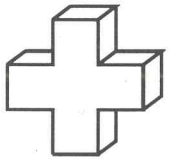
Jueves 6. ¿Cuántos números positivos N menores que 2002 hay, tales que la cifra de las unidades de N^{20} sea 1?

Viernes 7. Para enumerar las páginas de un libro, un tipógrafo ha empleado 207 dígitos, ¿cuántas páginas tiene el libro?

Lunes 10. ¿Cuántos paralelogramos de dos triángulitos hay en la siguiente figura?



Martes 11. ¿Cuántas caras tiene el siguiente sólido?



Miercoles 12. ¿Cuál es el valor de n en

$$\frac{1+3+...+(2n-1)}{2+4+...+(2n)} = \frac{2002}{2003}?$$

Jueves 13. Un círculo cuyo radio mide 1 está inscrito en un cuadrado y éste a su vez, está inscrito en otro círculo. ¿Cuánto mide el radio del círculo mayor?

Viernes 14. Un equipo de fútbol gana 8 juegos más de los que pierde. El equipo juega 30 partidos. ¿Cuántos partidos perdió?

Lunes 17. Encuentra todos los números de dos dígitos que son iguales al doble del producto de sus dígitos.

Martes 18. Utiliza las cifras 6, 7, 8 y 9 una sola vez para completar la desigualdad numérica

$$\square\square > \square\square$$

¿Cuántas desigualdades distintas se pueden escribir con estas cifras?

Miercoles 19. Si la hipotenusa c y un cateto a de un triángulo rectángulo son enteros consecutivos, ¿cómo se escribe el cuadrado del otro cateto en términos de a y c?

Jueves 20. ¿Cómo acomodarías 10 árboles en cinco filas, con cuatro árboles en cada fila?

Viernes 21. Encuentra un número entero positivo a tal que $a + 2a + 3a + 4a + 5a + 6a + 7a + 8a + 9a$ sea un número con todas sus cifras iguales.

Lunes 24. Un cristal en forma de prisma tiene 27 aristas. ¿Cuántos vértices tiene? (Los prismas tienen como base y tapa dos polígonos iguales).

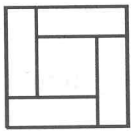
Martes 25. La suma de los 2002 elementos de cierto conjunto de números es 20022002. ¿Cuál es el promedio de los elementos de dicho conjunto?

Miercoles 26. A cada número n se le asigna un entero no negativo $f(n)$ tal que:

1. $f(xy) = f(x) + f(y)$,
2. $f(n) = 0$ siempre que el dígito de las unidades de n sea 3,
3. $f(10) = 0$.

Encuentra cuánto vale $f(1985)$.

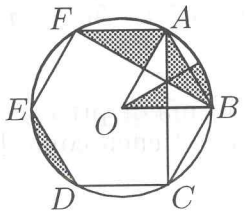
Jueves 27. Divide un cuadrado en 4 rectángulos congruentes y un cuadrado pequeño de tal forma que todos tengan la misma área. Si el área del cuadrado original es 180, ¿cuánto miden los lados de los rectángulos?



Viernes 28. ¿Cuál es el máximo común divisor de 1111 y 111111?

Problemas del Mes de Julio.

Lunes 1. Si la circunferencia con centro O tiene radio igual a uno, ¿cuál es el área de la región sombreada?



Martes 2. Rellena los cuadros vacíos con las letras A, B, C, D o E, de forma que ninguna línea horizontal, vertical o diagonal a 45°, contenga una letra más de una vez.

		A		
	E			B
		C		

Miercoles 3. Cada movimiento en el juego consiste en invertir 2 flechas adyacentes. Si la posición inicial es

$\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow$ y la posición final es $\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow$

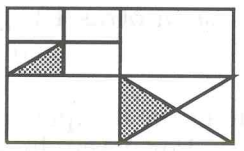
¿cuál es el número mínimo de movimientos para llegar a la posición final?

Jueves 4. Tenemos 21 dados de idéntica apariencia. Uno de ellos pesa más que los otros 20. ¿Cuál es el mínimo número de veces que tienes que pesar las piezas en una balanza para asegurarte de encontrar el dado más pesado?

Viernes 5. ¿Cuántas cifras tiene el número $2^{1998} \times 5^{2003}$?

Lunes 8. Un domador de fieras tiene cinco tigres y cuatro leones y desea acomodarlos en fila de modo que no queden dos tigres o dos leones juntos. Considerando que cada fiera es distinta a las otras, ¿de cuántas formas distintas puede acomodar sus fieras?

Martes 9. ¿Qué parte del área total es la superficie sombreada?

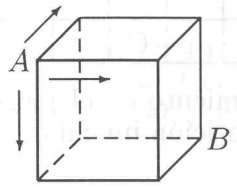


Miercoles 10. La fecha 29/2/92 se llama una fecha capicúa, ya que es igual leerla de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. ¿Cuántas fechas capicúas hay entre los años 1910 y 2001? (La forma de escribir los días y meses será unicamente con el número, por ejemplo, el mes de enero lo escribimos como 1 y no como 01)

Jueves 11. En una fiesta Pepe, que fue sólo, vió a 5 personas sin pareja; Ana y Luis, que fueron en pareja, vieron a 10 parejas bailando. ¿Cuántas personas fueron a la fiesta?

Viernes 12. Calcula la suma de todas las fracciones $\frac{a}{b}$, tales que a y b son enteros positivos menores o iguales a 1000, y a es menor o igual a b.

Lunes 15. Una hormiga se mueve por las aristas de A a B. Si sólo puede moverse hacia la derecha, hacia abajo y hacia atrás, ¿cuántos caminos diferentes puede hacer?



Martes 16. ¿Es posible escribir los números naturales 1, 2, 3, ..., 100 en una línea, de manera que la diferencia entre dos números adyacentes no sea menor que 50?

Miercoles 17. Un tríangulo rectángulo tiene área igual a 5 y su hipotenusa mide 5. ¿Cuál es la longitud de sus lados?

Jueves 18. Si n es un número entero impar no divisible entre cinco, ¿cuál es el último dígito de n^{100}?

Viernes 19. En un conjunto de vacas y pollos el número de patas es 14 más que el doble del número de cabezas. ¿Cuántas vacas hay en el conjunto?

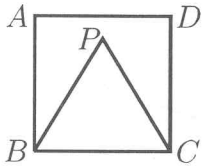
Lunes 22. Una persona sabe un secreto y se lo comunica a 12 personas; a su vez cada una de las 12 personas se lo comunica a otras 12, y cada una de éstas, a otras 12. ¿Cuántas personas saben el secreto?

Martes 23. Una mecanógrafa inexperta estaba copiando de un libro de matemáticas $5^4 \cdot 2^3$. Por descuido, escribió 5423 que es muy distinto, ya que $5^4 \cdot 2^3 = 5000$. Encuentra cuatro cifras a, b, c y d tales que $a^b \cdot c^d = abcd$.

Miercoles 24. ¿Cuál es la solución de la ecuación
$2 + 5 + 8 + ... + x = 155$?

Jueves 25. De 5 números enteros, ¿cuántos deben ser impares si el producto de los cinco es impar?

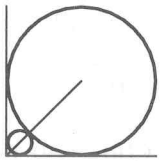
Viernes 26. Sea $ABCD$ un cuadrado y P un punto dentro del cuadrado tal que PBC es un triángulo equilátero. ¿Cuánto mide el ángulo CPD?



Lunes 29. ¿Qué número es mayor $\sqrt{7}+\sqrt{10}$ ó $\sqrt{3}+\sqrt{19}$?

Martes 30. En un patio hay varios gatos y cada gato ve a tres gatos. ¿Cuántos gatos hay en el patio?

Miercoles 31. Queremos poner un círculo pequeño en el espacio que hay entre el círculo y las tangentes, como se muestra en la figura. Si el radio del grande es a y el del pequeño es b encuentra $\frac{a}{b}$.



Problemas del Mes de Agosto.

Jueves 1. Se escriben los números enteros positivos en forma consecutiva en renglones de cinco números. ¿En qué número de renglón la suma de los elementos que aparecen en él es más cercana a 150?

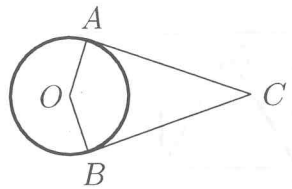
Viernes 2. ¿Cuál es el área del mayor triángulo que puede ser inscrito en un semicírculo de radio r?

Lunes 5. ¿Cuál es el resultado de reducir

$$\frac{a^2-b^2}{ab}-\frac{ab-b^2}{ab-a^2}$$

a su mínima expresión?

Martes 6. El triángulo ABC es equilátero con lados tangentes al círculo cuyo centro es O y radio $\sqrt{3}$. Calcula el área del cuadrilátero $AOBC$.



Miercoles 7. Un caracol sube por una pared vertical de 5 metros de altura. Durante el día sube 3 metros, pero en la noche baja 2 metros. ¿En cuántos días subirá la pared?

Jueves 8. Si $2001 = (n-2)^n(n+1)^{n-2}+1$ y n es un entero, ¿cuánto vale n?

Viernes 9. Un pastel se corta quitando cada vez la tercera parte del pastel que hay en el momento de cortar. ¿Qué fracción del pastel original quedó después de cortar tres veces?

Lunes 12. ¿Cuántos enteros hay tales que $22n \geq n^2 + 120$?

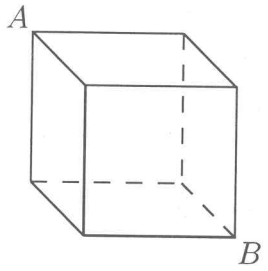
Martes 13. Para cada dos números enteros a y b se define la operación $*$ de la manera siguiente: $a * b = ab + 2$. ¿Cuál es el valor de $(((1 * 1) * 1) * \ldots * 1) * 1$ donde se han utilizado 1001 números uno?

Miercoles 14. En un tablero de ajedrez hay 32 casillas blancas y 32 negras. Elimina la casilla de la esquina superior derecha y la de la inferior izquierda. ¿Puedes cubrir el tablero de ajedrez con fichas de dominó, si cada ficha cubre dos casillas?

Jueves 15. A una fiesta asistieron 20 personas. María bailó con siete muchachos, Olga con ocho, Vera con nueve y así hasta llegar a Nina, que bailó con todos ellos. ¿Cuántos muchachos había en la fiesta?

Viernes 16. Diez barcos necesitan diez días para consumir diez tanques de aceite. ¿Cuántos días necesita un barco para consumir un tanque de aceite?

Lunes 19. En el siguiente cubo, ¿de cuántas formas se puede ir de A a B pasando sobre las aristas sin pasar dos veces por el mismo vértice y sin subir?



Martes 20. Si hubo exactamente cuatro domingos en octubre de cierto año, ¿en qué días de la semana no pudo haber caído el 31 de octubre de ese año?

Miercoles 21. Si la mitad de $5p$ es $3u$, ¿cuál es la tercera parte de $10p$?

Jueves 22. Encontrar los números de 3 dígitos en base 11, que se escriben con los mismos dígitos en base 9 pero en orden inverso.

Viernes 23. Si el área de la parte curva de un cilindro es el doble de su volumen, ¿cuánto mide el radio?

Lunes 26. Consideremos un cuadrado de 1 metro de lado, dividido en cuadritos de 1 milímetro de lado. ¿Qué longitud se obtendrá si colocamos los cuadritos en línea, pegados unos a otros?

Martes 27. ¿Para qué valores de k tiene sentido el siguiente sistema de ecuaciones?

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ k\,x + y &= 2 \\ x + k\,y &= 3. \end{aligned}$$

Miercoles 28. Un cuadrado tiene perímetro P y área Q. Dada la ecuación $3P = 2Q$, determina el valor de P.

Jueves 29. Se dibujan en una misma hoja un círculo y un cuadrado. ¿Cuál es el máximo número de puntos comunes que pueden tener?

Viernes 30. En cierto planeta hay tantos días en una semana como semanas en un mes como meses en un año. Si un año tiene 1331 días, ¿cuántos días tiene cada semana?

Problemas del Mes de Septiembre.

Lunes 2. ¿Cuál es el resultado de sumar los números consecutivos del 1000 al 2000 $(1000 + 1001 + \cdots + 2000)$?

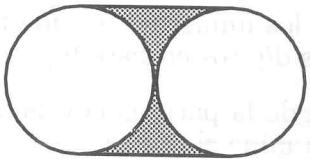
Martes 3. Tres puntos P, Q y R están en un círculo. Si $\angle PRQ = 60°$ y $PQ = 4$, ¿cuánto mide el radio del círculo?

Miercoles 4. ¿Cuánto es la mitad de $99\frac{1}{2}$?

Jueves 5. ¿Cuántas parejas de enteros positivos impares tienen como suma 2002?

Viernes 6. ¿Cuántas tercias de números reales x, y, z, satisfacen las ecuaciones $x + y = 2$ y $xy - z^2 = 1$?

Lunes 9. Dos círculos de radio 1 son tangentes como se muestra en la figura. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



Martes 10. Hernán es 8 cm más alto que Juan. Pablo es 12 cm más bajo que Hernán. Juan mide 125 cm. ¿Cuánto mide Pablo?

Miercoles 11. Si escribimos todos los números del 1 al 500 seguidos, ¿cuál será el dígito que aparece en la posición 1000?

Jueves 12. ¿Cuál de los números 2^{4^8} ó 2^{8^4} es mayor?

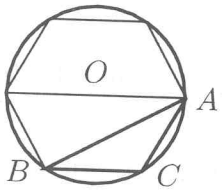
Viernes 13. ¿Cuántos números hay del 1 al 1000 que pueden escribirse en la forma a^b con a y b enteros mayores que 1?

Lunes 16. Sea $p(x) = x^3 + ax + 1$. Si $p(1) = 1$, ¿cuál es el valor de $p(2)$?

Martes 17. ¿Cuál es el último dgito de

$$(1^2 + 1) + (2^2 + 2) + ... + (2002^2 + 2002)?$$

Miercoles 18. Si el área del círculo es 1, ¿cuánto mide el área del triángulo ABC?



Jueves 19. Si $2^{x_1} = 5^{x_2} = 10$, ¿cuánto vale $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$?

Viernes 20. ¿Cuál es el ángulo entre las manecillas de un reloj, cuando el reloj marca las 2:30 hrs.?

Lunes 23. ¿Cuántos divisores positivos tiene 5! ($5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$)?

Martes 24. El producto de tres enteros positivos es 1500 y su suma 45. ¿Cuál es el mayor de los tres números?

Miercoles 25. Si $x^2 - ax + 81$ es un cuadrado perfecto, ¿cuánto vale a?

Jueves 26. ¿Cuánto vale x en la siguiente sucesión?

$$-4, 3, 1, 8, 6, 13, 11, x, 16, 23, ...$$

Viernes 27. Un cubo de arista igual a 5 se parte en cubos de arista igual a 1. ¿Cuánto vale la suma de las longitudes de todas las aristas de todos los nuevos cubos?

Lunes 30. Las longitudes de los lados de un triángulo son $b + 1$, $7 - b$ y $4b - 2$. ¿Para cuántos valores de b el triángulo es isósceles?

Problemas del Mes de Octubre.

Martes 1. ¿Qué polígono regular tiene la misma cantidad de diagonales que de lados?

Miercoles 2. Un conejo le lleva una ventaja a un perro que lo persigue equivalente a 50 saltos de conejo. Si un salto de perro equivale a 3 saltos del conejo y el conejo da 8 saltos mientras que el perro da 3, ¿en cuántos saltos alcanza el perro al conejo?

Jueves 3. Hace 18 años Roberto era 3 veces más viejo que su hijo, pero ahora Roberto es dos veces más viejo que su hijo. ¿Cuáles son las edades actuales de Roberto y de su hijo?

Viernes 4. ¿Existe un número de dos dígitos ab tal que la diferencia entre ab y ba sea un número primo?

Lunes 7. Digamos que el mejor reloj es el que dá la hora correcta con mayor frecuencia. Juan tiene dos relojes, uno que no funciona y otro que se atrasa un minuto por día. ¿Cuál es el mejor reloj?

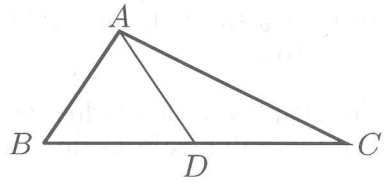
Martes 8. ¿Qué es mayor, la longitud de una circunferencia de radio 1, o el perímetro de un cuadrado de lado 1?

Miercoles 9. La cabeza de un pescado tiene 30 cm de largo. La cola es tan grande como la cabeza y la mitad del cuerpo; el cuerpo es tan largo como la cabeza y la cola juntas. ¿Cuál es la longitud del pescado?

Jueves 10. Encuentra todas las posibles ternas de números a, b, c tales que $a^2 + 2b^2 - 2bc = 100$ y $2ab - c^2 = 100$.

Viernes 11. Si a la suma de los primeros 500 números positivos pares se le resta la suma de los primeros 500 números positivos impares, ¿cuál es el resultado?

Lunes 14. En la figura $AD = BD = CD$, ¿cuál es el valor del ángulo BAC?

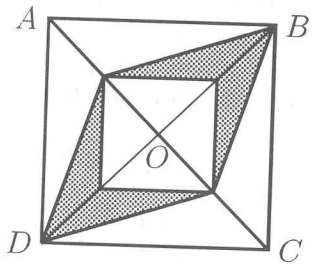


Martes 15. Un grupo de turistas llega a un hotel. Si dos personas comparten cada habitación, falta una. Si tres personas comparten cada habitación, quedan dos desocupadas. ¿Cuántas habitaciones tiene el hotel?

Miercoles 16. La suma de una fracción y su inversa es igual a $\frac{17}{4}$ y la diferencia de ambas es igual a $\frac{15}{4}$. ¿Cuánto valen dichas fracciones?

Jueves 17. Sean $a = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^3$ y b$=\left(\frac{1}{2}\right)^{3^3}$. ¿Cuál es mayor a ó b?

Viernes 18. Sea $ABCD$ un cuadrado, con $AB = 12$. Si dibujamos un cuadrado cuyos vértices son los puntos medios de AO, BO, CO y DO, ¿cuál es el área de la región sombreada?

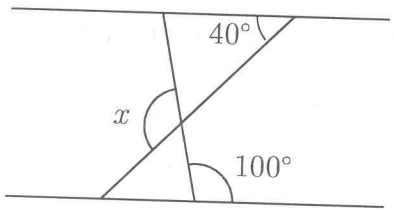


Lunes 21. En un examen se plantearon 20 problemas. Por cada problema resuelto correctamente se otorgaban 8 puntos, y por cada problema resuelto incorrectamente se quitaban 5 puntos. Si Cristina contestó todo y recibió un total de 108 puntos, ¿cuántos problemas resolvió correctamente y en cuántos falló?

Martes 22. Los números 46 y 96 tienen una curiosa propiedad: su producto es el mismo aunque las cifras que los componen cambien de lugar. Es decir, $46 \times 96 = 4416 = 64 \times 69$. Encuentra otras dos parejas de números que cumplan esta propiedad.

Miercoles 23. Una llave llena un tanque de agua de 2 metros de alto en 10 horas, otra lo hace en 12 horas y una tercera lo hace en 15 horas. ¿A qué altura llega el agua en el tanque cuando las tres llaves están abiertas simultáneamente durante una hora?

Jueves 24. ¿Cuánto vale el ángulo x, si las rectas horizontales son paralelas?

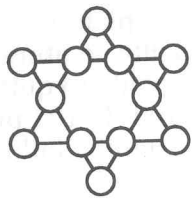


Viernes 25. Varios bailarines están bailando en círculo acomodados uno frente a otro, es decir, diametralmente opuestos. Los numeramos consecutivamente empezando por el número 1; si sabemos que el bailarín número 20 está exactamente enfrente del bailarín número 53, ¿cuántos bailarines hay?

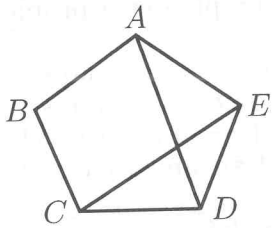
Lunes 28. Un hombre tiene una canasta de naranjas. Le da a un amigo la mitad de sus naranjas y media más. A otro, le da la mitad de lo que le queda y media más. A un tercero, la mitad de lo que le queda y media más. Después de toda la repartición le sobra una naranja. ¿Cuántas naranjas tenía?

Martes 29. Llama $R(k)$ al número formado por k números 1; es decir, $R(1) = 1$, $R(2) = 11$, $R(5) = 11111$, etc. ¿Cuántos ceros aparecen en el número que resulta de dividir $R(144)$ entre $R(4)$?

Miercoles 30. Coloca los números del 1 al 12 en los círculos de modo que la suma de los números de cada fila (6 filas en total), así como la suma de los números de las puntas (6 puntas), sea 26.



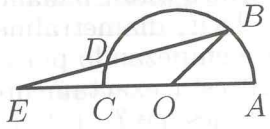
Jueves 31. Sea $ABCDE$ un pentágono regular. ¿Cuánto miden los ángulos que se forman al intersectar las rectas AD y EC?



Problemas del Mes de Noviembre.

Viernes 1. ¿Cómo se pueden distribuir 24 personas en 6 filas de modo que en cada fila haya 5 personas?

Lunes 4. Sean O el centro de un círculo de radio r y $ED = r$. Si $\angle DEC = k\angle BOA$, encuentra k.



Martes 5. Un número capicúa es un número entero que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. ¿Cuántos números capicúas hay entre el 10 y el 1000?

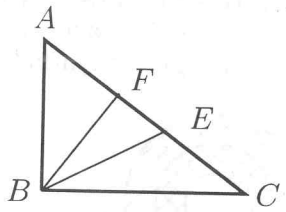
Miercoles 6. Un pueblo tiene 2500 habitantes, el 60% de los cuales votó en una elección para elegir presidente municipal. De los votantes, el 38% votó por Patricio, el 32% votó por Jiménez y el 30% votó por Rodríguez. ¿Cuántos de los votantes, no votaron por Patricio?

Jueves 7. Se aumenta el radio de un círculo en un 100%. ¿En qué porcentaje aumenta su área?

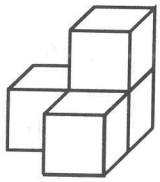
Viernes 8. Si $(6!)(7!) = n!$, ¿cuánto vale n $(n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 ... \cdot (n-1) \cdot n)$?

Lunes 11. ¿Cuántos números distintos de tres cifras se pueden formar con 0, 1, 1, 2, 2, 2?

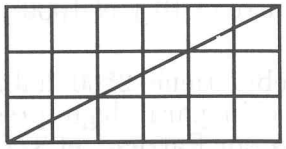
Martes 12. En el triángulo ABC, el ángulo $ABC = 90°$. Los puntos E y F están en AC y cumplen que $AE = AB$ y $CF = CB$. ¿Cuánto mide el ángulo EBF?



Miercoles 13. Se pintó la parte exterior del conjunto de cubos, ¿cuántas caras se pintaron?



Jueves 14. Si una diagonal se dibuja en el rectángulo de 3×6, pasa por 4 vértices de los cuadrados pequeños dibujados en su interior, ¿cuántos vértices de los cuadrados pequeños cortará la diagonal de un rectángulo de 45×30?



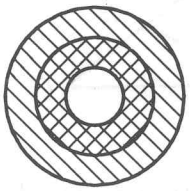
Viernes 15. Un número de seis cifras empieza con 1. Si este dígito lo recorremos a la posición de las unidades, sin cambiar el orden de los otros dígitos, el nuevo número es tres veces el original. ¿Cuál es el número original?

Lunes 18. ¿Cuál es el valor de X en la siguiente expresión

$$1 + 2 - 3 + 4 + 5 - 6 + ... + 100 + 101 - 102 = X?$$

Martes 19. A Carlos se le olvidó el número secreto que le daba acceso al Banco; sin embargo, recordaba que la suma de los cuatro dígitos del número es 9 y ninguno de ellos es cero. Además, es un múltiplo de 5 y mayor que 2002. ¿Cuál es el número?

Miercoles 20. Tenemos tres círculos concéntricos de radios a, $2a$ y $3a$, respectivamente. ¿Cuál es la razón entre el área de la región cuadriculada y el área de la región rayada?



Jueves 21. Encuentra x, y y z no-negativas, tales que

$$\begin{aligned} z^x &= y^{2x} \\ 2^z &= 2 \cdot 4^x \\ x + y + z &= 16. \end{aligned}$$

Viernes 22. Si $0 < x < y$, ¿cuántas soluciones enteras tiene la ecuación $2x + 3y = 50$?

Lunes 25. Si 3 divide a $x + 2y$, ¿cuál es el mayor entero que divide a $y + 2x$?

Martes 26. Un pintor está parado sobre el peldaño medio de una escalera. Sube 4 peldaños y baja 8. Luego sube 2 más y por último sube 11 peldaños hasta llegar al tope de la escalera. ¿Cuántos peldaños tiene la escalera?

Miercoles 27. ¿Cuál es el mayor valor de n tal que 25 divide a $n! + 1$? ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$.)

Jueves 28. Un triángulo rectángulo tiene hipotenusa 6 y perímetro 14. ¿Cuál es el área del triángulo?

Viernes 29. Mientras Mario hacía una serie de sumas en la calculadora, notó que había sumado 35095 en lugar de 35.95. Para obtener la suma correcta en un sólo paso, ¿qué cantidad debe sumar o restar a su cuenta?

Problemas del Mes de Diciembre.

Lunes 2. En un cuadrado $ABCD$ de lado 1, E es punto medio de la diagonal BD y F punto medio de EB. ¿Cuál es el área del triángulo BCF?

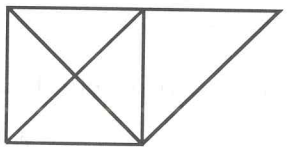
Martes 3. ¿Quién es mayor, $\sqrt[4]{4}$ ó $\sqrt[8]{8}$?

Miercoles 4. ¿Cuál es el número que falta en la sucesión $2, 3, 5, 9, \square, 33, ...$?

Jueves 5. ¿Cuántos dígitos tiene el número $N = 2^{12}5^8$?

Viernes 6. ¿De cuántas maneras se puede escribir el 105 como la suma de dos o más enteros positivos y consecutivos?

Lunes 9. ¿Cuántos triángulos (de todos los tamaños) hay en la siguiente figura?



Martes 10. Encuentra dos números sin ceros cuyo producto sea 1,000,000,000.

Miercoles 11. ¿Cuál es el menor entero que tiene 14 divisores?

Jueves 12. ¿Cuál es el mayor número de 9 cifras distintas que es divisible por 18?

Viernes 13. ¿Cuál es la cifra decimal que ocupa el lugar 2002 en el desarrollo decimal de $\frac{4}{101}$?

Lunes 16. ¿Cuántos valores puede tener el dígito A tal que $9A523176$ sea divisible por 8?

Martes 17. ¿Cuántos ceros hay al final de $(10^2+10^3+...+10^{10})^{2002}$?

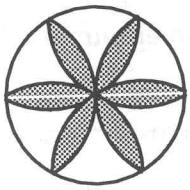
Miercoles 18. Las caras de un paralelepípedo tienen áreas $2x$, $\frac{y}{2}$ y xy. ¿Cuál es el volumen del sólido?

Jueves 19. Si un número tiene 221 cifras y el producto de éstas es 3^{442}, ¿cuál es la suma de dichas cifras?

Viernes 20. ¿Cuál es la solución de la ecuación $x^{x^3} = 3$?

Lunes 23. ¿De cuántas maneras se pueden escoger tres números distintos entre el 1 y el 100 de tal forma que la suma sea divisible por 3?

Martes 24. Calcula el área de la flor inscrita en la circunferencia de radio r, que se muestra en la figura.



Miercoles 25. El símbolo 25_m representa un número de dos dígitos en la base m. ¿Cuánto vale m si el número 52_m es el doble del número 25_m?

Jueves 26. Expresa el número 10 empleando cinco números 9 y los signos de $+$, $-$, $\times$ y $\div$.

Viernes 27. Mañana es sábado 28 de diciembre. ¿Qué día de la semana será el 28 de diciembre del año 2502?

Lunes 30. ¿En qué número termina 2002^{2002}?

Martes 31. ¿Cuál es el máximo número de ángulos interiores rectos que puede tener un octágono?

Soluciones de los Problemas

Soluciones de los Problemas de Enero.

Martes 1. Sea $A = \frac{bh}{2}$ el área del triángulo original. Si aumentamos la base un 10% y disminuimos la altura en un 10%, el área B del nuevo triángulo será:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\left(\frac{11\,b}{10}\right)\left(\frac{9\,h}{10}\right)}{2} \\ &= \frac{\frac{99\,bh}{100}}{2} \\ &= \frac{99\,A}{100} \end{aligned}$$

y en consecuencia se ha producido una disminución de un 1% en el área del triángulo original.

Miercoles 2. Si elevamos al cuadrado los números $0, 1, .., 9$ tenemos los números $0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81$. Los números de más cifras elevados al cuadrado tendrán las mismas terminaciones que éstos. Por lo tanto, los números elevados al cuadrado que al dividirlos entre 8 dejan residuo 1, son los números impares.

Jueves 3. Si x es la calificación del cuarto examen, tenemos que $\frac{8+9+10+x}{4} = 9$, de donde $x = 36 - 27 = 9$.

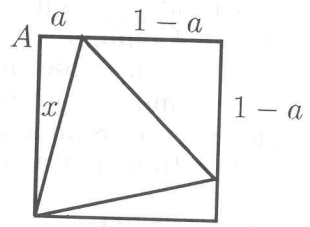
Viernes 4. Coloquemos las fichas de dominó como fracciones menores o iguales que 1:

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{1} \\ \frac{2}{6} & \frac{2}{5} & \frac{2}{4} & \frac{2}{3} & \frac{2}{2} & \\ \frac{3}{6} & \frac{3}{5} & \frac{3}{4} & \frac{3}{3} & & \\ \frac{4}{6} & \frac{4}{5} & \frac{4}{4} & & & \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{5} & & & & \\ \frac{6}{6}. & & & & & \end{array}$$

Para sumar estas fracciones observamos que la suma por columnas es $\frac{21}{6}$, $\frac{15}{5}$, $\frac{10}{4}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{3}{2}$ y 1. Luego, la suma total es

$$\frac{21}{6}+\frac{15}{5}+\frac{10}{4}+\frac{6}{3}+\frac{3}{2}+1=\frac{27}{2}.$$

Lunes 7. Llamemos al lado del triángulo x y a al fragmento del lado del cuadrado que está entre un vértice del cuadrado y el vértice del triángulo inscrito, como se muestra en la figura.



Utilizando el teorema de Pitágoras, tenemos que

$$\begin{aligned} x^2 &= 1^2+a^2 \\ x^2 &= 2(1-a)^2, \end{aligned}$$

igualando las ecuaciones anteriores tenemos que $1^2+a^2=2(1-a)^2$. Resolviendo la ecuación y despejando a, obtenemos que, $a=2\pm\sqrt{3}$ y la solución es $a=2-\sqrt{3}$, ya que sino a sería mayor que 1. Sustituyendo el valor de a en alguna de las dos ecuaciones originales, tenemos que $x=2\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Martes 8. Las dos desigualdades son equivalentes a:
$17{\cdot}2<5{\cdot}n$ y $13{\cdot}n<17{\cdot}11$, es decir, n debe cumplir: $6=\frac{30}{5}<\frac{34}{5}<n$ y $n<\frac{187}{13}<\frac{195}{13}=15$.
Luego, n es tal que: $7\leq n\leq 14$, es decir, $n=7,8,9,10,11,12,13$ y 14.

Miercoles 9. Sea x el porcentaje de los habitantes que hablan sólo el primer idioma, y el porcentaje de los que hablan ambos idiomas y z el porcentaje de los que hablan sólo el otro idioma. Sabemos que $x+y=70\%$ y $y+z=60\%$. Como cada habitante habla al menos uno de los dos idiomas, $x+y+z=100\%$. Resolviendo las ecuaciones obtenemos $y=30\%$.

Jueves 10. Al factorizar la expresión n^3-n obtenemos:

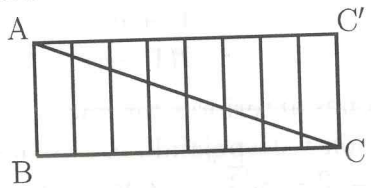
$$n^3-n=n(n^2-1)=n(n+1)(n-1)=(n-1)(n)(n+1),$$

que es el producto de tres números consecutivos, por lo tanto, uno de ellos es múltiplo de 3 y al menos uno de los otros dos es múltiplo de 2. Por lo tanto, $n^3 - n$ es múltiplo de $2 \times 3 = 6$.

Viernes 11. Para resolver este problema es preciso que recordemos que las fechas del calendario se mueven un día al transcurrir cada año normal y dos días cuando se pasa a un año bisiesto. Luego, al cabo de cuatro años (tiempo necesario para que pase un año bisiesto), el día de la semana en el cual cae cualquier fecha se adelantará cinco días, de allí que si el 29 de febrero de 1976 cayó en jueves, en 1980 esa misma fecha cayó en martes, en 1984 cayó en domingo y así sucesivamente. Como la semana tiene 7 días y cada cuatro años la misma fecha cae cinco días adelante, el 29 de febrero caerá nuevamente en jueves cuando se produzca un múltiplo común de 7 y 4, luego, habrá que esperar 28 años para que el niño cumpla años otra vez un día jueves, ésto ocurrirá en el año 2004.

Lunes 14. $999000 - 990001 = 8999$.

Martes 15. Si ponemos otro triángulo igual sobre el lado AC como se muestra en la figura



tenemos un rectángulo $ABCC'$. Por lo tanto, las rectas paralelas miden todas 10 y la suma de los 7 segmentos dentro del triángulo ABC es igual a $\frac{7 \cdot 10}{2} = 35$.

Miercoles 16. La cantidad de divisores que tiene un número está determinado por su descomposición en primos. Por ejemplo, $160 = 2^5 \times 5$, entonces $1 = 2^0 \times 5^0$, $40 = 2^3 \times 5^1$ y $32 = 2^5 \times 5^0$ son algunos de los divisores de 160. El número total de divisores que tiene 160 depende de los posibles exponentes de los primos de su descomposición, es decir, dado que $160 = 2^5 \times 5$, el exponente del 2 puede ser $\{0, 1, 2, 3, 4$ ó $5\}$ y el del 5 $\{0$ ó $1\}$, luego 160 tiene $6 \times 2 = 12$ divisores.
El número 192, lo podemos escribir como $192 = 2^6 \times 3^1$ y el número 320 como $320 = 2^6 \times 5^1$, luego, estos dos números tienen el mismo número de divisores, es decir, cada uno tiene 14 divisores.

Jueves 17. El quinto nivel tiene $3 \times 4 = 12$ pelotas, el sexto nivel tiene $2 \times 3 = 6$, el séptimo nivel tiene $1 \times 2 = 2$ pelotas. Notemos que el número de pelotas en los lados de cada rectángulo aumenta

en 1 cada vez que bajamos un nivel. Por lo tanto, el número total de pelotas es

$$1\times 2+2\times 3+3\times 4+4\times 5+5\times 6+6\times 7+7\times 8=168 \quad \text{pelotas.}$$

Viernes 18. Si hacemos la suma, al llegar a la cuarta columna obtenemos que $3\cdot\square+1=22$, por lo tanto, $\square=7$.

Lunes 21. El área de la región sombreada corresponde al área del cuadrado menos el área de los dos cuartos de círculo. El área del cuadrado es x^2 y los dos cuartos de círculo forman un medio círculo, de área:

$$\frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}=\frac{\frac{\pi x^2}{4}}{2}=\frac{\pi x^2}{8}.$$

Luego, el área buscada es:

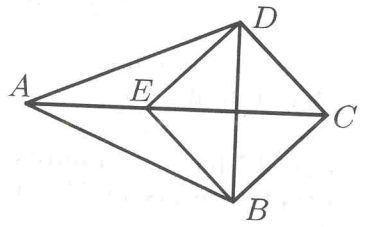
$$x^2-\frac{\pi x^2}{8}=x^2\left(1-\frac{\pi}{8}\right).$$

Martes 22. Tenemos que

$$\begin{array}{rclcrcl}
3+B+C & = & 18 & \Rightarrow & B+C & = & 15\\
B+C+D & = & 18 & \Rightarrow & D & = & 3\\
D+E+8 & = & 18 & \Rightarrow & E & = & 7\\
E+8+G & = & 18 & \Rightarrow & G & = & 3\\
8+G+H & = & 18 & \Rightarrow & H & = & 7.
\end{array}$$

Miercoles 23. Del 1 al 100 aparece 20 veces, ya que en cada decena aparece una vez y en la decena que va del 50 al 59 aparece 11 veces. Como en cada centena aparece 20 veces y tenemos 10 centenas del 1 al 1000, tenemos que aparecerá $10\cdot 20$, sin embargo, en la centena del 500 al 599 aparece además $100=10^2$ veces. Luego, en total tenemos que aparece $10\cdot 20+10^2=2\cdot 10^2+10^2=10^2(2+1)=3\cdot 10^2$.

Jueves 24. Llamemos $x=AE$, $2y=EC$ y $\mathcal{A}$ al área del cuadrado $BEDC$.



Denotemos por (AED) el área del triángulo AED, entonces tenemos que

$$(AED) = \frac{xy}{2} = \mathcal{A}. \tag{1}$$

Por otro lado tenemos que $\mathcal{A} = 2\left(\frac{2y \cdot y}{2}\right) = 2y^2$. Ahora bien, utilizando el teorema de Pitágoras tenemos que $(x+y)^2 + y^2 = 130$, luego,

$$x^2 + 2xy + 2y^2 = 130. \tag{2}$$

Despejando x de la ecuación (1) tenemos que $x = \frac{2\mathcal{A}}{y}$ y como $2y^2 = \mathcal{A}$, sustituyendo en la ecuación (2)

$$\begin{aligned} \frac{4\mathcal{A}^2}{y^2} + 4\mathcal{A} + \mathcal{A} &= 130 \\ 16y^2 + 4\mathcal{A} + \mathcal{A} &= 130 \\ 8\mathcal{A} + 4\mathcal{A} + \mathcal{A} &= 130. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{A} = 10$.

Viernes 25. Para construir el número mayor, empezaremos acomodando las cifras de izquierda a derecha. Ponemos el primer cuatro, hasta la izquierda. De esta forma queda determinada la posición del segundo cuatro. Es decir, $4\,a\,b\,c\,d\,4\,e\,f$.
La siguiente cifra debería ser un 3, pero no podemos colocar el otro 3. Ahora tratemos con un 2. Al poner un 2 nos queda el número $42\,b\,c\,24\,e\,f$, en cuyo caso ya no podemos acomodar los números que faltan en los lugares restantes.
Si ponemos en el segundo lugar un 1, $41\,b\,1\,d\,4\,e\,f$, después un 3 y luego un 2, los lugares restantes quedan determinados. Obtenemos así el número 41312432, que es el mayor número que cumple con las condiciones del problema.

Lunes 28. Al escribir el número $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2002}$ en base dos obtenemos

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2002} = 1_2 + 10_2 + 10_2^2 + 10_2^3 + ... + 10_2^{2002}.$$

Por lo que al hacer la suma nos va a quedar el número 111...1, con 2003 unos. Por lo tanto, no hay ningún cero.

Martes 29. De las 11:41 a las 12 hay 19 minutos. De las 12 a las 14 hay 120 minutos. Por lo tanto, de las 11:41 a las 14:02 hay 141 minutos.

Denotemos por (AED) el área del triángulo AED, entonces tenemos que

$$(AED) = \frac{xy}{2} = \mathcal{A}. \tag{1}$$

Por otro lado tenemos que $\mathcal{A} = 2\left(\frac{2y \cdot y}{2}\right) = 2y^2$. Ahora bien, utilizando el teorema de Pitágoras tenemos que $(x+y)^2 + y^2 = 130$, luego,

$$x^2 + 2xy + 2y^2 = 130. \tag{2}$$

Despejando x de la ecuación (1) tenemos que $x = \frac{2\mathcal{A}}{y}$ y como $2y^2 = \mathcal{A}$, sustituyendo en la ecuación (2)

$$\begin{aligned} \frac{4\mathcal{A}^2}{y^2} + 4\mathcal{A} + \mathcal{A} &= 130 \\ 16y^2 + 4\mathcal{A} + \mathcal{A} &= 130 \\ 8\mathcal{A} + 4\mathcal{A} + \mathcal{A} &= 130. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{A} = 10$.

Viernes 25. Para construir el número mayor, empezaremos acomodando las cifras de izquierda a derecha. Ponemos el primer cuatro, hasta la izquierda. De esta forma queda determinada la posición del segundo cuatro. Es decir, $4\,a\,b\,c\,d\,4\,e\,f$.
La siguiente cifra debería ser un 3, pero no podemos colocar el otro 3. Ahora tratemos con un 2. Al poner un 2 nos queda el número $42\,b\,c\,24\,e\,f$, en cuyo caso ya no podemos acomodar los números que faltan en los lugares restantes.
Si ponemos en el segundo lugar un 1, $41\,b\,1\,d\,4\,e\,f$, después un 3 y luego un 2, los lugares restantes quedan determinados. Obtenemos así el número 41312432, que es el mayor número que cumple con las condiciones del problema.

Lunes 28. Al escribir el número $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2002}$ en base dos obtenemos

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2002} = 1_2 + 10_2 + 10_2^2 + 10_2^3 + ... + 10_2^{2002}.$$

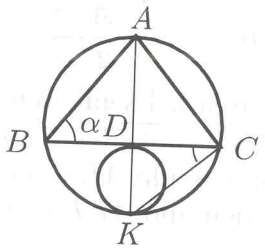
Por lo que al hacer la suma nos va a quedar el número 111...1, con 2003 unos. Por lo tanto, no hay ningún cero.

Martes 29. De las 11:41 a las 12 hay 19 minutos. De las 12 a las 14 hay 120 minutos. Por lo tanto, de las 11:41 a las 14:02 hay 141 minutos.

Miercoles 30. Tenemos que $(r+\frac{1}{r})^3 = r^3 + 3r + \frac{3}{r} + \frac{1}{r^3}$, de donde

$$\begin{aligned}
\left(r+\frac{1}{r}\right)^3 - 3r - \frac{3}{r} &= r^3 + \frac{1}{r^3} \\
\left(r+\frac{1}{r}\right)^3 - 3\left(r+\frac{1}{r}\right) &= r^3 + \frac{1}{r^3} \\
\left(r+\frac{1}{r}\right)\left[\left(r+\frac{1}{r}\right)^2 - 3\right] &= r^3 + \frac{1}{r^3} \\
\left(r+\frac{1}{r}\right)(3-3) &= r^3 + \frac{1}{r^3} \\
0 &= r^3 + \frac{1}{r^3}.
\end{aligned}$$

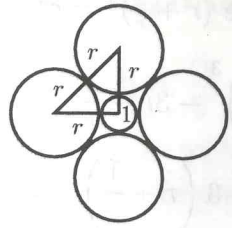
Jueves 31. La mediatriz del lado BC es altura del triángulo y bisectriz del ángulo en A, luego ésta pasa por el centro de las dos circunferencias y por el punto de tangencia K de las circunferencias. Además, pasa por el punto de tangencia D de $\mathcal{C}_2$ con el triángulo ABC. Llamemos a al lado BC.



Como $\alpha = \angle ABC$, tenemos que $\angle BCK = \angle BAK = 90° - \alpha$, luego $DK = DC \tan \angle BCK = \frac{a}{2}\tan(90° - \alpha)$. De donde, el radio de $\mathcal{C}_2$ es $\frac{a}{4}\tan(90° - \alpha)$, ya que DK es su diámetro.

Soluciones de los Problemas de Febrero.

Viernes 1. Sea r es radio de las monedas grandes que rodean a la de radio 1. Si tomamos el triángulo que tiene como vértices tres centros de monedas, como se muestra en la figura, resulta que el triángulo es rectángulo.



Entonces, por el teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned}(2r)^2 &= (r+1)^2+(r+1)^2\\ 4r^2 &= 2r^2+4r+2\\ r^2-2r-1 &= 0,\end{aligned}$$

resolviendo la ecuación tenemos que,

$$r=\frac{2\pm\sqrt{4+4}}{2}=1\pm\sqrt{2}.$$

Como r debe ser positivo tenemos que $r=1+\sqrt{2}$.

Lunes 4. AF es el radio del semicírculo ABC, luego, su área es igual a

$$(ABC)=\frac{\pi\cdot AF^2}{2}=\frac{\pi}{2},$$

donde (ABC) denota el área del semicírculo ABC. Por el teorema de Pitágoras, tenemos $AB=\sqrt{AF^2+FB^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$. Como AB es el diámetro del semicírculo AEB tenemos que el radio es $\frac{AB}{2}$, de donde, el área del semicírculo AEB es igual a

$$(AEB)=\frac{\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2}{2}=\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}.$$

El área sombreada es igual a (AEB) menos el área de la región comprendida entre la recta AB y el arco AB, que llamaremos $\mathcal{A}$. Ahora bien,

$$\mathcal{A}=\frac{(ABC)}{2}-\frac{AF\cdot FB}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, el área de la región sombreada es

$$(AEB)-\mathcal{A}=\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Martes 5. Consideremos los números de dos dígitos $ab = 10\,a + b$, y supongamos que $10\,a + b = x$, tenemos que buscar los números $ba = 10\,b + a = x + 9$. Es decir, tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 10\,a + b &= x \\ 10\,b + a &= x + 9. \end{aligned}$$

Restando la segunda ecuación de la primera, tenemos que

$$(10 - 1)\,a + (1 - 10)\,b = 9\,a - 9\,b = 9(a - b) = -9,$$

es decir, $a - b = -1$. Por lo tanto, los números entre 10 y 100 que cumplen esta condición son 89, 78, 67, 56, 45, 34, 23 y 12, es decir, tenemos 8 números.

Miercoles 6. Llamemos t al tiempo transcurrido desde que el esquiador sale hasta la 1 P.M. y sea v la velocidad requerida para que el esquiador llegue a las 12 A.M. Como la distancia que tiene que recorrer es la misma tenemos que

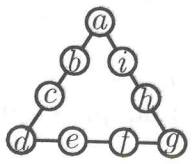
$$\begin{aligned} 10t &= 15(t - 2) \\ t &= 6, \end{aligned}$$

es decir, que la distancia que debe recorrer el esquiador son 60 km. Además como distancia=velocidad· tiempo,

$$\begin{aligned} 60 &= v(t - 1) \\ 60 &= 5v \\ v &= 12. \end{aligned}$$

Por lo tanto, viajará a $12\frac{km}{hr}$.

Jueves 7. Llamemos a, b, c, d, e, f, g, h, i a los círculos como se muestra en la figura



La suma de todos los números del 1 al 9 es 45, luego

$$a + b + c + d + e + f + g + h + i = 45.$$

Por otra parte, tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= 20 \\ d+e+f+g &= 20 \\ a+i+h+g &= 20, \end{aligned}$$

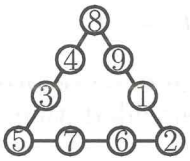
de donde,

$$\begin{aligned} a+b+c+d+d+e+f+g+a+i+h+g &= 60 \\ 45+a+g+d &= 60 \\ a+g+d &= 15. \end{aligned}$$

Es decir, los números de los vértices del triángulo tienen que sumar 15; busquemos posibles combinaciones para estos vértices. Una de ellas podría ser: $a = 8$, $d = 5$ y $g = 2$, entonces

$$\begin{aligned} b+c &= 7 \\ i+h &= 10 \\ e+f &= 13. \end{aligned}$$

Jugando con las posibles soluciones para estas ecuaciones encontramos varias soluciones, una sería $b = 4$, $c = 3$, $e = 7$, $f = 6$, $i = 9$ y $h = 1$ como se muestra en la figura



Viernes 8. La descomposición en primos de 60 es, $60 = 2\times2\times3\times5$. Para obtener un número n que sea un cubo perfecto, es necesario que en la descomposición en primos de n, los exponentes sean múltiplos de 3. Como $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ y estamos buscando el n más pequeño entonces, $n = 2 \times 3^2 \times 5^2$. Por lo tanto, $n = 450$.

Lunes 11. Denotemos por (x, y) cada posible tirada, donde $1 \leq x \leq 6$ y $1 \leq y \leq 4$. Hay 24 parejas posibles:

$$(1,1),(1,2),...,(1,6),(2,1),(2,2),...,(2,4),...,(6,1),(6,2),...,(6,4).$$

De éstas, sólo 4 cumplen que $x + y = 7$ $((3,4),(4,3),(5,2),(6,1))$. Por lo tanto, la probabilidad de que en una tirada de ambos dados la suma sea 7 es $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$.

Martes 12. Los números posibles son

$$a+1, a+2, ..., a+(b-a-2), a+(b-a-1).$$

Por lo tanto, hay $b - a - 1$ números posibles.

Miercoles 13. Para formar un cuadrilátero, no podemos tomar 3 ó 4 vértices en una fila. Luego, sólo es posible tomar 2 de cada fila y esto se puede hacer de 6 maneras, ya que son todas las formas posibles de escoger una pareja de los cuatro puntos. Entonces, como es independiente tomar los otros 2 vértices en la otra fila, se podrán dibujar $6 \times 6 = 36$ cuadriláteros.

Jueves 14. Como $a_1 = 0$ y $a_2 = 2$ entonces tenemos que los primeros elementos de la sucesión son

$$\begin{array}{rcl} a_3 & = & \frac{0+2}{2} = 1 \\ a_4 & = & \frac{0+2+1}{3} = 1 \\ a_5 & = & \frac{0+2+1+1}{4} = 1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n+1} & = & \dfrac{0+2+\underbrace{1+...+1}_{n-2}}{n} = 1 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Por lo tanto, $a_3 = a_4 = ... = a_{2002} = 1$.

Viernes 15. $50\frac{1}{2} + 49\frac{38}{76} = 100$.

Lunes 18. Como r es el resultado de duplicar tanto la base como el exponente de a^b, luego, $r = (2a)^{2b}$. Utilizando la regla de los exponentes tenemos:

$$\begin{aligned} r &= 2^{2b}a^{2b} \\ &= a^b(2^{2b}a^b) \\ &= a^b(4a)^b. \end{aligned}$$

Por otra parte $r = a^b x^b$, luego $x = 4a$.

Martes 19. Si r es el radio del círculo, su perímetro es $2\pi r$. Al aumentar el radio en π, el nuevo perímetro será: $2\pi(r+\pi) = 2\pi r + 2\pi^2$. Por lo tanto, el perímetro aumenta en $2\pi^2$.

Miercoles 20. Como $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$, tenemos que $a^2 - b^2$ divide a $a^4 - b^4$, luego $(a^4 - b^4, a^2 - b^2) = (a^2 - b^2)$.

Jueves 21. Para que la fracción $\frac{m}{n}$ sea máxima, el numerador tiene que ser el valor más grande que tenemos y el denominador el más pequeño. Luego, $\frac{m}{n} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.

Viernes 22. Primero hay que observar que un número que cumple la propiedad no puede tener ningún cero. Ahora contemos los números sin ceros y con cifras diferentes:

1. De una cifra hay 9.
2. De dos cifras hay 8×9.
3. De tres cifras hay $7 \times 8 \times 9$.
4. De cuatro cifras hay $6 \times 7 \times 8 \times 9$.

Observemos que si tomamos n dígitos distintos de cero y formamos todos los números posibles tendremos $n!$ números, pero sólo uno de estos números cumple con la propiedad de que sus cifras esten en orden estrictamente creciente, luego:

1. De una cifra hay $\frac{9}{1!}$ números que cumplen con la propiedad.
2. De dos cifras hay $\frac{8\times 9}{2!}$ números que cumplen con la propiedad.
3. De tres cifras hay $\frac{7\times 8\times 9}{3!}$ números que cumplen con la propiedad.
4. De cuatro cifras hay $\frac{6\times 7\times 8\times 9}{4!}$ números que cumplen con la propiedad.

Por lo tanto, hay

$$9 + \frac{9 \times 8}{2!} + \frac{9 \times 8 \times 7}{3!} + \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4!} = 255$$

números que cumplen con la propiedad.

Lunes 25. Suponiendo que la Tierra tiene forma esférica de radio R, la longitud de la cinta, al intercalar el metro adicional, está dada por:

$$l = 2\pi R + 1. \tag{3}$$

Por otra parte, si dicha cinta se separa una distancia d de la superficie terrestre, se tiene:

$$l = 2\pi(R + d). \tag{4}$$

Igualando las ecuaciones (3) y (4), y despejando d tenemos:

$$\begin{aligned} 2\pi R + 1 &= 2\pi(R + d) \\ 2\pi R + 1 &= 2\pi R + 2\pi d \\ 1 &= 2\pi d \\ d &= \frac{1}{2\pi}. \end{aligned}$$

Nótese que la distancia a la cual se separa la cinta no depende del radio de la Tierra, es decir, la separación $\frac{1}{2\pi}$ es la misma en una pequeña pelota que en la Tierra.

Martes 26. El número 120 en base 3 es

$$0 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^2 = 15 \qquad \text{en base 10.}$$

Para escribirlo en base 2 observemos que $15 = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$, por lo tanto, el número en base dos es 1111.

Miercoles 27. Si una gallina pone 2 huevos en 3 días, entonces 4 gallinas ponen 8 huevos en 3 días. Luego, en 9 días 4 gallinas ponen 24 huevos.

Jueves 28. Vamos a contar los 1's que se ocupan al escribir los números:

1. Del 1 al 9 utilizamos un 1.
2. Del 1 al 99 utilizamos $10 + 10 = 20$ (10 por los que empiezan en 1, y 10 por los que acaban en 1).
3. Del 1 al 999 utilizamos $100 + 10 \times 20 = 300$ (100 por los que empiezan en 1, y 20 por cada centena).
4. Del 1 al 9,999 utilizamos $1,000 + 10 \times 300 = 4,000$ (1,000 por los que empiezan con 1, y 300 por cada millar).
5. Del 1 al 99,999 utilizamos $10,000 + 10 \times 4,000 = 50,000$.
6. Del 1 al 999,999 utilizamos $100,000 + 10 \times 50,000 = 600,000$.

Por lo tanto, el último número que se escribe es el 999,999.

Soluciones de los Problemas de Marzo.

Viernes 1. Los triángulos AGB y FGD son semejantes, con razón de semejanza igual a tres. De esto tenemos

$$\frac{1}{3} = \frac{FG}{AG} = \frac{FD}{AB}. \tag{5}$$

Por otro lado, los triángulos AFD y EAB también son semejantes, luego

$$\frac{FD}{AB} = \frac{AF}{EA},$$

sustituyendo en la ecuación (5) tenemos que

$$\frac{AF}{EA} = \frac{1}{3},$$

por lo que $3AF = AE$. Como $AF = 4$, tenemos entonces

$$FE = AE - AF = 8.$$

Lunes 4. Primero observemos que

$$\begin{aligned}\frac{2n^2+4n+18}{3n+3} &= \frac{(2n+2)(n+1)}{3(n+1)} + \frac{16}{3(n+1)} \\ &= \frac{2n+2}{3} + \frac{16}{3(n+1)} \\ &= \frac{1}{3}\left(2n+2+\frac{16}{n+1}\right),\end{aligned}$$

entonces, para que tengamos esperanza de que sea entero debemos tener que $n+1$ debe dividir a 16, luego sólo hay que analizar los casos $n = 1, 3, 7, 15$.

n	$\frac{2n+2}{3} + \frac{16}{3(n+1)}$		
1	$\frac{4}{3} + \frac{8}{3}$	$=$	4
3	$\frac{8}{3} + \frac{4}{3}$	$=$	4
7	$\frac{16}{3} + \frac{2}{3}$	$=$	6
15	$\frac{31}{3} + \frac{1}{3}$	$=$	11.

Unicamente tenemos 4 valores para n en los cuales el cociente es un entero.

Martes 5. Se podría pensar que es 1111, pero 11^{11} es mucho mayor.

Miercoles 6. Como la suma de los dígitos del entero debe ser divisible entre 7 y entre 3, el dígito 3 debe aparecer siete veces y el dígito 7 tres veces. Entonces, el número buscado tiene 10 dígitos, tres son 7 y siete son 3. La suma de esos dígitos es $3 \cdot 7 + 7 \cdot 3 = 42$ que es divisible entre 7 y 3. Sólo resta encontrar alguna manera de acomodar los números, para que sea divisible entre 7.

Vamos a analizar el número 3 333 333 333, a través de los residuos de $3 \cdot 10^9, 3 \cdot 10^8, 3 \cdot 10^7 \ldots 3 \cdot 10^0$ al dividirlos entre 7, para luego acomodar los tres números 7 de tal forma que su suma sea divisible entre 7.

Número	Residuo	Número	Residuo
$3 \cdot 10^0$	3	$3 \cdot 10^5$	1
$3 \cdot 10^1$	2	$3 \cdot 10^6$	3
$3 \cdot 10^2$	6	$3 \cdot 10^7$	2
$3 \cdot 10^3$	4	$3 \cdot 10^8$	6
$3 \cdot 10^4$	5	$3 \cdot 10^9$	4.

Ahora, como $3,333,333,333 = 3 \cdot 10^9 + 3 \cdot 10^8 + 3 \cdot 10^7 + \ldots + 3 \cdot 10 + 3$ podemos tomar sólo los residuos al dividir entre 7 y obtenemos que la suma de los residuos es 36, que al volver a dividirlo entre 7 deja residuo 1, así que los tres números 7 los debemos poner en lugares cuya suma de residuos sea 1, 8, 15 etc. para que al quitarlos quede un múltiplo de 7 ($36 - 1 = 35, 36 - 8 = 28, 36 - 15 = 21, 36 - 22 = 14, \ldots$), por ejemplo, si quitamos 3×10^0, 3×10^1 y 3×10^6, la suma de sus residuos es 8 y colocando los números 7 en esos lugares obtenemos un múltiplo de 7. Veamos la siguiente tabla:

Exponentes	Residuos	Suma de Residuos
$0, 1, 6$	$3, 2, 3$	8
$0, 2, 8$	$3, 6, 6$	15
$0, 3, 5$	$3, 4, 1$	8
$1, 3, 7$	$2, 4, 2$	8
$1, 4, 5$	$2, 5, 1$	8
$2, 3, 4$	$6, 4, 5$	15.

La tercera columna de los exponentes, indica la máxima potencia, así comparando todos los exponentes vemos que el más pequeño es 4, eso quiere decir que, 3 333 377 733 es el menor de los números que es divisible entre 7.

Jueves 7. Los lados iguales del triángulo miden $b + 2$ donde b es la longitud de la base. Y sabemos que $3b + 4 = 34$, luego $b = 10$. Por lo tanto, la base mide 10 y los lados iguales miden 12.

Viernes 8. Tenemos que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{m}\right) = \left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{m-1}{m}\right) = 1,$$

entonces $m = n + 1$.

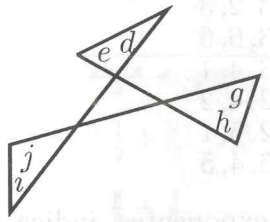
Lunes 11. Dos soluciones serían: $100 = 3(33) + \frac{3}{3}$ y $100 = 111 - 11$.

Martes 12. Caractericemos a los números entre 1 y 100, según quién los divide:

1. $\frac{100}{2} = 50$ son números pares;
2. $\frac{100}{3} \approx 33$ son múltiplos de 3;
3. $\frac{100}{6} \approx 16$ son múltiplos de 6, es decir, múltiplos de 2 y 3;
4. $\frac{100}{10} = 10$ son múltiplos de 10, es decir, múltiplos de 2 y 5;
5. $\frac{100}{15} \approx 6$ son múltiplos de 15, es decir, múltiplos de 3 y 5.

Tenemos 50+33 números que son divisibles entre 2 y 3, pero de estos 83 números, hemos contado dos veces los que son divisibles por 2 y por 3 (por ejemplo: 6, 12, 18, ...). Luego, hay $83-16 = 67$ números que son divisibles por 2 ó por 3. De este grupo, tenemos que quitar a los que son divisibles por 5, hay $10 + 6 = 16$ de estos números, pero también estamos quitando dos veces los que son divisibles por 2, 3 y 5 (el 30, 60 90). Por lo tanto, hay $67 - 16 + 3 = 54$ números entre 1 y 100 que son divisibles entre 2 ó 3, pero no entre 5.

Miercoles 13.



La suma de los ángulos internos en cada triángulo es 180°, luego, la suma de los ángulos de los tres triángulos es 540°. A esta cantidad le restamos la suma de los ángulos internos del triángulo que no tiene ángulos marcados, ya que esta suma es equivalente a la suma de los ángulos no marcados en los tres triángulos. Por lo tanto, la suma de los ángulos marcados es 360°.

Jueves 14. Factorizando el polinomio tenemos que

$$x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2 - 9)(x^2 - 4) = (x-3)(x+3)(x-2)(x+2) = 0.$$

Por lo que las cuatro soluciones son 3, -3, 2 y -2.

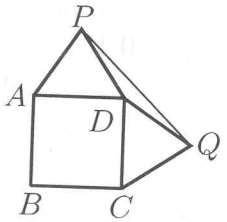
Viernes 15.

Lunes 18. Sea c el número de coches que se fabricaron en total y s el número de séptimos. Podemos plantear la ecuación:

$$c = \frac{c}{10} + \frac{c \cdot s}{7} + 399.$$

Simplificando la ecuación tenemos, $7c + 10c \cdot s + 27930 = 70c$, de donde, despejando c obtenemos, $c = \frac{27930}{63-10s}$. Queremos ver para que valor de s (que es un entero del 1 al 6) el cociente es un entero. Observemos que la descomposición en primos de 27930 es: $27930 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 7 \times 19$ y, los valores de $63 - 10s$ variando s son: 3, 13, 23, 33, 43 y 53. Es claro que sólo cuando $s = 6$ obtenemos un factor de 27930. Luego, $s = 6$ y el total de coches que se fabricaron es $c = \frac{27930}{3} = 9310$.

Martes 19. Construimos la figura como se indica. Como los triángulos ADP y CDQ son equiláteros, sus ángulos miden todos $60°$. Construyamos el triángulo PQD, este es un triángulo isósceles y su ángulo distinto mide $150°$, por lo tanto, el ángulo PQD mide $15°$.



Miercoles 20.

$$\begin{array}{cccccc} & X & X & X & X \\ + & Y & Y & Y & Y \\ & Z & Z & Z & Z \\ \hline Y & X & X & X & Z \end{array}$$

En el resultado de la suma Y está en las decenas de millar y por otra parte, X, Y y Z pueden ser a lo más 9. Luego $X+Y+Z \leqslant 27$, de donde, Y puede ser igual a 1 ó 2.

Supongamos que $Y = 1$ entonces, de la columna de las unidades tenemos que $X + Y = 10$ de donde $X = 9$. De la columna de las decenas se tiene que

$$1 + (X + Y) + Z = 10 + X,$$

luego sustituyendo los valores de X y Y obtenemos que $Z = 8$. Así, $X = 9$, $Y = 1$ y $Z = 8$ es solución.
Ahora supongamos que $Y = 2$. De la columna de las unidades se deduce que $X = 8$, y de la columna de las decenas tenemos que $Z = 7$. Sin embargo, sustituyendo los valores obtendremos 1 en lugar de 2 en las decenas de millar. Por lo tanto, la única solución es $X = 9$, $Y = 1$ y $Z = 8$.

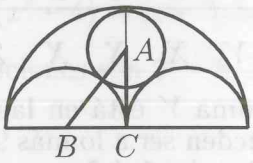
Jueves 21. Cómo al dividir la edad de Pedro entre 2, 3, 4, 5 y 6 le sobra 1 entonces la edad de Pedro menos 1 es múltiplo de 2, 3, 4, 5 y 6. Como el mínimo común múltiplo de estos números es 60, entonces Pedro tiene 61 años.

Viernes 22. Supongamos que para formar la mezcla al 12% hay que tomar x mililítros de solución al 3% y y mililítros al 30%. Luego, la primera porción contendrá $0.03x$ mililítros de agua oxigenada pura y la segunda, $0.3y$; en total habrá $0.03x + 0.3y$. Con esto tendremos $(x + y)$ mililítros de solución, en la que el agua oxigenada pura será $0.12(x + y)$. De donde, tenemos la ecuación

$$\begin{aligned} 0.03x + 0.3y &= 0.12(x + y) \\ 0.03x + 0.3y &= 0.12x + 0.12y \\ 0.12x - 0.03x &= 0.3y - 0.12y \\ 0.09x &= 0.18y \\ x &= 2y. \end{aligned}$$

Es decir, que deberá tomarse doble cantidad de solución al 3% que la empleada al 30%.

Lunes 25. Sea B uno de los centros de los semicírculos de radio 3, sea C el centro del semicírculo mayor y A el centro del círculo de radio r.



Supongamos que $Y = 1$ entonces, de la columna de las unidades tenemos que $X + Y = 10$ de donde $X = 9$. De la columna de las decenas se tiene que

$$1 + (X + Y) + Z = 10 + X,$$

luego sustituyendo los valores de X y Y obtenemos que $Z = 8$. Así, $X = 9$, $Y = 1$ y $Z = 8$ es solución.
Ahora supongamos que $Y = 2$. De la columna de las unidades se deduce que $X = 8$, y de la columna de las decenas tenemos que $Z = 7$. Sin embargo, sustituyendo los valores obtendremos 1 en lugar de 2 en las decenas de millar. Por lo tanto, la única solución es $X = 9$, $Y = 1$ y $Z = 8$.

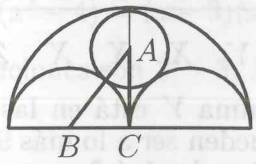
Jueves 21. Cómo al dividir la edad de Pedro entre 2, 3, 4, 5 y 6 le sobra 1 entonces la edad de Pedro menos 1 es múltiplo de 2, 3, 4, 5 y 6. Como el mínimo común múltiplo de estos números es 60, entonces Pedro tiene 61 años.

Viernes 22. Supongamos que para formar la mezcla al 12% hay que tomar x mililítros de solución al 3% y y mililítros al 30%. Luego, la primera porción contendrá $0.03x$ mililítros de agua oxigenada pura y la segunda, $0.3y$; en total habrá $0.03x + 0.3y$. Con esto tendremos $(x + y)$ mililítros de solución, en la que el agua oxigenada pura será $0.12(x + y)$. De donde, tenemos la ecuación

$$\begin{aligned} 0.03x + 0.3y &= 0.12(x + y) \\ 0.03x + 0.3y &= 0.12x + 0.12y \\ 0.12x - 0.03x &= 0.3y - 0.12y \\ 0.09x &= 0.18y \\ x &= 2y. \end{aligned}$$

Es decir, que deberá tomarse doble cantidad de solución al 3% que la empleada al 30%.

Lunes 25. Sea B uno de los centros de los semicírculos de radio 3, sea C el centro del semicírculo mayor y A el centro del círculo de radio r.



Tenemos que $BC = 3$, $AB = 3+r$ y $AC = 6-r$. El triángulo ABC es rectángulo, luego, utilizando el teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned} BC^2 + AC^2 &= AB^2 \\ 9 + (6-r)^2 &= (3+r)^2 \\ 18\,r &= 36 \\ r &= 2. \end{aligned}$$

Martes 26. Observemos que la sucesión se forma utilizando la siguiente regla. Empezamos con a, el siguiente término es $a+3$, el siguiente es $2(a+3)$, es decir, tenemos

$$a, a+3, 2(a+3), 2(a+3)+3, 2(2(a+3)+3), \ldots.$$

Luego, si $a = 3$ tenemos que $a+3 = 6$, $2(a+3) = 12$, $12+3 = 15$, $2 \cdot 15 = 30$, $30+3 = 33$, $2 \cdot 33 = 66$ y finalmente $66+3 = 69$. De donde, los siguientes dos términos son 66 y 69.

Miercoles 27. Es claro que son 3 árboles.

Jueves 28. Supongamos que los trenes salían cada x minutos, entonces, por el lugar donde yo me encontraba con un tren tenía que pasar el siguiente después de x minutos. Si el vehículo iba en mi dirección, tenemos que en $12-x$ minutos debía recorrer el camino que yo hacía en 12 minutos. Esto significa que el camino que yo andaba en un minuto, el tren lo hacía en $\frac{12-x}{12}$ minutos. Ahora, sí el tren iba en dirección contraria nos cruzaríamos 4 minutos después de haberme encontrado con el anterior y, en el tiempo restante, $(x-4)$ minutos, debía recorrer el camino hecho por mí en esos 4 minutos. Por lo tanto, el camino que yo andaba en 1 minuto lo hacia el tren en $\frac{x-4}{4}$ minutos. De donde, tenemos la ecuación $\frac{12-x}{12} = \frac{x-4}{4}$. Resolviendo, obtenemos $x = 6$, es decir, que cada 6 minutos los trenes iniciaban su itinerario.

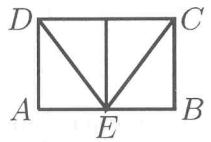
Viernes 29. Sea x el año en que publicó su primera novela. Como publica cada dos años, los siguientes años en que publica son: $x+2$, $x+4$, $x+6$, $x+8$, $x+10$ y $x+12$. La suma de todos estos años es 13804, entonces:

$$\begin{aligned} x+x+2+x+4+x+6+x+8+x+10+x+12 &= 13804 \\ 7x+42 &= 13804 \\ 7x &= 13762 \\ x &= 1966. \end{aligned}$$

Luego, en 1966 publicó su primera novela.

Soluciones de los Problemas de Abril.

Lunes 1. Podemos dividir el rectángulo como se muestra en la figura. Cada triángulo es una cuarta parte del área del rectángulo.



El área de la región sombreada es el área de tres triángulos, por lo que es $\frac{3}{4}$ del área del rectángulo, esto es, 18.

Martes 2. Primero consideramos la diferencia $1002^2 - 1001^2$, la cual podemos factorizar como

$$1002^2 - 1001^2 = (1002 - 1001)(1002 + 1001) = 2003.$$

Como no estamos contando ni el 1001^2 ni el 1002^2, entonces tenemos 2002 números.

Miercoles 3. Llamemos a, b, c los números entre el 4 y el 32. Tenemos que

$$\begin{aligned} 4 + a &= b \\ a + b &= c \\ b + c &= 32. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos $a = 8$, $b = 12$ y $c = 20$. La suma de los cinco números es 76.

Jueves 4. Un número es divisible por 11 si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan un lugar par y la suma de las cifras que ocupan un lugar impar es 0 o múltiplo de 11. La suma de todos los dígitos es 21 un número impar, entonces la diferencia de la suma de los números que ocupan lugares impares menos la suma de los números que ocupan lugares pares nunca será 0. Por otra parte, el valor más grande que puede tener esta diferencia es $6 + 5 + 4 - 3 - 2 - 1 = 9$, por lo tanto, esta diferencia no podrá ser un múltiplo de 11. Luego, no existe ningún número de 6 dígitos con dichas características que sea múltiplo de 11.

Viernes 5.

$$10^{99} - 99 = 1\,\underbrace{00\ldots0}_{99-\text{veces}} - 99 = \underbrace{99\ldots9}_{97-\text{veces}}\,01.$$

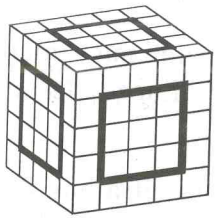
Entonces la suma es $9 \cdot 97 + 1 = 874$.

Lunes 8. Sea a el primer número, tenemos que $a + 2\,a + 4\,a + 8\,a + 16\,a = 62$, es decir, $31\,a = 62$, de donde, $a = 2$. Por lo tanto, el mayor es $16\,a = 32$.

Martes 9. Sea h= hombre, entonces, $x \cdot h$ durante un período de y días hicieron z casas, es decir, que $x \cdot h \cdot y = z$, de aquí tenemos que cada hombre construyó $h = \frac{z}{y \cdot x}$ porción de casa. Queremos saber en cuántos días (d), $q \cdot h$ construyeron r casas, es decir, tenemos la ecuación $q \cdot h \cdot d = r$. Despejando y sustituyendo el valor de h tenemos que $d = \frac{r}{q \cdot h} = \frac{r \cdot x \cdot y}{q \cdot z}$. Por lo tanto, el número de días es $\dfrac{r \cdot x \cdot y}{q \cdot z}$.

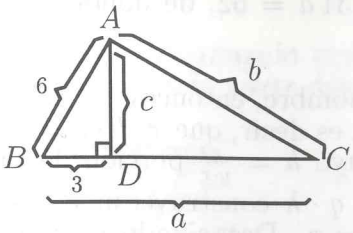
Miercoles 10. Al colocar 50 triángulos tenemos 25 abajo y 25 arriba. Por lo tanto, la longitud de los lados horizontales de la figura es 25. Entonces, el perímetro es 50 más los dos lados de los extremos. El perímetro es 52.

Jueves 11. Los únicos cubitos visibles son los que están sobre las caras del cubo, los cubitos ocultos forman entonces un cubo de $3 \times 3 \times 3$. Luego, hay 27 cubitos ocultos.



Viernes 12. El último dígito del resultado de aplicar la operación a un número sólo depende del último dígito del número. Por lo tanto, podemos hacer las cuentas considerando únicamente la última cifra. Empezamos con 1, le sigue el 8, luego 29. Nos quedamos únicamente con el 9. Sigue 32, es decir, 2, luego 11, es decir el 1. A partir de aquí, todo se repite ya que llegamos nuevamente a 1. Luego la sucesión de los últimos dígitos es $1, 8, 9, 2, 1, 8, 9, 2, 1, 8, 9, 2, \ldots$. Al repetir la operación un número de veces que sea múltiplo de cuatro, el último dígito es 1. Como 2002 es dos números más que un múltiplo de cuatro se obtiene el 9 como último dígito.

Lunes 15. Llamemos a los lados como se muestra en la figura



Por el teorema de Pitágoras $c = \sqrt{27}$. Los triángulos ABD y CBA son semejantes, entonces

$$\begin{aligned} \frac{3}{c} &= \frac{6}{b} \\ b &= 2\sqrt{27}. \end{aligned}$$

De este punto podemos seguir el razonamiento de dos formas distintas:

Primera Solución. Si llamamos $\mathcal{A}$ al área del triángulo ABC , tenemos que $2\mathcal{A} = a \cdot c = a\sqrt{27}$. Además, tenemos que el área está dada por $2\mathcal{A} = 6\,b$. Igualando tenemos que $6\,b = a\sqrt{27}$, por lo tanto, $a = 12$.

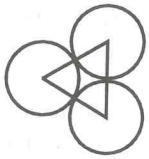
Segunda Solución. Utilizando nuevamente el teorema de Pitágoras tenemos que $6^2 + 2\sqrt{27} = a^2$. Luego, despejando obtenemos $a = 12$.

Martes 16. Para la primera cifra hay 3 números posibles $(4, 5, 6)$. Una vez escogida la primera hay 9 posibles para la segunda. Dadas la primera y la segunda cifras hay 8 posibles dígitos para la tercera, de modo que las tres sean distintas. Por lo tanto, el total de números de 3 cifras distintas es $3 \cdot 9 \cdot 8$. Como tenemos 300 números la probabilidad es $\frac{3 \cdot 9 \cdot 8}{300} = \frac{9 \cdot 8}{100} = \frac{9 \cdot 2}{25} = \frac{18}{25}$.

Miercoles 17. Tenemos que n debe de cumplir que $\frac{n(n+1)}{2} > 2002$. Observemos que $1953 = \frac{62 \cdot 63}{2} < 2002 < \frac{63 \cdot 64}{2} = 2016$, y como $2002 = 2016 - 14$, luego, $n = 63$ y $x = 14$.

Jueves 18. Si 10 niños de cada 80 usan lentes, entonces 70 niños de cada 80 no usan lentes. Luego, de un grupo de 2000 niños, $70 \times 25 = 1750$ no usan lentes.

Viernes 19. Tomemos un triángulo que tenga como vértices el centro del círculo central y los centros de dos círculos adyacentes,



El triángulo es equilátero de lado 2 y altura $\sqrt{3}$. Entonces, el área de cada pedazo de círculo dentro del triángulo es $\frac{1}{6}$ del área del círculo, es decir, vale $\frac{\pi}{6}$. Llamemos S al área entre los tres pedazos de círculo. Entonces

$$S = \text{área del triángulo} - 3\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

Por otra parte, el área de triángulo es $\frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. Luego,

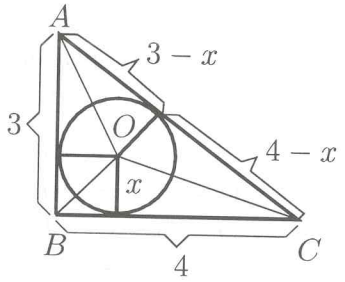
$$S = \sqrt{3} - \frac{\pi}{2}.$$

Entonces, el área entre los siete círculos es

$$6S = 6\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right) = 6\sqrt{3} - 3\pi.$$

Lunes 22. Si recorre del 386 hasta el 542 entonces, recorre $542 - 386 = 156$ números. Como los números de los inmuebles son pares consecutivos, en realidad recorrió $\frac{156}{2} + 1 = 78 + 1 = 79$ inmuebles.

Martes 23. Como $3^2 + 4^2 = 5^2$ el triángulo del cuál estamos hablando es un triángulo rectángulo. Observemos la siguiente figura, donde dibujamos los radios que tocan los puntos de tangencia del incírculo con los lados del triángulo. El cateto AB mide 3, el BC mide 4 y la hipotenusa AC mide 5. Al radio le llamamos x.



Los radios que van del centro del círculo a los lados AB y BC forman un cuadrado. Dividimos el cateto AB en dos partes una de longitud

x y otra de longitud $3-x$. Análogamente dividimos BC en x y $4-x$. Entonces, la hipotenusa queda dividida en dos partes, una que mide $4-x$ y otra de $3-x$, ya que si trazamos la bisectriz que va de C a O, los dos triángulos que se forman son congruentes, similarmente si trazamos la bisectriz que va de A a O. Luego, tenemos la ecuación $(3-x)+(4-x)=5$, despejando obtenemos $x=1$.

Miercoles 24. Como el máximo común divisor entre 9 y 11 es 1 entonces, el mínimo común múltiplo es 99. De donde, los números de tres cifras divisibles por 9 y 11 tienen que ser múltiplos de 99. Por lo tanto, los números son 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891 y 990, es decir, 9 números.

Jueves 25. Si se denota por x el precio de una mercancía, al aplicarle descuentos sucesivos del 10% y del 20% el nuevo precio será:

$$\frac{80}{100}\times\frac{90x}{100}=\frac{7200x}{10000}=\frac{72x}{100}.$$

Por lo tanto, los descuentos sucesivos corresponden a un simple descuento del 28%.

Viernes 26. Observemos que 2 no es suma de dos primos, luego el número p que buscamos además de ser primo es impar. Si p es diferencia de dos primos, uno de ellos tiene que ser el 2 (pues p es impar e impar menos impar es par). Luego, $p=q-2$ y $q=p+2$ para algún primo q impar. Análogamente, como p es impar, p debe ser la suma de un primo impar r y 2, luego, $p=r+2$ y entonces $r=p-2$. Pero de tres impares consecutivos

$$p-2, p, p+2$$

alguno es múltiplo de 3, y por ser primo, debe ser 3. De donde, la única posibilidad es: $p-2=3$, $p=5$, $p+2=7$. Por lo tanto, el único número es el 5.

Lunes 29. El área no se altera si b aumenta en 10 y a disminuye en 5, luego:

$$\begin{aligned}(b+10)(a-5) &= ba\\ ba-5b+10a-50 &= ba\\ 10a-50 &= 5b\\ 2a-10 &= b. \qquad (6)\end{aligned}$$

El área tampoco se altera si se disminuye b en 5 y se aumenta a en

4, luego:

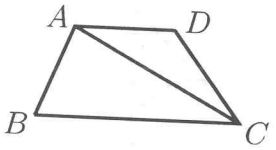
$$\begin{aligned}(b-5)(a+4) &= ba\\ ba+4b-5a-20 &= ba\\ 5a+20 &= 4b.\end{aligned} \tag{7}$$

Sustituyendo el valor de b de la ecuación (6) en la ecuación (7), tenemos $a = 20$, de donde, $b = 30$. Por lo tanto, el área del rectángulo es $A = ba = (20)(30) = 600$.

Martes 30. Sea Am, As y Eu el número de delgados de América, Asia y Europa respectivamente. Tenemos dos igualdades: $Am + As = 6$ y $As + Eu = 7$. Si América envía 4 delegados, Asia envía 2 entonces, Europa envía 5 delegados. Luego, quedarían 4 delegados para Africa, pero coincidirían el número de delegados de Africa y América, contrario al hecho de que cada continente envía un número distinto de delegados. Ahora supongamos que Europa envía 4 delegados entonces, Asia envía a 3, de donde América enviaría a 3, lo cual no podría ser. Ahora supongamos que Asia envía a 4 delegados, entonces América envía a 2 y Europa a 3. El resto lo mandaría Africa, que corresponden a 6 delegados y se satisfacen todas las condiciones del problema.

Soluciones de los Problemas de Mayo.

Miercoles 1. Observemos que el ángulo DCB mide 70° ya que AD es paralela a BC y CD las corta a las dos. Entonces el ángulo ACB mide 40°.



Como el triángulo ABC es isósceles, tenemos que

$$\begin{aligned}\angle ABC &= \angle BAC\\ \angle BAC &= \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ\end{aligned}$$

Jueves 2. Sean x y y los dos números, entonces $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = 93$. Como $93 = 3 \times 31$ tenemos que,

$(x+y)=31$ y $(x-y)=3$. Sumando ambas ecuaciones obtenemos, $2x=34$, de donde $x=17$ y $y=14$. Por lo tanto, el mayor de estos números es 17.

Viernes 3. Sea $A=\{a,b,c,d,e\}$ el conjunto de los cinco números. El promedio de los tres primeros es $\frac{a+b+c}{3}=85$ y el promedio de los dos últimos es $\frac{d+e}{2}=95$ de donde

$$\begin{aligned} a+b+c &= 3\cdot 85 \\ e+d &= 2\cdot 95. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el promedio de los cinco es

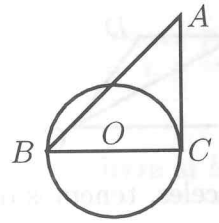
$$\frac{a+b+c+e+d}{5}=\frac{3\cdot 85+2\cdot 95}{5}=89.$$

Lunes 6. Consideremos cualquier número n. Escribimos a n como potencias de números primos: $n=p_1^{r_1}p_2^{r_2}p_3^{r_3}...p_m^{r_m}$, donde $p_1,p_2,p_3,...,p_m$ son primos y $r_1,r_2,r_3,...r_m$ son los exponentes a los cuales están elevados los respectivos primos. El número de divisores de n está dado por la fórmula $(r_1+1)(r_2+1)(r_3+1)...(r_m+1)$. Como n tiene 11 divisores entonces

$$(r_1+1)(r_2+1)(r_3+1)...(r_m+1)=11.$$

Pero como 11 es primo, entonces $n=p_1^{10}$, por lo que el entero más pequeño es $n=2^{10}$, que al dividirlo entre 11 deja residuo 1.

Martes 7. Utilizando el teorema de Pitgoras vemos que



$$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4.$$

Por lo tanto, el radio del círculo es 2 y su área es 4π.

Miercoles 8. Escribamos en orden las posibles parejas que sumadas nos dan como resultado un cuadrado perfecto, de manera que el

segundo sumando sea mayor que el primero:

$1+3$	$2+14$	$4+12$	$9+16$
$1+8$	$3+6$	$5+11$	$10+15$
$1+15$	$3+13$	$6+10$	$11+14$
$2+7$	$4+5$	$7+9$	$12+13.$

Observemos que los números que sólo participan en una suma son el 16 y el 8, por lo que estos números tienen que ser los extremos de la sucesión. Así sólo bastará seguir la cadena tachando las opciones utilizadas y las que no se puedan utilizar (es decir, si utilizamos una suma en las que aparece el 6, por ejemplo, tachamos todas las demás en las que aparece el número 6). De esta manera, comenzando con el 16 tendremos la cadena: 16-9-7-2-14-11-5-4-12-13-3. Hasta aquí no hay problema, pero a partir del 3 tenemos dos posibilidades para seguir, con la suma $3+1$ ó con $3+6$. Analicemos las dos posibilidades:

a) veamos primero que pasa si ponemos el $3+1$, tendremos 16-9-7-2-14-11-5-4-12-13-3-1-15-10-6 y nos falta acomodar el 8 pero ya no se puede, es decir, este caso no se puede acompletar.

b) si colocamos el $3+6$, tendremos 16-9-7-2-14-11-5-4-12-13-3-6-10-15-1-8. Por lo tanto, tenemos unicamente dos posibilidades: 16-9-7-2-14-11-5-4-12-13-3-6-10-15-1-8 y la misma leída de derecha a izquierda.

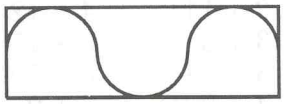
Jueves 9. Se reparte una manzana a cada niño y sobran dos. Las dos manzanas que quedan se pueden dar a una persona o a dos personas. Si se dan a una sola persona hay tres formas distintas de hacerlo, dependiendo si son para Pedro, Paco o Pablo. Si las dos manzanas que sobran se reparten entre 2 personas, entonces hay tres maneras de hacerlo dependiendo si se entregan a: Paco y Pedro, Paco y Pablo o a Pedro y Pablo. Por lo tanto, hay 6 maneras distintas de repartir las manzanas.

Viernes 10. Probaremos la siguiente propiedad: si los últimos tres dígitos de cualquier número natural A son 1, 2 y 5, entonces el número es divisible por 125. Supongamos que A tiene $n+3$ cifras (n son desconocidas y termina en 125) luego, $A = a_1a_2...a_n125$. Escribamos a A de manera conveniente:

$$A = a_1a_2...a_n125 = (a_1a_2...a_n) \times 10^3 + 125.$$

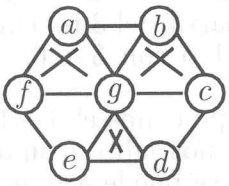
Pero, $10^3 = 1000$ y 125 son divisibles entre 125, entonces, $A = (a_1a_2...a_n) \times 10^3 + 125$ es divisible por 125.
Ahora, el número X que buscamos se puede construir de manera que, la suma de sus dígitos sea 125. Un ejemplo podría ser: $\underbrace{111\ldots111}_{94}995125$.

Lunes 13. Llamemos r al radio de las semicircunferencias.



Entonces $6 \cdot r = 12$, despejando tenemos que $r = 2$. De aquí, tenemos que cada semicircunferencia mide 2π. Por lo tanto, la curva mide 6π.

Martes 14. Sean n, $n+1$, $n+2$ los tres números consecutivos, y llamemos a, b, c, d, e, f y g los vértices de cada triángulo, como se muestra en la figura.



Entonces

$$\begin{aligned} a+b+g &= n \\ c+d+g &= n+1 \\ e+f+g &= n+2. \end{aligned}$$

Por otra parte, la suma de todos los números es $a+b+c+d+e+f+g = \frac{7\times 8}{2} = 28$. De donde,

$$a+b+c+d+e+f = 28-g = (n-g)+(n+1-g)+(n+2-g) = 3\,n+3-3\,g,$$

es decir, que $28-g$ tiene que ser divisible entre 3. Si $g=1$ entonces $3\,n+3-3\,g = 27$, luego $n=9$ y los tres números consecutivos son 9, 10 y 11. Resolviendo las ecuaciones anteriores, tenemos que $a=5$, $b=3$, $c=7$, $d=2$, $e=6$, $f=4$ y $g=1$. Si g es mayor, no es posible hacer ningún arreglo.

Miercoles 15. De los 27 cubitos, 4 están en las esquinas y éstos tienen 3 caras pintadas, uno queda en el centro y no tiene ninguna cara pintada. De los 22 cubos restantes, van a tener dos caras azules aquellos que queden en una arista del cubo grande y no sean esquinas. De estos tenemos uno por cada arista. Por lo tanto, hay 12 cubitos con dos caras azules.

Jueves 16. Al quitar Juan 25 hojas, quitó 25 números pares y 25 números impares. La suma de los 25 números pares es un número

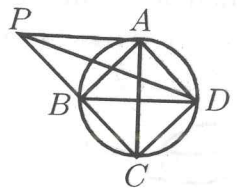
par de la forma $2n$ y la suma de los 25 números impares es de la forma $2n + 25$. Luego, la suma de los 50 números es de la forma $4n + 25 = 4(n + 6) + 1$. Como $2002 = 4(500) + 2$, la suma de los 50 números que quitó Juan no puede ser 2002.

Viernes 17. Sea R el radio de la Tierra. El perímetro de la Tierra es $2\pi R$ y corresponde a la longitud que recorren los pies. Por otra parte, la longitud que recorre la coronilla es $2\pi(R + 1.75)$. Luego, la diferencia de longitudes esta dada por:

$$\begin{aligned} 2\pi(R + 1.75) - 2\pi R &= 2\pi(R + 1.75 - R) \\ &= 2\pi(1.75) \\ &\approx 2 \times 3.14 \times 1.75 \\ &\approx 11. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la diferencia es de 11 metros aproximadamente.

Lunes 20. Como $ABCD$ es un cuadrado, AC es perpendicular a BD y ambas diagonales miden 2. Por el teorema de Pitágoras $AB = BC = CD = DA = \sqrt{2}$.



La tangente PA es perpendicular a AC, entonces $\angle PAB = 45°$. Como PC es perpendicular a BA, el ángulo BPA también mide $45°$, luego el triángulo PBA es isósceles. Entonces, $PB = AB = \sqrt{2}$. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo PCD, obtenemos

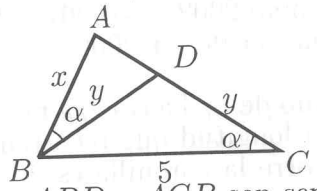
$$\begin{aligned} (PD)^2 &= (PC)^2 + (CD)^2 \\ &= (2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 \\ &= 10. \end{aligned}$$

Por lo tanto, PD mide $\sqrt{10}$.

Martes 21. Raúl no fue el último en llegar pues después de él llegó Pedro. Luisa no fue, pues le abrió la puerta a Arturo, quien a su vez le abrió a Jesús y Rita. Como Raúl llegó después de Rita, Pedro fue el último en llegar.

Miercoles 22. Tracemos la bisectriz que pasa por el vértice B. Como el ángulo ABC es el doble del ángulo BCA el triángulo DBC

es isósceles. Llamemos $x = AB$ y $y = BD = DC$. Entonces, $CA = x + 2$ y $AD = x + 2 - y$.



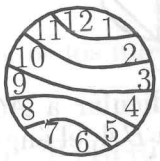
Como los triángulos ABD y ACB son semejantes, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{AD}{AB} &= \frac{BD}{CB} = \frac{AB}{AC} \\ \frac{x+2-y}{x} &= \frac{y}{5} = \frac{x}{x+2}, \end{aligned}$$

resolviendo las ecuaciones obtenemos que $y = \frac{10}{3}$ y $x = 4$. Por lo tanto, $AB = 4$ y $CA = 6$.

Jueves 23. Llamemos n al número de tareas que había. Como el promedio de esas n tareas era 68, la suma de las primeras n calificaciones era $68n$. El promedio de las $n+1$ tareas al incluir la tarea con calificación de 80 fue de 69, así que $\frac{68n+80}{n+1} = 69$. Multiplicando por $n+1$ ambos miembros de la igualdad obtenemos $68n+80 = 69n+69$, de aquí que $n = 11$.

Viernes 24.



Lunes 27. Efectuemos la operación $*$ entre x y $(x * 14)$, tenemos

$$x * (x * 14) = x * \left(\frac{x+14}{2}\right) = \frac{x + \frac{x+14}{2}}{2} = \frac{2x + x + 14}{4} = \frac{3x+14}{4}.$$

Por hipótesis, $x * (x * 14) = x$, luego $\frac{3x+14}{4} = x$, de donde $x = 14$.

Martes 28. Sea x el número de personas que asistieron a la fiesta. Cada persona estrecho la mano a $x - 1$ personas (saluda a todos excepto a sí mismo) y cada saludo se cuenta sólo una vez. Luego, $\frac{x(x-1)}{2} = 55$. Resolviendo la ecuación tenemos que $x = 11$. Por lo tanto, asistieron 11 personas a la fiesta.

Miercoles 29. Como las 2 ruedas funcionan acopladas, darán un número completo de vueltas conjuntamente cada vez que se alcance

un múltiplo común de los números de dientes de ambas. Considerando la descomposición en primos de $630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ y $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ tenemos que, el mínimo común múltiplo es $1260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$. Entonces, B da 7 vueltas mientras que A da 2.

Jueves 30. Sea n el número de cubitos del primer nivel. Entonces, $n + 2n + 3n = 48$, luego $6n = 48$ y $2n = 16$. Es decir, el segundo nivel debe tener 16 cubitos.

Viernes 31. Sea $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, ..., $a_7 = 13$. Veamos como se construye cada elemento utilizando los anteriores:

$$\begin{array}{ccc} a_3 & = & a_1 + a_2 \\ a_4 & = & a_2 + a_3 \\ a_5 & = & a_3 + a_4 \\ a_6 & = & a_4 + a_5 \\ a_7 & = & a_5 + a_6 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Se infiere la ley $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$. Luego, $a_8 = 21$. A esta sucesión se le conoce como la sucesión de Fibonacci.

Soluciones de los Problemas de Junio.

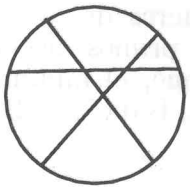
Lunes 3. Tenemos que C es el punto medio entre B y D, por lo que le corresponde el número 22. Entonces, a A le corresponde el 4.

Martes 4. Denotemos por $abcd7$ el número de 5 cifras, terminado en 7 y por $xyzyx$ y $efgfe$ el primer y segundo números capicúa. Tenemos que

$$\begin{array}{rcl} abcd7 - 4 & = & xyzyx \\ abcd7 + 7 & = & efgfe, \end{array}$$

de aquí tenemos que $x = 3$, $e = 4$ y como $a = x$, $a = 3$. Por lo tanto, tenemos que b, c y d tienen que ser 9, para obtener que $a + 1 = e = 4$, entonces el número es 39997.

Miercoles 5. Para dividirlo en el máximo número tenemos que tener 3 rectas que no sean diámetros como se puede observar en la siguiente figura



Jueves 6. Observemos que la cifra de las unidades de N tiene que ser un entero x menor o igual a 9. Veamos para que valores de x, $x^{20} = 1$. En la siguiente tabla se han puesto los posibles valores para x, así como el dígito de las unidades al elevar x a las distintas potencias.

x	x^2	x^3	x^4	x^5
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	4	8	6	2
3	9	7	1	3
4	6	4	6	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	9	3	1	7
8	4	2	6	8
9	1	9	1	9

Se puede obsevar, que el dígito de las unidades en las potencias se repite de cuatro en cuatro. Además, sólo para $x = 1, 3, 7$ y 9 el dígito de las unidades puede ser 1. Luego, sólo los números N que terminan en 1, 3, 7 y 9 cumpliran que $N^{20} = 1$. Ahora, unicamente nos resta contar cuantos números con esta característica son menores que 2002. Por cada 10 números, 4 terminan en 1, 3, 7 ó 9, entonces entre 1 y 2000 hay $4 \times \frac{2000}{10} = 800$, más el 2001, serán 801.

Viernes 7. Para enumerar las páginas comprendidas entre la 1 la 9, se necesitan 9 dígitos. Para enumerar las páginas comprendidas entre la 10 y la 99, se necesitan 180 dígitos. Por consiguiente, hasta la página 99 el tipógrafo ha empleado 189 dígitos y si en total empleó 207, restan 18 dígitos con los cuales se enumeran las páginas a partir de la 100. Como para enumerar cada una de estas páginas se necesitan tres cifras, entonces el libro tiene $99 + \frac{18}{3} = 105$ páginas.

Lunes 10. Vamos a contar los paralelogramos clasificándolos según la forma en que están acomodados:

1. Verticales, como se muestra en la figura, tenemos 7;

2. Inclinados hacia la izquierda tenemos 7;

3. Inclinados hacia la derecha tenemos 7;

Por lo tanto, son 21 paralelogramos en total.

Martes 11. Tiene dos caras en forma de cruz, una que estamos viendo y la de atrás. Para cada uno de los cubos que forman la cruz hay unicamente 3 caras laterales a la vista y tenemos 4 cubos, por lo tanto, son 12 caras laterales y con las dos que teníamos serían en total 14 caras.

Miercoles 12. Recordemos que si $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ es una progresión aritmética, la suma S_n de los primeros n términos está dada por $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$. Utilizando dicha fórmula tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1+3+5+...+(2n-1)}{2+4+6+...+(2n)} &= \frac{2002}{2003} \\
\frac{\frac{n(1+2n-1)}{2}}{\frac{n(2+2n)}{2}} &= \frac{2002}{2003} \\
\frac{n^2}{n+n^2} &= \frac{2002}{2003} \\
\frac{n}{n+1} &= \frac{2002}{2003}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $n = 2002$.

Jueves 13. Del centro de los círculos trazamos segmentos a los puntos de tangencia del círculo menor con el cuadrado; el cuadrado quedará dividido en cuatro cuadrados de lado 1 y el radio del círculo mayor será igual a la diagonal de ellos. Usando Pitágoras el radio mide $\sqrt{2}$.

2. Inclinados hacia la izquierda tenemos 7;

3. Inclinados hacia la derecha tenemos 7;

Por lo tanto, son 21 paralelogramos en total.

Martes 11. Tiene dos caras en forma de cruz, una que estamos viendo y la de atrás. Para cada uno de los cubos que forman la cruz hay unicamente 3 caras laterales a la vista y tenemos 4 cubos, por lo tanto, son 12 caras laterales y con las dos que teníamos serían en total 14 caras.

Miercoles 12. Recordemos que si $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ es una progresión aritmética, la suma S_n de los primeros n términos está dada por $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$. Utilizando dicha fórmula tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1+3+5+...+(2n-1)}{2+4+6+...+(2n)} &= \frac{2002}{2003} \\
\frac{\frac{n(1+2n-1)}{2}}{\frac{n(2+2n)}{2}} &= \frac{2002}{2003} \\
\frac{n^2}{n+n^2} &= \frac{2002}{2003} \\
\frac{n}{n+1} &= \frac{2002}{2003}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $n = 2002$.

Jueves 13. Del centro de los círculos trazamos segmentos a los puntos de tangencia del círculo menor con el cuadrado; el cuadrado quedará dividido en cuatro cuadrados de lado 1 y el radio del círculo mayor será igual a la diagonal de ellos. Usando Pitágoras el radio mide $\sqrt{2}$.

Viernes 14. Llamemos n al número de juegos que perdió, entonces

$$\begin{aligned} n + (n+8) &= 30 \\ 2n &= 30 - 8 = 22 \\ n &= 11. \end{aligned}$$

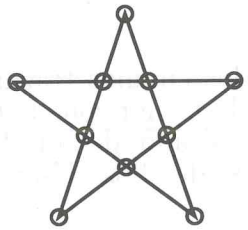
El equipo perdió 11 juegos.

Lunes 17. Sea ab el número de dos dígitos. Podemos escribir a ab como $ab = 10a+b$ y por hipótesis, $10a+b = 2 \cdot a \cdot b$, luego $2a(b-5) = b$. De donde, b es múltiplo de $2a$. Sea $b = 2a \cdot x$, sustituyendo en la igualdad anterior tenemos que $2a(2a \cdot x - 5) = 2a \cdot x$, de donde, $5 = x(2a-1)$. Como 5 es primo, entonces $x = 1$ y $2a - 1 = 5$ ó $x = 5$ y $2a - 1 = 1$. Si $x = 1$ y $2a - 1 = 5$, entonces $a = 3$, $b = 6$ y $ab = 36$. En caso de que $x = 5$ y $2a - 1 = 1$, tendremos que $a = 1$ y $b = 10$, lo cual es imposible, ya que b es una cifra. Por lo tanto, la única solución es $ab = 36$.

Martes 18. En el primer sitio de izquierda a derecha no podemos poner el 6. Pero si podemos poner el 7, 8 ó 9. Analicemos cada caso. Si ponemos el 7 en el primer sitio, después de la desigualdad unicamente podemos poner el 6. En los sitios restantes podemos poner el 8 ó el 9 indistintamente, por lo tanto, tenemos dos casos. Si ponemos el 8 en el primer sitio de izquierda a derecha, entonces en el primer sitio después de la desigualdad podemos poner el 7 ó el 6 y los otros dos lugares restantes los podemos llenar con las cifras que queden, es decir, tenemos 4 posibilidades. Finalmente, si en el primer sitio de izquierda a derecha ponemos el 9, los sitios restantes los podemos llenar con cualquiera de los dígitos restantes, esto es, de 3×2 formas. Por lo tanto, en total tendremos $2 + 4 + 6 = 12$ desigualdades.

Miercoles 19. Denotemos por b el otro cateto. Por el Teorema de Pitágoras se tiene $c^2 = a^2 + b^2$, de donde $b^2 = c^2 - a^2 = (c+a)(c-a)$. Pero a y c son enteros consecutivos y además c es mayor que a, por ser c la hipotenusa del triángulo, luego $c - a = 1$; de donde $b^2 = c + a$.

Jueves 20.



Viernes 21. Queremos que $a+2a+3a+4a+5a+6a+7a+8a+9a = bbb...bb$, luego

$$\begin{aligned} a+2a+3a+4a+5a+6a+7a+8a+9a &= bbb...bb \\ a(1+2+3+4+5+6+7+8+9) &= bbb...bb \\ a\left(\frac{9\times 10}{2}\right) &= bbb...bb \\ 45a &= bbb...bb. \end{aligned}$$

Luego, la única posibilidad para b es, $b=5$. Dividiendo entre 5 la última expresión tenemos, $9a = 111...11$, de donde, $a = \frac{111111111}{9}$. Por lo tanto, $a = 12345679$.

Lunes 24. El prisma tiene de base y de tapa a un polígono digamos de n lados, cada vértice del polígono de la base se une por una arista a un vértice de la tapa, así se generan n aristas más, luego el número de aristas debe ser $3n$. Por lo tanto, $3n = 27$ nos lleva a que $n = 9$, es decir, la base y la tapa son polígonos de 9 lados y como éstos tienen 9 vértices, el prisma tendrá $2 \cdot 9 = 18$ vértices.

Martes 25. Sean $a_1, a_2, ...a_{2002}$ los 2002 elementos de cierto conjunto. Tenemos que

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{2002}}{2002} = \frac{20022002}{2002} = 10001,$$

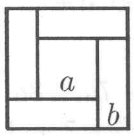
es el promedio de los elementos del conjunto.

Miercoles 26. Observemos primero que como $f(10) = 0$ y $f(10) = f(5)+f(2)$ entonces $f(5)+f(2) = 0$, pero $f(n)$ es positivo, entonces $f(5) = 0$ y $f(2) = 0$. Por otra parte, $f(9) = f(3) + f(3) = 0$. Asi, dado que $1985 = 5 \times 397$, tenemos

$$\begin{aligned} f(1985) &= f(5) + f(397) \\ &= 0 + f(397) \\ &= f(9) + f(397) \\ &= f(9 \times 397) \\ &= f(3573) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(1985) = 0$.

Jueves 27. Denotemos por a el lado del cuadradito, y por b el ancho de los rectángulos.



Como los rectángulos y el cuadradito tienen la misma área tenemos que $a^2 = \frac{180}{5} = 36$, de donde $a = 6$. Por otra parte, $a + 2b$ corresponde al lado del cuadrado grande cuya área es 180, luego $(a + 2b)^2 = 180$. Sustituyendo el valor de a tenemos

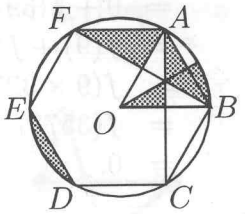
$$\begin{aligned}(6+2b)^2 &= 180\\ 6+2b &= \sqrt{180}\\ 6+2b &= 6\sqrt{5}\\ b &= \frac{6\sqrt{5}-6}{2}\\ b &= 3\sqrt{5}-3.\end{aligned}$$

Por lo tanto, los lados de los rectángulos miden $a+b = 6+3\sqrt{5}-3 = 3\sqrt{5}+3$ y $b = 3\sqrt{5}-3$.

Viernes 28. Descomponemos ambos números en primos: $1111 = 11 \times 101$ y $111111 = 7 \times 11 \times 13 \times 111$. Luego, el máximo común divisor es 11.

Soluciones de los Problemas de Julio.

Lunes 1. Como el triángulo ΔOAB es equilátero, se puede observar que su área sombreada es la mitad del área de ΔAFB, luego, el área sombreada es igual al área de ΔAFB que es igual al área de ΔAOB.



Como ΔAOB es una triángulo equilátero de lado igual a 1, su área es $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Sólo resta encontrar las áreas entre las secantes ED y AB, pero éstas son iguales; luego, tenemos que sumar al área de ΔAOB

más $\frac{3}{2}$ del área entre el arco y la secante AB. Esta última se puede calcular como la diferencia del sector circular AB y el triángulo equilátero ΔAOB, es decir,

$$\frac{1}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Por lo tanto, tenemos que el área de la figura sombreada es

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{(2\pi - \sqrt{3})}{8}.$$

Martes 2. Si nos fijamos en la columna 3 podemos poner la B, D y E. B y E no pueden ir en el segundo renglón entonces ahí va la D.

		A		
	E			B
		C		

En la tercera columna, tercer renglón no puede estar la E ya que quedaría en diagonal con la otra E, luego, los lugares de E y B de esa columna ya están determinados.
En el segundo renglón tenemos que acomodar la A y C pero la A tiene que estar en la primera columna y en la tercera la C, ya que sino las dos A's quedarían en diagonal.
En la diagonal que inicia en el cuadrado que está en la primera columna, primer renglón tenemos que acomodar A, C y D. A no puede estar en el primer renglón, primera columna, por lo que aquí podemos poner a C o D. Si nos fijamos en el quinto renglón, quinta columna ahí no puede estar C, por lo tanto, colocamos a C en el primer renglón primera columna.
Siguiendo razonamientos análogos a los anteriores tenemos que el cuadrado se puede rellenar de la siguiente forma:

C	B	A	E	D
A	E	D	C	B
D	C	B	A	E
B	A	E	D	C
E	D	C	B	A

Miercoles 3. En el primer movimiento cambiamos la segunda y tercera flechas, por lo que tendremos

$$\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow$$

En el segundo paso cambiamos la tercera y cuarta flechas:

$$\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow$$

Finalmente, cambiamos la cuarta y quinta con lo que nos queda la configuración deseada:

$$\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow$$

Por lo que el mínimo número de movimientos es menor o igual a 3. Desde luego 2 movimientos no son suficientes, ya que para llegar a la posición deseada hay necesariamente que voltear la segunda y la quinta flecha, por las condiciones del problema estos movimientos son independientes. Al hacer estos cambios, 2 de las flechas restantes se voltean por lo que es indispensable hacer un tercer movimiento.

Jueves 4. Son necesarias tres pesadas. En la primera se colocan siete dados en cada platillo. Si la balanza se inclina de un lado, el dado más pesado está entre esos siete dados. Si los dos platillos se balancean el dado más pesado está entre los siete dados restantes.
En la segunda pesada se colocan tres, de los siete dados entre los que se encuentra el dado más pesado, en cada platillo de la balanza. Si la balanza está en equilibrio el dado no colocado es el más pesado. Si no, la balanza nos indicará el grupo de dados entre los que se encuentra el más pesado.
En la tercera pesada se coloca uno, de los tres dados entre los que se encuentra el dado más pesado, en cada platillo.
Si la balanza está en equilibrio, el dado más pesado es el dado que no se colocó en la balanza. Si no la balanza nos indicará cuál es el dado más pesado.

Viernes 5. Agrupemos los números 2's y 5's de la siguiente manera: $2^{1998} \times 5^{2003} = (2 \times 5)^{1998} \times 5^5 = 10^{1998} \times 3125$. Por lo tanto, son $1998 + 4 = 2002$ cifras.

Lunes 8. La primera fiera tiene que ser un tigre y hay cinco posibilidades para escogerlo, la segunda es un león y hay cuatro posibilidades, la tercera es un tigre y le quedan cuatro tigres para escoger, para el cuarto lugar quedan tres leones para escoger y así sucesivamente. De este modo, tenemos

$$5 \times 4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 2880,$$

formas distintas de acomodar las fieras en una fila.

Martes 9. El área del triángulo sombreado de la parte de abajo es $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$ del área total. El triángulo sombreado de la parte superior es $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)\right) = \frac{1}{32}$ del área total. Por lo tanto, el área sombreada es $\frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{3}{32}$ del área total.

Miercoles 10. Este problema tiene dos interpretaciones. La primera, que consiste en considerar a la diagonal como un separador que impida mezclar días con meses o meses con años. La segunda, que consiste en no tomar en cuenta a la diagonal para la lectura de la fecha, viéndola sólo como una serie de dígitos.
Primer caso: Consideremos las fechas del tipo $ab/c/ba$.
No se toman en cuenta los años terminados en 0, pues no consideramos los días que empiezan por 0. En cada año sólo existen los días ab donde $0 < a \leq 3$. Luego, en la primera década sólo consideramos los años 1911, 1912 y 1913; para las décadas posteriores sólo podremos considerar dos años por cada una, es decir: 1921 y 1922; 1931 y 1932, hasta 1991 y 1992, y además el 2001. Luego entre 1910 y 2001 habrá $3 + 2 \times 8 + 1 = 20$ años con fechas capicúas.
Ahora veamos que sucede con los meses. Los únicos meses que no son capicúas son octubre(10) y diciembre(12). Luego, con excepción del año 1913 (pues depende de si el mes tiene 31 días o no) tendremos $10 \times 19 = 190$ fechas capicúas. En el año 1913 sólo hay 5 fechas capicúas pues sólo enero, marzo, mayo, julio y agosto tienen 31 días. Por lo tanto, entre 1910 y 2001 hay 195 fechas capicúas.
Segundo caso: En este caso tenemos, además de las 195 fechas capicúas del caso anterior, las fechas en las cuales no se considera la diagonal para su lectura. Por ejemplo, 3/10/13 ó 7/9/97.
Contemos primero las fechas cuyos meses tienen dos dígitos, es decir fechas del tipo $a/bc/ba$. Sólo hay 3 meses de dos dígitos, luego $bc = 10, 11$ ó 12. Como los valores para a son $a = 1, 2, 3, ..., 9$ entonces, hay $3 \times 9 = 27$ fechas capicúas de este tipo. Ahora las fechas cuyos meses son de un solo dígito son 81 pues tienen que ser del tipo $a/b/ba$ donde $a = 1, 2, 3, ..., 9$ y $b = 1, 2, 3, ..., 9$. Sumando todos los casos tenemos $195 + 27 + 81 = 303$ fechas capicúas entre 1910 y 2001.

Jueves 11. Pepe y las 5 personas que fueron solas son 6 personas; las 10 parejas que están bailando más la de Ana y Luis son 11 parejas. Por lo tanto, en total fueron 6 + 22=28 personas.

Viernes 12. Haremos la suma por pedazos. Fracciones con denominador 1 sólo existe el $\frac{1}{1}$; la suma de fracciones con denominador 2 es:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3}{2},$$

la suma de fracciones con denominador 3 es:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3}=\frac{1+2+3}{3}=\frac{\frac{3\times 4}{2}}{3}=\frac{3\times 4}{3\times 2}=\frac{4}{2},$$

la suma de fracciones con denominador 4 es:

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\frac{4}{4}=\frac{1+2+3+4}{4}=\frac{\frac{4\times 5}{2}}{4}=\frac{4\times 5}{4\times 2}=\frac{5}{2}.$$

Continuando con este procedimiento obtenemos que la suma de las fracciones con denominador 1000 es:

$$\frac{1}{1000}+\frac{2}{1000}+...+\frac{1000}{1000}=\frac{1+2+...+1000}{1000}=$$

$$=\frac{\frac{1000\times 1001}{2}}{1000}=\frac{1000\times 1001}{1000\times 2}=\frac{1001}{2}.$$

Ahora sumando los resultados parciales obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\frac{4}{2}+...+\frac{1001}{2}&=\frac{2+3+4+...+1001}{2}\\&=\frac{1+2+3+...+1001}{2}-\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1001\times 1002}{2}\right)-1\right]\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1001\times 1002-2}{2}\right)\\&=\frac{1001\times 1002-2}{4}\\&=250,750.\end{aligned}$$

Lunes 15. En un principio tiene tres posibilidades para escoger caminos y del vértice donde llegue por cualquiera de estos tres caminos hay dos caminos permitidos para llegar a B, por lo que hay $3\times 2=6$ caminos distintos.

Martes 16. Si es posible, una forma sería: 51, 1, 52, 2, 53, 3, ..., 99, 49, 100, 50.

Miercoles 17. Denotemos por x y z la longitud de los lados del triángulo. Por el teorema de Pitágoras, $x^2+z^2=25$ y por la fórmula

del área del triángulo $\frac{xz}{2} = 5$. Despejando x de la última ecuación y sustituyéndola en la primera obtenemos:

$$z^4 - 25z^2 + 100 = 0.$$

Resolviendo para z^2 obtenemos:

$$z^2 = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 400}}{2},$$

de donde $z^2 = 20$ o $z^2 = 5$. Luego, $z = 2\sqrt{5}$ o $z = \sqrt{5}$. Si $z = 2\sqrt{5}$ entonces $x = \sqrt{5}$ o viceversa.

Jueves 18. Primero observamos como son los últimos dígitos de las potencias de los números impares no divisibles entre cinco, para esto veamos la siguiente tabla, donde los números son los últimos dígitos de n y sus potencias:

n	n^2	n^3	n^4	n^5
1	1	1	1	1
3	9	7	1	3
7	9	3	1	7
9	1	9	1	9.

Se puede obsevar que el último dígito se repite de cuatro en cuatro, luego, cada potencia de n, de la forma $4k$ terminará en 1. Por lo tanto, para estos números, n^{100} terminará siempre en 1.

Viernes 19. Sea P y V el número de pollos y vacas respectivamente, que hay en el conjunto. $P + V$ es el número de cabezas que hay y $2P + 4V$ es el número de patas que hay. La condición de que el número de patas es 14 más que el doble del número de cabezas se representa por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} 2P + 4V &= 2(P + V) + 14 \\ 2P + 4V - 14 &= 2P + 2V \\ 2V &= 14 \\ V &= 7. \end{aligned}$$

Por lo tanto, hay 7 vacas en el conjunto.

Lunes 22. Una persona sabe un secreto (1). Se lo comunica a 12 personas (12). Cada una de éstas a otras 12, (12×12). Las últimas personas se lo comunican a otras 12, $(12 \times 12 \times 12)$. Luego al final, el número de personas que saben el secreto es:

$$1 + 12 + (12 \times 12) + (12 \times 12 \times 12) = 1 + 12 + 144 + 1728 = 1885.$$

Martes 23. $2^5 \cdot 9^2 = 2592$.

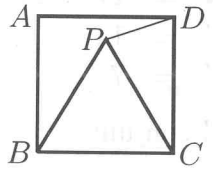
Miercoles 24. Observamos que el lado izquierdo de la ecuación corresponde a la suma de los primeros términos de una progresión aritmética con diferencia 3, luego escribimos a x como $x = 2 + 3(n-1)$ para cierta n. Además, recordemos que si $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ es una progresión aritmética, la suma S_n de los primeros n términos está dada por $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$. Luego:

$$\begin{aligned}
2+5+8+...+(2+3(n-1)) &= 155 \\
\frac{n(2+(2+3(n-1)))}{2} &= 155 \\
\frac{n(4+3(n-1))}{2} &= 155 \\
\frac{n(3n+1)}{2} &= 155 \\
\frac{3n^2+n}{2} &= 155 \\
3n^2+n &= 310.
\end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado obtenemos, $n = 10$ y $n = \frac{-62}{6}$. Pero el valor de n debe ser entero, entonces $n = 10$, de donde $x = 29$.

Jueves 25. Si en un producto de varios números enteros, uno de los factores es par, entonces el producto tambien es par. Por lo tanto, para que el producto de varios enteros sea impar, es necesario que todos los números sean impares.

Viernes 26. El triángulo PCD es un triángulo isósceles, luego, $\angle CPD = \angle CDP = \alpha$, pero $2\alpha + \angle PCD = 180°$ y como $\angle PCD = 30°$ entonces $\alpha = 75°$.



Lunes 29. Elevamos ambas expresiones al cuadrado:

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{7}+\sqrt{10}\right)^2 &= 7+2\sqrt{7}\sqrt{10}+10 \\
&= 17+2\sqrt{70}.
\end{aligned}$$

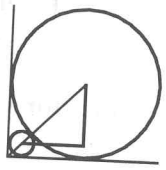
Por otra parte:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}+\sqrt{19}\right)^2 &= 3+2\sqrt{3}\sqrt{19}+19\\ &= 22+2\sqrt{57}.\end{aligned}$$

Comparando esta dos cantidades vemos que $17+2\sqrt{70}\approx 34$ y $22+2\sqrt{57}\approx 37$. Por lo tanto, $\sqrt{3}+\sqrt{19}$ es mayor que $\sqrt{7}+\sqrt{10}$.

Martes 30. Si cada gato ve a otros 3 entonces, en el patio hay 4 gatos.

Miercoles 31. Consideremos el triángulo que se muestra en la figura. Los catetos valen $a-b$ y la hipotenusa $a+b$. Aplicando el teorema de Pitágoras,



tenemos,

$$\begin{aligned}2(a-b)^2 &= (a+b)^2\\ 2a^2-4ab+2b^2 &= a^2+2ab+b^2\\ a^2-6ab+b^2 &= 0.\end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación anterior para a, obtenemos

$$\begin{aligned}a &= \frac{6b\pm\sqrt{36b^2-4b^2}}{2}\\ a &= \frac{6b\pm b\sqrt{32}}{2}.\end{aligned}$$

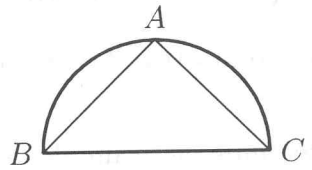
Pero a tiene que ser positiva, luego $a=\frac{6b+b\sqrt{32}}{2}$, de dónde $\frac{a}{b}=3+\frac{\sqrt{32}}{2}$.

Soluciones de los Problemas de Agosto.

Jueves 1. La suma de los números del primer renglón es 15. Observemos que de un renglón a otro, la suma se incrementa en 25 (pues

cada número es 5 más que el que se encuentra justo arriba de él). Entonces la segunda suma es 15+25=40, la tercera es $15+(2\times 25) = 65$, así llegamos a que la sexta suma es $15 + (5 \times 25) = 140$ y la séptima suma es $15 + (6 \times 25) = 165$. Por lo tanto, el sexto renglón cumple con la propiedad.

Viernes 2. Observemos que la base más grande que puede tener el triángulo es $2r$.



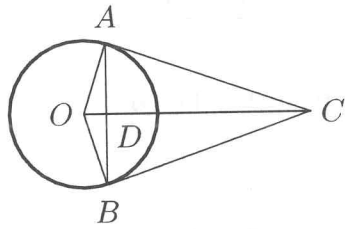
Ahora, para hacer máxima el área debemos de encontrar la mayor altura, que es cuando el vértice A está en el punto medio del arco BC. Por lo que el área máxima es $\frac{b\cdot h}{2} = \frac{2r\cdot r}{2} = r^2$.

Lunes 5. Sacando común denominador y haciendo la resta tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{a^2-b^2}{ab} - \frac{ab-b^2}{ab-a^2} &= \frac{a^3b - a^4 - ab^3 + a^2b^2 - a^2b^2 + ab^3}{ab(ab-a^2)}\\ &= \frac{a^2(ab-a^2)}{ab(ab-a^2)}\\ &= \frac{a^2}{ab} = \frac{a}{b}.\end{aligned}$$

Por lo que la expresión más reducida es $\frac{a}{b}$.

Martes 6. Sea D la intersección de AB con OC.



Los ángulos CAO y CBO son rectángulos entonces tenemos que los triángulos AOC, DOA y DAC son semejantes. De la semejanza de los triángulos AOC y DOA tenemos

$$\frac{AO}{DO} = \frac{AC}{DA} = \frac{OC}{OA},$$

lo que implica que

$$OA^2 = OC \cdot DO \qquad \Rightarrow \qquad 3 = OC \cdot DO.$$

Por otro lado, tenemos que el triángulo AOB es isósceles con $\angle OAD = \angle OBD = 30°$. Luego, el ángulo $AOD = 60°$, ya que OC es bisectriz. En el triángulo AOD tenemos que $DA = \sqrt{3}\,\text{sen}\,60°$ entonces $DA = \frac{3}{2}$.
Análogamente, del triángulo AOC obtenemos que $\text{sen}\,ACO = \frac{OA}{OC}$ sustituyendo valores tenemos $\text{sen}\,30° = \frac{\sqrt{3}}{OC}$, de donde $OC = 2\sqrt{3}$. Luego, el área del triángulo OAC que denotamos como (OAC) es igual a $\frac{OC \cdot DA}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Por lo tanto, el área del cuadrilátero es

$$(AOBC) = 3\sqrt{3}.$$

Miercoles 7. El caracol sube la pared en 3 días y no en 5 como podría responderse precipitadamente. Nótese, que al final de la segunda noche ha subido 2 metros; al día siguiente subirá 3 metros llegando al tope de la pared.

Jueves 8. Tenemos que $2000 = 2001 - 1 = (n-2)^n(n+1)^{n-1}$. La factorización en primos de 2000 es $2^4 5^3$, por lo tanto $n = 4$.

Viernes 9. En cada corte quedan $\frac{2}{3}$ de lo que había antes de cortar, así que la respuesta es $\left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}$.

Lunes 12. Tenemos que:

$$\begin{aligned} 22n &\geq n^2 + 120 \\ 0 &\geq n^2 - 22n + 120 \\ 0 &\geq (n-10)(n-12). \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $n = 10$ o $n = 12$ obtenemos la igualdad. Para que se cumpla la desigualdad, tenemos que si $n - 10$ es negativo $n - 12$ tiene que ser positivo o viceversa. Veamos ambos casos:

1. Si $n - 10 < 0$ entonces $n < 10$, pero como $n - 12 > 0$ tenemos que $n > 12$ y esto no es posible.

2. Si $n - 10 > 0$ entonces $n > 10$, pero como $n - 12 < 0$ tenemos que $n < 12$ y el único entero entre 10 y 12 es el 11.

Por lo tanto, los únicos enteros que cumplen la desigualdad son 10, 11 y 12.

Martes 13. Veamos los primeros casos:

$$\begin{aligned} 1 * 1 &= 1 + 2 = 3 \\ (1 * 1) * 1 &= 3 * 1 = 3 + 2 = 5 \\ ((1 * 1) * 1) * 1 &= 5 * 1 = 5 + 2 = 7. \end{aligned}$$

Cada vez que hacemos la operación $*$ le sumamos 2 al resultado anterior. Por lo tanto, al hacer la operación 1000 veces, tenemos que

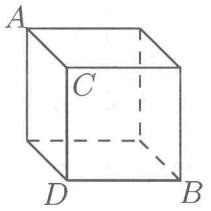
$$((1 * 1) * \ldots * 1) = 1 + \underbrace{2 + \ldots + 2}_{1000} = 1 + 2 \cdot 1000 = 2001.$$

Miercoles 14. Un tablero de ajedrez consta de 32 cuadros blancos y 32 negros. Si eliminamos la casilla superior derecha y la inferior izquierda, éstas son del mismo color, pero una ficha de dominó cubre una casilla blanca y una negra. Por lo tanto, habría una casilla que no se podría cubrir.

Jueves 15. María, que es la primera mujer, baila con 7; Olga, que es la segunda, con ocho; Vera, que es la tercera, con 9. Apenas hemos contado 12 personas que asistieron a la fiesta, 3 mujeres y 9 hombres. Si continuamos con el mismo argumento, tendremos que la séptima mujer habrá bailado con 13 hombres y ya habremos contado las 20 personas. Por lo tanto, había 13 muchachos.

Viernes 16. Un barco necesita 10 días para consumir un tanque de aceite y no 1 día como podría deducirse de manera precipitada.

Lunes 19. Para salir de A tenemos 3 posibilidades y no importa hacia cual vértice nos dirijamos el conteo es equivalente.



Supongamos que llegamos a C. Para salir de C hay dos posibles caminos que son también equivalentes. Supongamos que llegamos a D. Para ir de D a B tenemos dos formas, ya que no está permitido subir. Por lo tanto, tendremos $3 \times 2 \times 2 = 12$ caminos posibles.

Martes 20. Si el primer día hubiera sido domingo, entonces también lo habrían sido los días 8, 15, 22 y 29, de donde octubre habría tenido 5 domingos. Lo mismo sucedería si el primer día hubiera sido sábado o viernes. Por lo tanto, el 31 de octubre no pudo haber caído en domingo, lunes o martes.

Miercoles 21. Si la mitad de $5p$ es $3u$, entonces $5p = 6u$. Luego, $10p = 12u$, por lo tanto, la tercera parte de $10p$ es $4u$.

Jueves 22. Sean abc_{11} y cba_9 los números en base 11 y 9 respectivamente. Considerando la expansión de estos números en sus respectivas bases tenemos que

$$\begin{aligned} a \cdot 11^2 + b \cdot 11 + c &= c \cdot 9^2 + b \cdot 9 + a \\ 120 \cdot a + 2 \cdot b &= 80 \cdot c \\ 60 \cdot a + b &= 40\, c \\ 60 \cdot a - 40 \cdot c &= -b \\ 20(3 \cdot a - 2 \cdot c) &= -b. \end{aligned}$$

luego, b es divisible por 20 pero es un dígito, entonces $b = 0$ y $3 \cdot a = 2 \cdot c$. Por lo tanto, a es par y $2 \cdot c$ es divisible por 3 y menor que 18, luego $a = 2$ o $a = 4$.
Si $a = 2$ entonces $c = 3$, y si $a = 4$ entonces $c = 6$. Por lo tanto, los únicos dos números son $203_{11} = 302_9$ y $406_{11} = 604_9$.

Viernes 23. Llamemos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{V}$ al área y el volumen del cilindro, respectivamente y h a su altura. Entonces $\mathcal{A} = 2\pi\, r\, h$ y $\mathcal{V} = \pi\, r^2 h$, pero sabemos que $2\mathcal{A} = \mathcal{V}$, resolviendo obtenemos que $r = 4$.

Lunes 26. El área del cuadrado cuyo lado mide $1m$ es $A = 1m^2$. Pero un metro tiene 1000 milímetros, luego el área expresada en milímetros cuadrados es $A = 1000000 = 10^6$. Por lo tanto, en el cuadrado habrá 10^6 cuadraditos de 1 milímetro cuadrado. Si se colocan todos alineados, la longitud será de 10^6 milímetros, es decir 1 kilómetro.

Martes 27. Sumando la segunda y tercera ecuación tenemos que $x + y + k(x + y) = 5$. Entonces, sustituyendo la primera obtenemos que $k = 4$.

Miercoles 28. El lado del cuadrado mide $\frac{P}{4}$, de donde $Q = \left(\frac{P}{4}\right)^2 = \frac{P^2}{16}$. Sustituyendo en la ecuación original tenemos que $3P = 2\frac{P^2}{16}$, que al resolver nos da $P = 24$.

Jueves 29. Es claro que una recta intersecta a lo más dos veces a un círculo, así que el máximo número de intersecciones en total entre el cuadrado y el círculo no puede exceder a 8. Si construímos un círculo de radio 5 y un cuadrado de lado 8 que compartan el centro, se intersectan 8 veces.

Viernes 30. Sea d el número de días en cada semana. Entonces, $d^3 = 1331$, de donde $d = 11$. Por lo tanto, cada semana tiene 11 días.

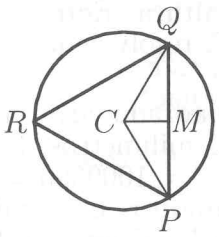
Soluciones de los Problemas de Septiembre.

Lunes 2. Coloquemos la suma horizontalmente:

$$1000 + 1001 + 1002 + \cdots + 1998 + 1999 + 2000.$$

Observemos que al sumar el primero y el último, el segundo y el penúltimo, el tercero y el antepenúltimo etc. obtenemos 3000 cada vez. Continuamos con este proceso y después de asociar 500 números, el número que queda en medio es el 1500 (que no tiene pareja con quien asociarlo) luego, la suma es $500 \times 3000 + 1500 = 1501500$.

Martes 3. Si C es el centro del círculo, $\angle PCQ = 120°$.



La perpendicular a PQ que pasa por C corta a PQ en el punto medio, M. Consideremos el triángulo PMC, como el ángulo $PCQ = 120°$, tenemos que $\angle PCM = 60°$, por lo tanto $\angle CPM = 30°$. Ahora bien, por un lado $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, y por otro $\cos 30° = \frac{MP}{CP} = \frac{2}{r}$. Igualando las dos ecuaciones tenemos que, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{r}$, de donde $r = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Miercoles 4. La mitad de 99 es $49\frac{1}{2}$ y la mitad de $\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{4}$, luego, a mitad de $99\frac{1}{2}$ es $49\frac{3}{4}$.

Jueves 5. Veamos primero las formas de obtener 2002 como suma de dos enteros, $2001 + 1 = 2002$, $2000 + 2 = 2002$. Si al primer sumando le restamos uno y se lo sumamos al segundo sumando, la suma no se altera y cuando lleguemos a $2002/2 = 1001$ los números de las parejas se van a empezar a repetir. La pareja 2002+0 no es una pareja permitida ya que estamos trabajando con enteros positivos. Ahora bien, como unicamente queremos considerar las parejas de impares, estas son la mitad, es decir, $1000/2 = 500$ y sobra 1 pareja. La pareja que sobra corresponde a $1001 + 1001 = 2002$ que es una pareja de números impares. Por lo tanto, la respuesta es 501.

Viernes 6. De la primera ecuación tenemos que $y = 2 - x$ y sustituyendo y en la segunda ecuación tenemos que

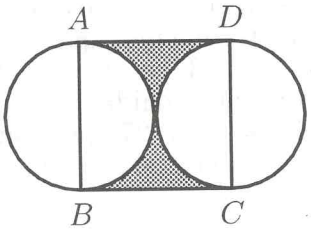
$$x\,(2 - x) - z^2 = 1.$$

Despejando y factorizando tenemos que

$$x^2 - 2\,x + 1 + z^2 = (x - 1)^2 + z^2 = 0.$$

Como $(x-1)^2$ y z^2 son ambos números positivos y su suma es cero, ambos números tienen que ser 0. Por lo tanto, $z = 0$ y $x = 1$. Sustituyendo en y, tenemos que $y = 1$. Entonces, $(1, 1, 0)$ es la única tercia que satisface las ecuaciones.

Lunes 9. $ABCD$ es un cuadrado de área $2 \times 2 = 4$.



Para encontrar el área de la región sombreada hay que restarle al área del cuadrado $ABCD$ el área de dos semicírculos de radio 1, o bien, el área de un círculo de radio 1. Por lo tanto, el área de la región sombreada es $4 - \pi$.

Martes 10. Denotemos por H, J y P la estatura en centímetros de Hernán, Juan y Pablo, respectivamente. Escribiendo el enunciado en términos de ecuaciones tenemos que

$$\begin{aligned} J + 8 &= H \\ H - 12 &= P, \end{aligned}$$

pero $J = 125$, luego, $H = 133$ y $P = 121$.

Miercoles 11. Para escribir los números del 1 al 9 usamos unicamente 9 dígitos. Del 10 al 99 tenemos 90 números, luego, necesitamos 180 dígitos. Para escribir los números del 100 al 199, que son 100 números, necesitamos 300 dígitos y así para cada centena. Es decir, que para escribir los números del 100 al 299 usaremos 600 dígitos. Por lo tanto, del 1 al 299 tenemos un total de 789 dígitos, pero nos piden el dígito 1000 por lo que ya no cabe otra centena de números.
Para escribir los números del 300 al 369 usamos 210 dígitos, más los 789 que teníamos dan un total de 999 dígitos, por lo tanto, el dígito que está en la posición 1000 es el 3, que corresponde a la cifra de las centenas del 370.

Jueves 12. Conviene expresar los números como potencias de 2 y después comparar los exponentes: $2^{4^8} = 2^{2^{2^8}} = 2^{2^{16}}$ y $2^{8^4} = 2^{2^{3^4}} = 2^{2^{12}}$, por lo tanto, es mayor el primer número.

Viernes 13. Si tomamos las potencias de 2, tenemos unicamente 8 números $2^2 = 4, 2^3 = 8, ..., 2^9 = 512$. Entre los números formados con potencias de 3, tenemos $3^2 = 9, 3^3 = 27, ..., 3^6 = 729$, es decir, 5 números. Las potencias de 4 no las consideramos ya que 4 es una potencia de 2. Como potencias de 5 tenemos solamente 3, a saber, $5^2 = 25, 5^3 = 125, 5^4 = 625$. Como potencias de 6 tenemos $6^2 = 36, 6^3 = 216$, es decir, 2 números. Las potencias de 7 que tenemos que considerar son $7^2 = 49, 7^3 = 343$, tenemos 2 números más. Las potencias de 8 y 9 no hay que considerarlas ya que al igual que el 4 estos números son potencias de 2 y 3, respectivamente. Números formados como potencias de 10 tenemos el $10^2 = 100, 10^3 = 1000$ y a partir del 10 unicamente tenemos que contar una potencia por cada uno de los números 11, ..., 31, es decir, $11^2 = 121, ..., 31^2 = 961$. Sin embargo, tenemos que tener cuidado ya que entre los números del 11 al 31 tenemos el 16, 25 y 27 que son potencias de 2, 5 y 3, respectivamente. Por lo tanto, si sumamos todos obtenemos 40 números.

Lunes 16. Tenemos que

$$p(1) = 1^3 + 1 \cdot a + 1 = 1 + a + 1 = 2 + a = 1 \quad \text{entonces} \quad a = -1.$$

Evaluando $p(x)$ en $x = 2$,

$$p(2) = 2^3 + 2 \cdot a + 1 = 8 + (-1)(2) + 1 = 8 - 2 + 1 = 7.$$

Martes 17. Tenemos que el dígito de las unidades para cada uno

de los sumandos es

$$\begin{array}{lll} (1^2+1) = ...2 & (6^2+6) & = ...2 \quad (11^2+11) = ...2 \\ (2^2+2) = ...6 & (7^2+7) & = ...6 \\ (3^2+3) = ...2 & (8^2+8) & = ...2 \\ (4^2+4) = ...0 & (9^2+9) & = ...0 \\ (5^2+5) = ...0 & (10^2+10) & = ...0 \end{array}$$

Podemos ver que cada 5 sumandos los dígitos de las unidades se repiten y el último dígito de su suma es 0. Como 2000 es un múltiplo de 5, el dígito de las unidades de la suma de los sumandos hasta 2000 es 0 y si aumentamos los sumandos

$$\begin{aligned} (2001^2+2001) &= ...2 \\ (2002^2+2002) &= ...6. \end{aligned}$$

Tendremos que el dígito de las unidades de la suma es 8.

Miercoles 18. Como el área del circulo es $1 = \pi r^2$, entonces $r = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. El triángulo OBC, tiene la misma área que el triángulo ABC ya que tienen la misma base BC y la misma altura. El triángulo OBC es equilátero de lado $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, luego utilizando el teorema de Pitágoras la altura es $h = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}}$. Entonces, el área del triángulo ABC es $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$.

Jueves 19. Podemos escribir las igualdades como

$$2 = 10^{\frac{1}{x_1}} \qquad \text{y} \qquad 5 = 10^{\frac{1}{x_2}}.$$

Multiplicando estas dos ecuaciones tenemos

$$\begin{aligned} 2 \cdot 5 &= 10^{\frac{1}{x_1}} \cdot 10^{\frac{1}{x_2}} \\ 10 &= 10^{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$.

Viernes 20. Si la manecilla del reloj que marca las horas marcara el número 3 y la de los minutos estuviera en el 6, el ángulo sería de 90°, sin embargo, la manecilla de las horas se encuentra a la mitad entre el número 2 y el número 3. El ángulo que se forma entre cada

dos números es de 30°, luego tenemos que el ángulo que forman las manecillas es de 105°.

Lunes 23. Consideremos cualquier número n. Escribimos a n como potencias de números primos: $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} p_3^{r_3} ... p_m^{r_m}$, donde $p_1, p_2, p_3, ..., p_m$ son primos y $r_1, r_2, r_3, ...r_m$ son los exponentes a los cuales están elevados los respectivos primos. El número de divisores de n está dado por la fórmula $(r_1 + 1)(r_2 + 1)(r_3 + 1)...(r_m + 1)$. Como $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5 \cdot 3 \cdot 2^3$ entonces, $5!$ tiene $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ divisores.

Martes 24. Escribimos a 1500 como producto de primos, $1500 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$. Buscando tres números entre estos factores que sumados den 45, encontramos que $(2 \cdot 3 \cdot 5) + (2 \cdot 5) + 5 = 30 + 10 + 5 = 45$. Por lo tanto, 30 es el mayor de estos números.

Miercoles 25. Tenemos que

$$\begin{aligned} x^2 - ax + 81 &= x^2 - ax + 81 + 18x - 18x \\ &= (x-9)^2 + (18-a)x. \end{aligned}$$

Como este número tiene que ser un cuadrado perfecto, $18 - a = 0$, por lo que $a = 18$.

Jueves 26. Observemos que la sucesión se construye de la siguiente forma

$$a, a+7, (a+7)-2, (a+7-2)+7, ...$$

por lo tanto, tenemos:

$$\begin{aligned} -4+7 &= 3 \\ 3-2 &= 1 \\ 1+7 &= 8 \\ 8-2 &= 6 \\ 6+7 &= 13 \\ 13-2 &= 11 \\ 11+7 &= 18. \end{aligned}$$

Luego, $x = 18$.

Viernes 27. Al partir el cubo se van a formar $5^3 = 125$ cubitos de arista 1 y como cada uno de ellos tiene 12 aristas, tenemos que la suma es $12 \cdot 125 = 1500$.

Lunes 30. Necesitamos que dos lados sean iguales. Si igualamos los lados por pares, tenemos tres casos:

1. Si $b+1=7-b$, entonces $b=3$. Luego, los lados medirían 4, 4 y 10, pero no se forma un triángulo, ya que $4+4$ es menor que 10 (desigualdad del triángulo).
2. Si $b+1=4b-2$, entonces $b=1$. De aqui los lados medirían 2, 2 y 6. Analogamente al caso anterior no se forma un triángulo, ya que $2+2$ es menor que 6.
3. Si $7-b=4b-2$, entonces $b=\frac{9}{5}$. Los lados medirían $\frac{26}{5}$, $\frac{26}{5}$ y $\frac{14}{5}$. En este caso si se forma un triángulo.

Por lo tanto, sólo hay un valor de b con el cual se forma un triángulo isósceles.

Soluciones de los Problemas de Octubre.

Martes 1. El número de diagonales de un polígono de n lados es $\frac{n(n-3)}{2}$. Luego, buscamos n que cumpla:

$$n=\frac{n(n-3)}{2} \qquad n\neq 0,$$

podemos cancelar n y obtener $n-3=2$, de donde, $n=5$. Por lo tanto, el polígono que tiene la misma cantidad de lados que de diagonales es el pentágono.

Miercoles 2. Mientras que el perro da 3 saltos, el conejo da 8, pero los 3 saltos del perro equivalen a 9 saltos del conejo, luego cada vez que el perro da tres saltos, le descuenta un salto al conejo. Por consiguiente, para descontar la ventaja de 50 saltos que le lleva el conejo, el perro tendrá que dar $3\times 50=150$ saltos, mientras el conejo da $9\times 50=450$.

Jueves 3. Sea x la edad actual de Roberto y y la edad actual de su hijo. Si hace 18 años Roberto era tres veces más viejo que su hijo, tenemos:

$$x-18=3(y-18).$$

Si actualmente es dos veces más viejo que su hijo, se tiene:

$$x=2y.$$

Sustituyendo el valor de x en la primera ecuación y resolviendo tenemos:

$$\begin{aligned} 2y-18 &= 3y-54 \\ 36 &= y. \end{aligned}$$

Luego, Roberto tiene 72 años y su hijo 36 años.

Viernes 4. Podemos escribir a los número ab y ba como $ab = 10a+b$ y $ba = 10b + a$. Luego, la diferencia entre ambos es:

$$ab-ba = 10a+b-(10b+a) = a(10-1)+b(1-10) = 9a-9b = 9(a-b).$$

De donde, la diferencia de los números es un múltiplo de 9. Por lo tanto, no puede ser un número primo.

Lunes 7. El reloj que no funciona da la hora correcta dos veces por día, mientras que el reloj que se atrasa un minuto por día da la hora correcta al atrasarse 12 horas, es decir, cada 720 días (ya que $12 \times 60 = 720$). Luego, de acuerdo con la definición, el mejor reloj es el que no funciona.

Martes 8. La longitud de la circunferencia equivale a $C = 2\pi r = 2\pi(1) = 2\pi \approx 6.28$ y el perímetro del cuadrado es $P = 4l = 4$. Por lo tanto, la longitud de la circunferencia es mayor.

Miercoles 9. Sean x la longitud del cuerpo y y la longitud de la cola. Tenemos las dos ecuaciones: $y = 30 + \frac{x}{2}$ y $x = y + 30$. Resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos que $x = 120$ y $y = 90$, de donde, la longitud del pescado es de 240 centímetros.

Jueves 10. Como $a^2 + 2b^2 - 2bc = 100$ y $2ab - c^2 = 100$, entonces:

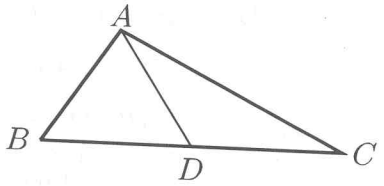
$$\begin{aligned} a^2 + 2b^2 - 2bc &= 2ab - c^2 \\ a^2 + b^2 - 2ab + c^2 + b^2 - 2bc &= 0 \\ (a-b)^2 + (b-c)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Luego, $a - b = 0$ y $b - c = 0$, es decir $a = b = c$. Sustituyendo a, en lugar de b y c en alguna de las ecuaciones originales tenemos, $a^2 = 100$ luego $a = \pm 10$. Por lo tanto, hay 2 ternas posibles, (10,10,10) y (-10,-10,-10).

Viernes 11. Los primeros 500 números pares son : 2, 4, 6, 8, 10, ..., 1000 y los primeros 500 números impares son: 1,3,5,7,9,..., 999. Luego

$$\begin{aligned} 2+4+6+8+...+1000-(1+3+5+...+999) &= \\ (2-1)+(4-3)+(6-5)+...+(1000-999) &= \\ 1+1+1+...+1 &= 500. \end{aligned}$$

Lunes 14. Como $AD = BD = CD$ los triángulos ABD y ADC son isósceles, luego, $\angle BAD = \angle ABD$ y $\angle DAC = \angle DCA$.



Por lo tanto, $2\angle BAD + 2\angle DAC = 180°$, de donde, $\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC = 90°$.

Martes 15. Sea x el número de turistas y y el número de habitaciones en el hotel. Si se ubican dos turistas por habitación, falta una, por lo tanto, $\frac{x}{2} = y + 1$, de donde $x = 2y + 2$. Si se ubican tres turistas por habitación, sobran dos, luego $\frac{x}{3} = y - 2$, de donde $x = 3y - 6$. Igualando las dos ecuaciones y resolviendo tenemos que

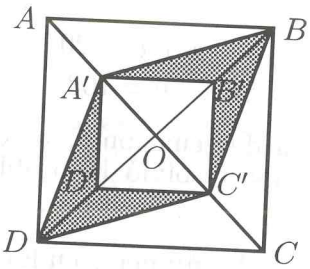
$$\begin{aligned} 3y - 6 &= 2y + 2 \\ y &= 8. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el hotel tiene 8 habitaciones y hay 18 turistas.

Miercoles 16. Llamemos $\frac{a}{b}$ a la fracción, entonces su inversa es $\frac{b}{a}$. Tenemos las siguientes ecuaciones: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{17}{4}$ y $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{15}{4}$. Sumando ambas ecuaciones obtenemos $\frac{2a}{b} = 8$ de donde, $a = 4b$. Podemos darle cualquier valor a a y obtendremos valores para b, que nos darán distintas soluciones al problema. Escojamos una, sea $a = 4$ de donde $b = 1$ y las fracciones serían $\frac{4}{1}$ y $\frac{1}{4}$.

Jueves 17. $a = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^3 = \left(\frac{1}{2^3}\right)^3 = \frac{1}{2^9}$. Por otra parte, b$=\left(\frac{1}{2}\right)^{27} = \frac{1}{2^{27}}$. Por lo tanto, a es mayor que b.

Viernes 18. Llamemos S al área sombreada y A', B', C' y D' a los puntos medios de AO, BO, CO y DO, respectivamente.



Denotemos por, $(A'BC'D)$ el área de $A'BC'D$, entonces

$$S = (A'BC'D) - (A'B'C'D').$$

Observemos que el área de $A'BC'D$ es cuatro veces el área del triángulo $A'DO$. Además, como $AA' = A'O$ y el triángulo ADA' y el $A'DO$ tienen la misma altura, luego, tienen la misma área. Entonces

$$\begin{aligned}
(A'BC'D) &= 4 \cdot (A'DO) \\
&= 4\left[\frac{1}{2} \cdot (ADO)\right] \\
&= 4\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4} \cdot (ABCD)\right\}\right] \\
&= 2\left[\frac{1}{4} \cdot (ABCD)\right] \\
&= \frac{1}{2}(12 \cdot 12) = 72.
\end{aligned}$$

Ahora, por el teorema de Pitágoras tenemos que $(AC)^2 = (AD)^2 + (DC)^2 = 2 \cdot 12^2$, por lo tanto, $AC = 12\sqrt{2}$, de donde $A'O = \frac{1}{4}AC = 3\sqrt{2}$. Aplicando nuevamente el teorema de Pitágoras obtenemos

$$\begin{aligned}
(A'D')^2 &= (A'O)^2 + (D'O)^2 \\
&= 2 \cdot (A'O)^2 \\
&= 2(3\sqrt{2})^2 \\
&= 2 \cdot 18.
\end{aligned}$$

De donde, $A'D' = 6$ y el área de $A'B'C'D'$ es 36. Por lo tanto, $S = 72 - 36 = 36$.

Lunes 21. Sea x el número de problemas que resolvió correctamente y y el número de preguntas que resolvió incorrectamente. Tenemos la siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
x + y &= 20 \\
8x - 5y &= 108.
\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, tenemos que $x = 16$ y $y = 4$. Por lo tanto, Cristina resolvió 16 problemas correctamente y 4 incorrectamente.

Martes 22. Escribimos los números en forma decimal como $10x+y$ y $10a + b$. Queremos que el producto de los números sea igual al

producto de los números con las cifras intercambiadas. De donde, tenemos la ecuación:

$$\begin{aligned}(10x+y)\cdot(10a+b) &= (10y+x)\cdot(10b+a)\\ 100xa+10xb+10ya+yb &= 100yb+10ya+10xb+xa\\ 99xa &= 99yb\\ xa &= yb.\end{aligned}$$

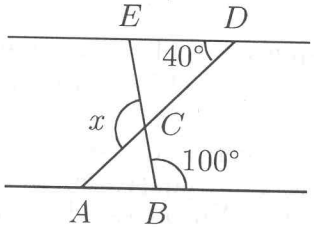
Tenemos que buscar números naturales x, y, a y b menores que 10 que cumplan $xa = yb$. Por ejemplo: $3\cdot 2 = 6\cdot 1$ y $2\cdot 6 = 4\cdot 3$, de donde, podemos formar la pareja $(13, 62)$ y $(24, 63)$ respectivamente. Siguiendo el mismo procedimiento se encuentran 14 parejas de números que cumplen con dicha propiedad.

Miercoles 23. En una hora, la primera llave llena $\frac{1}{10}$ de la capacidad del tanque, la segunda $\frac{1}{12}$ y la tercera $\frac{1}{15}$. Si las tres llaves están abiertas simultáneamente durante ese tiempo, llenarán:

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}=\frac{6+5+4}{60}=\frac{15}{60}=\frac{1}{4},$$

es decir, la cuarta parte del tanque; esto es, el agua alcanza medio metro de altura.

Jueves 24. Como AB es paralela a ED el ángulo $CAB = 40°$.



El ángulo $CBA = 80°$, ya que es suplementario del ángulo que mide $100°$. Entonces,

$$\angle ACB = 180° - (\angle CAB + \angle CBA) = 180° - (40° + 80°) = 60°.$$

Como x es suplementario de $\angle ACB$, $x = 120°$.

Viernes 25. El número de bailarines tiene que ser un número par, para que cada uno este frente a otro. Sea n el número de bailarines que hay. El bailarín número 1 está frente al bailarín número $\frac{n}{2}+1$; el bailarín 2 frente al balarín $\frac{n}{2}+2$; continuando así, tenemos que el bailarín 20 está frente al $\frac{n}{2}+20$. Luego, $\frac{n}{2}+20 = 53$, de donde $n = 66$. Por lo tanto, hay 66 bailarines.

Lunes 28. Denotemos por x el número de naranjas que tiene la canasta. El hombre le da a un amigo la mitad de sus naranjas y media más:

$$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2}$$

y le quedan

$$x-\frac{x+1}{2}=\frac{2x-x-1}{2}=\frac{x-1}{2}.$$

Le reparte a otro amigo la mitad de las que le quedan y media más, de donde:

$$\frac{x-1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{x-1+2}{4}=\frac{x+1}{4}$$

y le quedan:

$$\frac{x-1}{2}-\frac{x+1}{4}=\frac{2x-2-x-1}{4}=\frac{x-3}{4}.$$

Después, le da a un tercer amigo la mitad de lo que le queda y media más

$$\frac{x-3}{8}+\frac{1}{2}=\frac{x-3+4}{8}=\frac{x+1}{8}.$$

Finalmente le quedan:

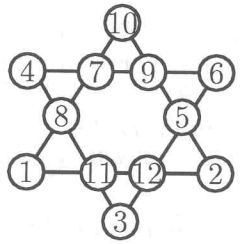
$$\frac{x-3}{4}-\frac{x+1}{8}=\frac{2x-6-x-1}{8}=\frac{x-7}{8}.$$

Como le sobra 1 naranja después de toda la repartición, tenemos que $\frac{x-7}{8}=1$. Entonces $x=15$, es decir, el hombre tenía 15 naranjas.

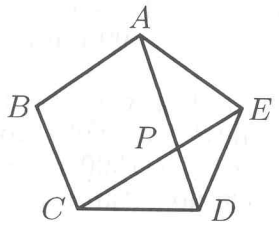
Martes 29. Al empezar a hacer la división de 111111...11 entre 1111, nos damos cuenta que cada cuatro cifras aparecen tres $0's$, excepto con las cuatro primeras. Entonces, el número total de ceros es $3(144-4)=420$.

Miercoles 30. La suma buscada de los números de las puntas de la estrella equivale a 26 y la suma de todos los números de la estrella es igual a 78, entonces la suma de los números del hexágono interior es $52=78-26$. Como la suma de cada lado debe ser 26, al sumar los tres lados de uno de los triángulos grandes obtenemos 78, sin olvidar que estamos sumando dos veces los vértices. Así, el doble de la suma de los números de los vértices de un triángulo es 26 que equivale a la suma de los números de los lados (78) menos, la suma de los vértices del hexágono interior (52). Por lo tanto, la suma de los vértices de los triángulos es 13. Buscamos las combinaciones posibles para los vértices; como 12 y 11 no pueden ocupar estos lugares, empezamos

con 10, luego los otros vértices son el 1 y el 2. Los vértices del otro triángulo grande son 6, 4 y 3. Continuando con este razonamiento colocamos todos los números como se muestra en la figura.



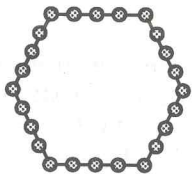
Jueves 31. Llamemos P al punto de intersección de las rectas.



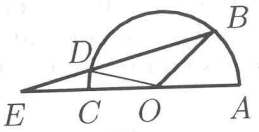
La suma de los ángulos interiores de un pentágono es $5 \cdot 180° - 360° = 540°$. Entonces, cada ángulo interior de un pentágono regular mide $\frac{540°}{5} = 108°$. Como el triángulo ADE es isósceles, los ángulos EAD y EDA miden 36°. De la misma forma $\angle DEC = \angle DCE = 36°$. Por lo tanto, el triángulo EDP es isósceles y el ángulo EPD mide 108°. Entonces los ángulos en P miden 108° y 72°.

Soluciones de los Problemas de Noviembre.

Viernes 1.



Lunes 4. Llamemos $\alpha = \angle AEB = \angle DEC$. Como $DE = r = OD$, el triángulo OED es isósceles, luego $\angle DOE = \alpha$.



Como BDO es un ángulo exterior del triángulo DOE entonces, $\angle BDO = 2\,\alpha$. Ahora bien, el triángulo BOD es isósceles, entonces $\angle DBO = \angle BDO = 2\,\alpha$. Como $\angle BOA$ es ángulo exterior del triángulo BOE, tenemos que $\angle BOA = \angle AEB + \angle EBO = \alpha + 2\,\alpha$. Por lo tanto, $\angle BOA = 3\,\alpha$, es decir, que $k = \frac{1}{3}$.

Martes 5. Los números capicúas de 2 cifras son 11, 22, 33,..., 99, 9 en total; los de tres cifras son de la forma aba, donde a tiene 9 posibilidades: $a = 1, 2, ..., 9$ y b tiene 10 posibilidades: $b = 0, 1, 2, ..., 9$. Así que hay $9 \times 10 = 90$ formas de escoger un número capicúa de tres cifras. En total serán $9 + 90 = 99$ números capicúas.

Miercoles 6. El número total de votantes fue $0.6 \times 2500 = 1500$, luego el número de habitantes que votó por Jiménez fue $0.32 \times 1500 = 480$ y por Rodríguez $0.3 \times 1500 = 450$. Luego, $480 + 450 = 930$ fueron los habitantes que no votaron por Patricio.

Jueves 7. Sea r el radio del círculo, su área es $A = \pi r^2$. Si aumenta el radio un 100% entonces, el nuevo radio es $2r$ y la nueva área es: $\pi(2r)^2 = 4\pi r^2$. Por lo tanto, el área pasó de πr^2 a $4\pi r^2$, es decir, aumentó un 300%.

Viernes 8. Tenemos que

$$(7!)(6!) = (7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)(6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1).$$

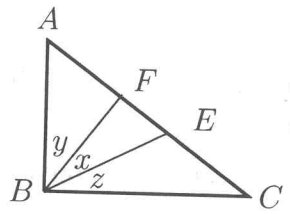
Veamos como $(6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 8 \cdot 9 \cdot 10$. Primero tenemos que $2 \cdot 4 = 8$. Ahora solo nos queda expresar a $6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$ como $9 \cdot 10$, pero $6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 90 = 9 \cdot 10$. Por lo tanto, tenemos que

$$(7!)(6!) = (10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 10!$$

luego, $n = 10$.

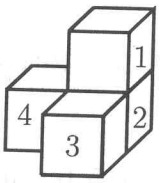
Lunes 11. Contemos los números según los dígitos que tienen. Con 0,1,2 hay 4 números (120, 102, 201, 210); con 0,1,1 hay 2 números (110, 101); con 0,2,2 hay 2 (el 202 y el 220); con 1,1,2 son 3; con 1,2,2 hay 3, y con 2,2,2 sólo el 222. Por lo tanto, en total son $4 + 2 + 2 + 3 + 3 + 1 = 15$.

Martes 12. Llamemos $x = \angle EBF$, $y = \angle ABF$ y $z = \angle CBE$, entonces $x+y+z = 90°$. Como $AB = AE$, $\angle ABE = \angle AEB = x+y$.



Análogamente, $\angle BFC = x + z$. En el triángulo FBE tenemos que $x + (x + y) + (x + z) = 180°$, pero $x + y + z = 90°$, entonces $2x + 90° = 180°$, de donde $x = 45°$. Por lo tanto, $\angle EBF = 45°$.

Miercoles 13. Numeremos los cubos como se muestra en la figura



Los cubos marcados con los números 1, 3 y 4 tienen cinco caras pintadas, y el marcado con el número 2 tiene tres caras pintadas, por lo tanto, tenemos un total de 18 caras pintadas.

Jueves 14. En un cuadrado de 3×2 la diagonal unicamente toca dos vértices, el vértice inferior izquierdo y el vértice superior derecho del rectángulo.
Los lados del réctangulo 45×30 están en la misma razón, $3 : 2$, que los lados del rectángulo de 3×2. Como caben 15 rectángulos de 3×2 sobre la diagonal del rectángulo mayor y contamos unicamente el vértice inferior izquierdo de cada uno de los rectángulos de 3×2 (ya que sino contaríamos los vértices dos veces) tendremos 15 vértices más 1, el vértice superior derecho del último rectángulo colocado sobre la diagonal. Por lo tanto, la diagonal toca a 16 vértices.

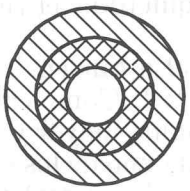
Viernes 15. Sea n el número original, lo podemos escribir como $10^5 + a$ donde a es un número de cinco cifras. Al mover el 1 a la posición de las unidades obtenemos el número $10a + 1$. Tenemos que $10a + 1 = 3(10^5 + a) = 300000 + 3a$ entonces, $7a = 299999$. Luego, $a = 42857$ y $n = 142857$.

Lunes 18. Escribimos la sucesión como sigue

$$
\begin{aligned}
1+2-3+4+5-6+7+8-9...+100+101-102 &= \\
&= 1+2+4+5+7+...+100+101- \\
&\quad -(3+6+...+99+102) = \\
&= 1+2+3+4+5+6+7+...+101+102- \\
&\quad -2(3+6+9+...99+102) = \\
&= \frac{102(103)}{2} - 6(1+2+...+34) = \\
&= 5253 - 6(\frac{34\cdot 35}{2}) = \\
&= 5253 - 3570 = 1683.
\end{aligned}
$$

Martes 19. Por ser múltiplo de 5 termina en 5. Ahora, hay que buscar tres números distintos de cero cuya suma sea 4. La única posibilidad es 1, 1, 2 y como el número debe ser mayor que 2002, el número es 2115.

Miercoles 20. El área de la región cuadriculada es $\pi(2a)^2-\pi(a)^2 = 3\pi a^2$.



Analogamente, el área de la región rayada es $\pi(3a)^2-\pi(2a)^2 = 5\pi a^2$. Por lo tanto, la razón entre la áreas es $\frac{3\pi a^2}{5\pi a^2} = \frac{3}{5}$.

Jueves 21. Tenemos que x, y, $z \geq 0$.

1. Si $x = 0$, entonces $2^z = 2\cdot 4^0 = 2$. Luego $z = 1$ y $y = 15$. Por lo tanto, $x = 0$, $z = 1$ y $y = 15$ es una solución.

2. Si $x > 0$, entonces la ecuación $z^x = y^{2x}$ implica que $z = y^2$.

   Como $2^z = 2\cdot 4^x$ y $2\cdot 4^x = 2\cdot(2^2)^x = 2\cdot(2^{2x}) = 2^{2x+1}$, entonces $2x+1 = z = y^2$. Sustituyendo en la ecuación $x+y+z = 16$

obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{y^2-1}{2} + y + y^2 &= 16 \\ 3y^2 + 2y - 33 &= 0 \\ (3y+11)(y-3) &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $y = \frac{-11}{3}$ o $y = 3$. La primera solución es negativa, por lo que el único valor posible de y es 3. Luego, $z = y^2 = 9$ y $x = \frac{y^2-1}{2} = 4$ es otra solución.

Por lo tanto, las únicas soluciones (x, y, z) no negativas son: $(0, 15, 1)$ y $(4, 3, 9)$.

Viernes 22. Si despejamos x de la ecuación $2x + 3y = 50$ obtenemos, $x = 25 - \frac{3y}{2}$. Luego, para que x sea entero y debe de ser par, es decir, $y = 2n$ con n entero. Como x es positivo entonces, $x = 25 - 3n > 0$, luego $9 > n$. Por hipótesis, $x < y$, entonces $25 - 3n < 2n$ lo que implica que $5 < n$. Por lo tanto, $5 < n < 9$, luego n tiene tres valores posibles. De donde, la ecuación tiene tres soluciones enteras (x, y), que son: $(7, 12)$, $(4, 14)$, $(1, 16)$.

Lunes 25. Observemos que $(x+2y)+(y+2x) = 3x+3y = 3(x+y)$. Luego, podemos escribir $y+2x = 3(x+y)-(x+2y)$. Como 3 divide a $x + 2y$, tenemos

$$\begin{aligned} y + 2x &= 3(x+y) - (x+2y) \\ &= 3(x+y) - 3k \\ &= 3(x+y-k). \end{aligned}$$

Por lo tanto, 3 divide a $y+2x$ y no podemos asegurar que un número mayor lo divida.

Martes 26. El pintor ha subido en total $4+2+11 = 17$ peldaños y ha bajado 8, es decir, en realidad sólo subió 9 peldaños para llegar al tope de la escalera. Como partió del peldaño del medio, la escalera tiene 18 peldaños.

Miercoles 27. Observemos que $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ termina en cero. Entonces, si $n \geq 5$, $n!$ terminará en cero. Por lo tanto, si n es más grande que 5, 25 no divide a $n! + 1$.
Si $n \leq 5$ entonces, sólo para $n = 4$ se cumple la condición. Por lo tanto, 4 es el mayor valor de n tal que 25 divide a $n! + 1$.

Jueves 28. El perímetro es $a+b+6=14$, es decir, $a+b=8$. Por el teorema de Pitágoras, tenemos que $a^2+b^2=36$. Luego,

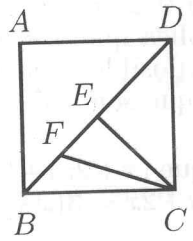
$$64=(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=36+2ab,$$

entonces $2ab=28$. Por lo tanto, el área es $\frac{ab}{2}=7$.

Viernes 29. Buscamos el número x tal que $35095+x=35.95$, así $x=35.95-35095=-35059.05$.

Soluciones de los Problemas de Diciembre.

Lunes 1. Comparemos los triángulos BCF y BCE. Si pensamos que tienen sus bases sobre la diagonal BD, vemos que tienen la misma altura, pero la base del primero es la mitad de la base del segundo.



Por lo tanto, $(BCF)=\frac{1}{2}(BCE)$. Como las diagonales parten al cuadrado en cuatro triángulos congruentes a BCE, el área de dicho triángulo es un cuarto del área del cuadrado. Por lo tanto, $(BCF)=\frac{1}{8}(ABCD)=\frac{1}{8}$.

Martes 2. Reescribamos $\sqrt[4]{4}$ como una raíz octava.

$$\sqrt[4]{4}=4^{\frac{1}{4}}=4^{\frac{2}{8}}=(4^2)^{\frac{1}{8}}=16^{\frac{1}{8}}=\sqrt[8]{16},$$

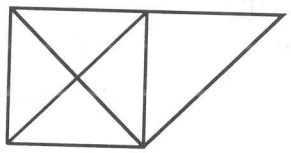
comparando, tenemos que $\sqrt[4]{4}$ es mayor.

Miercoles 3. Sea $a_1=2$, $a_2=3$, $a_3=5$, $a_4=9$. Entonces, $a_2=a_1+2^0$, $a_3=a_2+2^1$, $a_4=a_3+2^2$, luego $a_5=a_4+2^3=9+8=17$. Luego, el número que falta es el 17.

Jueves 4. Reescribimos el número como $N=2^4 2^8 5^8$. Asosciamos para tener $N=2^4 10^8=16\times 10^8$. Por lo tanto, N tiene 10 dígitos.

Viernes 5. Sea n es la cantidad de números consecutivos con los cuales expresaremos el 105 y sea x el promedio, es decir $x = \frac{105}{n}$.
Si n es impar y divisor de 105, entonces x será un entero y se encontrará en el lugar $\frac{n}{2} + 1$, es decir, $105 = (x-1) + x + (x+1)$. Por ejemplo, como $\frac{105}{3} = 35$, tenemos que $105 = 34 + 35 + 36$. Si n es impar pero no es divisor de 105, entonces x no será un número entero y 105 no se podrá expresar como la suma de dos o más números consecutivos ($x = \frac{105}{9}$, $x = \frac{105}{11}$, etc.).
Si n es par, entonces n no divide a 105. Consideremos las n tales que $\frac{105}{n} = x.5$, luego x tiene que ser el número que esté en el lugar $\frac{n}{2}$. Por ejemplo, para $n = 6$, $\frac{105}{6} = 17.5$, luego $105 = 15+16+17+18+19+20$ (el 17 está en el lugar $\frac{6}{2} = 3$).
El último a considerar será $n = 14$, pues para $n = 15$ tenemos que $\frac{105}{15} = 7$, pero ya no es posible encontrar 15 enteros positivos y consecutivos cuya suma sea 105. Por lo tanto, los valores para n son: 2, 3, 5, 6, 7, 10 y 14, es decir se puede escribir al 105 de 7 maneras distintas como suma de dos o más enteros positivos y consecutivos.

Lunes 8. Supongamos que la longitud de los lados del cuadrado es 1.



Triángulos de base 1 y altura $\frac{1}{2}$ tenemos 4, de base 1 y altura 1 tenemos dentro del cuadrado 4 y fuera de él, uno más, en total 5. Triángulos de base 2 y altura 1 tenemos 1. Por lo tanto, en total tenemos 10 triángulos.

Martes 9. $1,000,000,000 = 10^9 = (2^9) \times (5^9) = 512 \times 1,953,125$. Por lo tanto, los números buscados son 512 y 1,953,125.

Miercoles 10. Consideremos cualquier número n. Escribimos a n como potencias de números primos: $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} p_3^{r_3} ... p_m^{r_m}$, donde $p_1, p_2, p_3, ..., p_m$ son primos y $r_1, r_2, r_3, ...r_m$ son los exponentes.
El número de divisores de n está dado por la fórmula $(r_1+1)(r_2+1)(r_3+1)...(r_m+1)$. El número 14 se puede escribir como: $14 = 7 \times 2 = (6+1)(1+1)$ y $14 = 14 \times 1 = (13+1)(0+1)$, luego los exponentes de los primos podrían ser 6 y 1 ó 13. Como se pide el menor entero que tenga 14 divisores, se buscan los primos más pequeños para formar al número. Los números 2^{13} y $2^6 \times 3$ son

dos números que tienen 14 divisores, pero $2^6 \times 3 = 192$ es el más pequeño.

Jueves 11. Un número es divisible por 18 si y sólo si es divisible por 2 y 9. El número mayor de 9 cifras distintas es 987654321. Este número es divisible por 9, pues la suma de sus cifras es 45 (un múltiplo de 9), pero no es divisible entre dos, por ser impar. Por lo tanto, basta con invertir sus dos últimas cifras. Luego, 987654312 es el mayor número de 9 cifras distintas que es divisible entre 18.

Viernes 12. Hacemos el cociente y obtenemos:
$\frac{4}{101} = 0.039603960396...$, es decir, hay un período de repetición de longitud 4. Como el residuo de dividir 2002 entre 4 es 2 ($2002 = 500 \times 4 + 2$), en el lugar 2002 aparece el segundo número del período 0396, o sea, el 3.

Lunes 15. El criterio de divisibilidad entre 8 dice: un número es divisible entre 8 si sus últimas tres cifras son cero ó un múltiplo de 8. Dado que 176 es múltiplo de 8, cualquier valor, entre 0 y 9 que se le de a A hará que $9A523176$ sea divisible entre 8. Por lo tanto, A puede valer 0, 1, 2, ..., 9.

Martes 16. Tenemos que:

$$\begin{aligned}(10^2 + 10^3 + ... + 10^{10})^{2002} &= [10^2(1 + 10 + 10^2 + ... + 10^8)]^{2002} \\ &= 10^{4004}(1 + 10 + 10^2 + ...10^8).\end{aligned}$$

Por lo tanto, hay 4004 ceros al final.

Miercoles 17. Sea a, b y c las medidas del largo, el ancho y el alto del paralelepípedo, respectivamente. Las caras tienen áreas:

$$ab = xy \tag{8}$$

$$ac = \frac{y}{2} \tag{9}$$

$$bc = 2x. \tag{10}$$

Despejamos a de la ecuación (8), la sustituimos en la ecuación (9) y despejamos b, entonces

$$b = \frac{2xyc}{y}$$

$$b = 2xc.$$

Sustituimos b en la ecuación (10) y obtenemos $c^2 = 1$ lo cual implica que $c = \pm 1$, pero como $c > 0$ entonces $c = 1$, de donde $a = \frac{y}{2}$ y $b = 2x$. Por lo tanto, el volumen es xy.

Jueves 18. Supongamos que $a_1, a_2, ..., a_{221}$ son las 221 cifras del número.
Como $a_1 \times a_2 \times ... \times a_{221} = 3^{442}$, entonces cada a_i es 3 ó 9. Supongamos que una de las a_i es 3 y todas las demás son 9, entonces:

$$\begin{aligned} a_1 \times a_2 \times ... \times a_{221} &= 3 \times 9 \times 9 \times ... \times 9 \\ &= 3 \times (9^{220}) \\ &= 3 \times (3^2)^{220} \\ &= 3 \times (3^{440}) \\ &= 3^{441} \neq 3^{442}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, todas las cifras tienen que ser 9. Luego, la suma de las cifras del número es $9 \times 221 = 1989$.

Viernes 19. Observemos que elevar al cubo y sacar raíz cúbica son operaciones inversas. Entonces

$$(\sqrt[3]{3})^{(\sqrt[3]{3})^3} = (\sqrt[3]{3})^3 = 3.$$

Lunes 22. Un número es divisible por 3 si la suma de sus dígitos es múltiplo de 3. Hay 33 números del 1 al 100 que son divisibles entre 3; hay 34 que dejan residuo 1 al dividirlos por 3 y otros 33 con residuo 2. Examinemos las distintas posibilidades de elegir los números:

1. Los tres números seleccionados dejan residuo 0: $\frac{33\times32\times31}{6} = 5456$.
2. Los tres números seleccionados dejan residuo 1: $\frac{34\times33\times32}{6} = 5984$.
3. Los tres números seleccionados dejan residuo 2: $\frac{33\times32\times31}{6} = 5456$.
4. Uno deja residuo 0, otro deja residuo 1, y el tercero deja residuo 2: $33 \times 34 \times 33 = 37026$.

Por lo tanto, hay $2 \times (5456) + 5984 + 37026 = 53922$ maneras de escoger los tres números.

Martes 23. Inscribimos un hexágono regular en el círculo, cuyos vértices son los vértices de los pétalos, como se muestra en la figura. Cada uno de los triángulos que componen al hexágono regular son triángulos equiláteros.

Jueves 18. Supongamos que $a_1, a_2, ..., a_{221}$ son las 221 cifras del número.
Como $a_1 \times a_2 \times ... \times a_{221} = 3^{442}$, entonces cada a_i es 3 ó 9. Supongamos que una de las a_i es 3 y todas las demás son 9, entonces:

$$\begin{aligned} a_1 \times a_2 \times ... \times a_{221} &= 3 \times 9 \times 9 \times ... \times 9 \\ &= 3 \times (9^{220}) \\ &= 3 \times (3^2)^{220} \\ &= 3 \times (3^{440}) \\ &= 3^{441} \neq 3^{442}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, todas las cifras tienen que ser 9. Luego, la suma de las cifras del número es $9 \times 221 = 1989$.

Viernes 19. Observemos que elevar al cubo y sacar raíz cúbica son operaciones inversas. Entonces

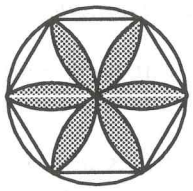
$$(\sqrt[3]{3})^{(\sqrt[3]{3})^3} = (\sqrt[3]{3})^3 = 3.$$

Lunes 22. Un número es divisible por 3 si la suma de sus dígitos es múltiplo de 3. Hay 33 números del 1 al 100 que son divisibles entre 3; hay 34 que dejan residuo 1 al dividirlos por 3 y otros 33 con residuo 2. Examinemos las distintas posibilidades de elegir los números:

1. Los tres números seleccionados dejan residuo 0: $\frac{33\times32\times31}{6} = 5456$.
2. Los tres números seleccionados dejan residuo 1: $\frac{34\times33\times32}{6} = 5984$.
3. Los tres números seleccionados dejan residuo 2: $\frac{33\times32\times31}{6} = 5456$.
4. Uno deja residuo 0, otro deja residuo 1, y el tercero deja residuo 2: $33 \times 34 \times 33 = 37026$.

Por lo tanto, hay $2 \times (5456) + 5984 + 37026 = 53922$ maneras de escoger los tres números.

Martes 23. Inscribimos un hexágono regular en el círculo, cuyos vértices son los vértices de los pétalos, como se muestra en la figura. Cada uno de los triángulos que componen al hexágono regular son triángulos equiláteros.



Observemos que los medios pétalos que forman la flor, son arcos de círculo en cada uno de los lados de los triángulos equiláteros. Por lo tanto, el área de la flor es el área del círculo menos el área del hexágono y esto nos daría, el área de seis medios pétalos, y tenemos doce, por lo que solamente tenemos que multiplicar el resultado por 2.
El área del círculo es πr^2 y la del hexágono es $\frac{p \cdot a}{2}$. Donde p denota el perímetro del hexágono, que es $6r$ y a el apotema ó altura de cada uno de los triángulos equiláteros que forman al hexágono. De donde $a = \frac{\sqrt{3}}{2}r$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \text{Area de la flor} &= 2\left(\pi r^2 - \frac{p \cdot a}{2}\right) \\ &= 2\left(\pi r^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}r^2\right). \end{aligned}$$

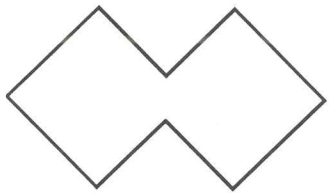
Miercoles 24. Como $25_m = 2 \times m^1 + 5 \times m^0$ y 52_m es el doble de 25_m entonces, $5 \times m^1 + 2 \times m^0 = 2(2 \times m^1 + 5 \times m^0)$. De donde, $5m + 2 = 4m + 10$. Resolviendo la ecuación tenemos que $m = 8$.

Jueves 25. Existen varias soluciones, dos de ellas serían $10 = \frac{99}{9} - \frac{9}{9}$ y $10 = \frac{9}{9} + 9 + 9 - 9$.

Viernes 26. En la solución de este problema no se tomaron en cuenta ajustes de días más allá de los que ocurren cada 4 años. Como $365 = (52 \times 7) + 1$, cada año normal recorre un día de la semana y cada año bisiesto recorre dos. Como son 500 años y de ellos 125 son bisiestos, el día de la semana se recorrerá $(2 \times 125) + 375 = 625$ veces. Ahora, $625 = 89 \times 7 + 2$, así que el día buscado es dos días después del sábado, o sea el lunes.

Lunes 29. Basta con fijarnos en las potencias del 2:

$$\begin{aligned} 2^1 &= 2 \\ 2^2 &= 4 \\ 2^3 &= 8 \\ 2^4 &= 16 \\ 2^5 &= 32 \\ 2^6 &= 64 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Observamos que el dígito de las unidades de las potencias de 2 se repite cada 4, presentando el ciclo 2, 4, 8, 6. Luego, la cifra de las unidades de la potencia depende del exponente al cual se eleva el 2. Por ejemplo, las potencias cuyos exponentes son $4, 8, 12, 16, \ldots$ terminan en 6. Como 2000 es un múltiplo de 4 entonces 2002^{2000} termina en 6, de donde 2002^{2002} termina en 4.

Martes 30. La suma de los ángulos interiores de un octágono es $180°(8-2) = 1080°$. Observemos que al poner 7 ángulos rectos, el restante debería medir 450°, lo cual es imposible. Si 6 ángulos interiores son rectos, la suma de los dos restantes tendría que ser 540°. En la figura se muestra un octágono con seis ángulos interiores rectos.