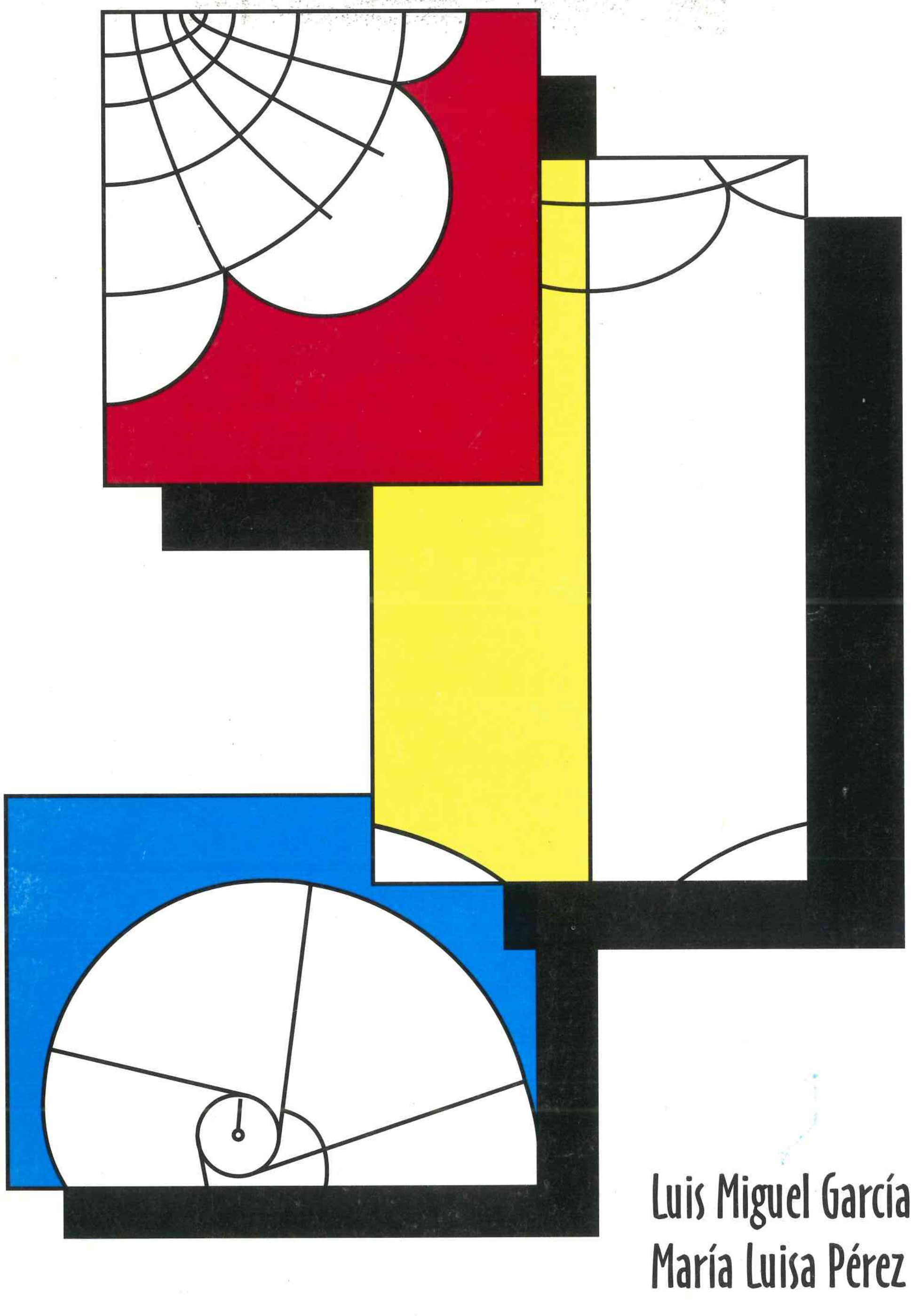
Nuestros Problemas Favoritos

15 años de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas



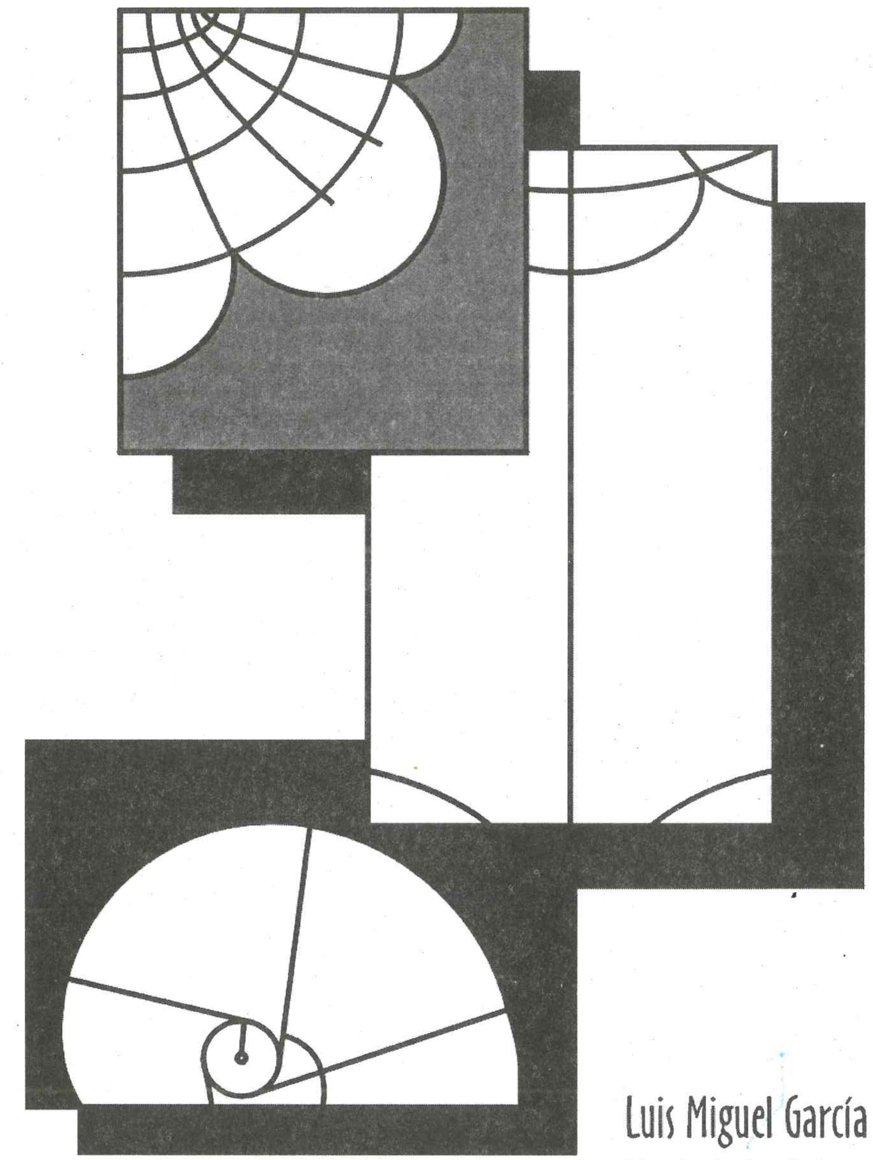
Luis Miguel García Velázquez
María Luisa Pérez Seguí

Nuestros Problemas Favoritos

15 años de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Nuestros Problemas Favoritos

15 años de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas



Luis Miguel García Velázquez
María Luisa Pérez Seguí

Diseño de Portada:
Juan Pablo Díaz González y
Ricardo Aldaco Rodríguez

Nuestros Problemas Favoritos,
Luis Miguel García Velázquez
María Luisa Pérez Seguí

I.S.B.N. 970-703-081-X
Hecho e impreso en México
Morelia, Mich., México. 2001

Autores de los Problemas

INTRODUCCIÓN

En matemáticas, el arte de proponer un problema debe considerarse más valioso que el resolverlo.
Georg Cantor, en su disertación doctoral.

La Olimpiada Mexicana de Matemáticas fue creada en el año de 1987 con la finalidad de promover el aprendizaje de las matemáticas en forma creativa, enfrentando a los jóvenes participantes a problemas que les permitan estimular la imaginación y el razonamiento lógico. Una buena parte de estos problemas son el resultado del trabajo de profesores que han puesto su creatividad en beneficio de la olimpiada y de sus participantes.

La invención de problemas es un proceso comparable a la creación artística; se requiere de una buena dosis de imaginación, mucha paciencia y hasta un poco de inspiración. El autor explora situaciones nuevas, se hace preguntas y trata de resolverlas, refina varias veces sus ideas, discute con otros, vuelve a la mesa de trabajo y, después de varias horas, quizá tenga entre sus manos un problema nuevo, que aún deberá ser sometido a una cuidadosa redacción del enunciado y a la búsqueda de nuevas soluciones. Pero en muchas ocasiones el autor, como el artista, no queda satisfecho con su obra, así que la desecha y vuelve a comenzar.

Han pasado quince años a partir de la primera edición de la olimpiada y queremos celebrar el tiempo transcurrido con esta compilación del trabajo de profesores que, distribuidos a lo largo y ancho de la República Mexicana, han colaborado con la invención de problemas para las diferentes etapas de las Olimpiadas de Matemáticas. Para seleccionar esta pequeña muestra hemos enfrentado a cada uno de los autores con la difícil decisión de elegir el problema de su invención que más le ha gustado; el resultado es este libro con el cual queremos reconocer el talento y agredecer el esfuerzo de todos ellos.

Con la intención de uniformar el estilo y la redacción, los problemas aquí presentados han sido revisados a fondo y, en algunos casos, se han hecho modificaciones. El Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas respalda la solidez académica de los enunciados y de las soluciones aquí presentados.

Los autores de este libro agradecemos la invaluable colaboración de Julio César Aguilar Cabrera, Sara Carrillo Uribe y Miguel Raggi Pérez y, de manera muy especial, a todos los creadores de estos problemas, que representan una excelente muestra del trabajo académico que se lleva a cabo en las Olimpiadas. Dedicamos a todos ellos este trabajo.

Finalmente deseamos invitar a los lectores de éste a que se atrevan a desafiar su creatividad inventando nuevos problemas que ofrezcan un reto para las próximas generaciones.

Autor:

JULIO CÉSAR AGUILAR CABRERA.

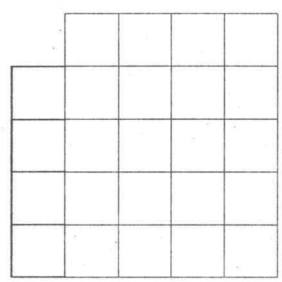
Apareció en:

14ª OLIMPIADA EN MICHOACÁN, 2000.

Julio César Aguilar fue ganador de primer lugar en la 6ª Olimpiada Nacional, representando a Veracruz. En 1993 participó en la Olimpiada Internacional (Turquía), y en la 8ª Olimpiada Iberoamericana (México) ganando en ambas medalla de bronce. Entre 1993 y 2000 formó parte del comité estatal de la olimpiada en Veracruz. Estudió la carrera de Matemáticas en la Universidad de Veracruz. Actualmente estudia la maestría en Matemáticas en la Universidad Michoacana y es miembro del Comité Organizador de la OMM.

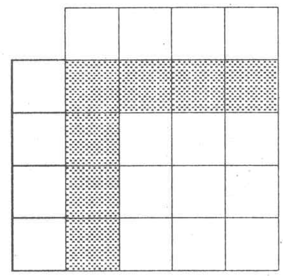
Problema.

En las casillas del renglón de arriba y de la columna de la izquierda de la cuadrícula que se muestra se escriben al azar los números 1 o -1. Después se llenan los 16 cuadritos restantes según la regla siguiente: *En cada casilla se pone el producto del número que aparece justo arriba con el que aparece justo a la izquierda.* ¿De cuántas maneras distintas puede haber quedado la cuadrícula de 4×4?



Solución.

En la cuadrícula de 4×4 consideremos los siete cuadros sombreados de la figura:



Es claro que los números de todo el tablero dependen de los números que correspondan a esos siete cuadros. Además, como esos siete cuadros pertenecen a la cuadrícula de 4×4, el escoger otra configuración para esos siete cuadros implica tener una configuración diferente para la cuadrícula. Por lo tanto, el problema es equivalente a contar cuántas combinaciones se pueden poner en los siete cuadros referidos. Ahora bien, es posible poner cualquier combinación de $1's$ y $-1's$ en los siete cuadros mencionados mediante la elección adecuada de números para los cuadros fuera del tablero. Como hay dos opciones (1 o -1) para cada uno de los siete cuadros, concluimos que hay 2^7 configuraciones posibles.

Autor:

JUAN JOSÉ ALBA GONZÁLEZ.

Apareció en:

13ª OLIMPIADA NACIONAL, 1999.

Juan José Alba fue ganador de primer lugar en la 8ª Olimpiada Nacional, representando a Jalisco. Desde 1997 ha colaborado como entrenador en los estados de Colima, Estado de México y el Distrito Federal. Actualmente estudia la carrera de Matemáticas en la Facultad de Ciencias de la UNAM y es miembro del Comité Organizador de la OMM.

Problema.

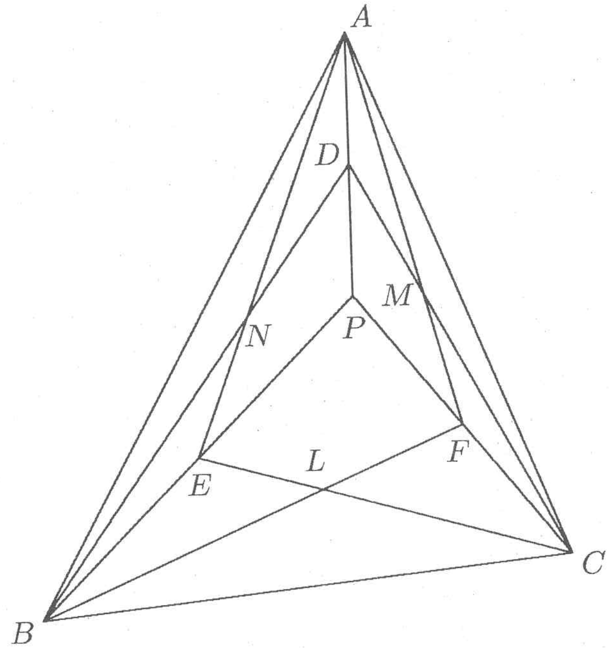
Sea P un punto en el interior del triángulo ABC. Sean D, E y F los puntos medios de AP, BP y CP, respectivamente y sean L, M y N los puntos de intersección de BF con CE, AF con CD y AE con BD.

(a) Mostrar que el área del hexágono $DNELFM$ es igual a una tercera parte del área del triángulo ABC.

(b) Mostrar que DL, EM y FN concurren.

Solución.

(a) Como en el triángulo ABP, BD y AE son medianas se tiene que N es el centroide del triángulo ABP y como las medianas dividen al triángulo en seis triángulos de la misma área se tiene que $(PDNE) = \frac{1}{3}(ABP)$. Análogamente $(PELF) = \frac{1}{3}(BCP)$ y $(PFMD) = \frac{1}{3}(CAP)$ por lo que concluimos que $(DNELFM) = \frac{1}{3}(ABC)$.



(b) Consideremos el triángulo CDE. Como $\frac{CM}{MD} = \frac{CL}{LE}$ se tiene que ML y DE son paralelas. Si Q es el punto de intersección de DL y EM se tiene que los triángulos QDE y QLM son semejantes, por lo que $\frac{DQ}{QL} = \frac{EQ}{QM} = \frac{3}{2}$ esto es DL y EM se cortan en el punto Q que divide a los segmentos en razón $3 : 2$. Con el mismo argumento se muestra que FN y DL se cortan en un punto que los divide en razón $3 : 2$, luego el resultado.

Autor:

PATRICIO TLACAELEL ALVA PUFLEAU.

Apareció en:

GANADOR DEL CONCURSO POR EQUIPOS DE LA 11ª OLIMPIADA IBEROAMERICANA, 1996.

Patricio Alva fue ganador de primer lugar en la 9ª y la 10ª Olimpiadas Nacionales, representando a Jalisco. Participó en la Olimpiada Internacional 1997 (Argentina), ganando una medalla de plata, y en 1996 participó en la 11ª Olimpiada Iberoamericana (Costa Rica), ganando una medalla de oro. Ha colaborado en concursos y entrenamientos de la olimpiada en Jalisco. Actualmente estudia Ingeniería en Electrónica en el Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Occidente.

Problema.

De un triángulo ABC se conoce el circuncírculo $\mathcal{O}$, el lado BC y la longitud de RL, donde R y L están definidos como sigue: La bisectriz de $\angle B$ toca al lado al círculo nuevamente en F, la bisectriz de $\angle C$ toca al círculo en E, la intersección de EF con AB es R y la intersección con AC es L. Encontrar A.

Solución.

Supongamos que el triángulo ABC cumple las condiciones pedidas. Sean N la intersección de BF con AC, M la intersección de EC con AB, e I el incentro. Veamos primero que el cuadrilátero $ARIL$ es un rombo. Tenemos que $\angle EFB = \angle ECB$ por subtender el mismo arco y que $\angle ACE = \angle ECB$, porque EC es bisectriz de $\angle ACB$. Entonces $\angle EFB = \angle ACE$, así que el cuadrilátero $LFCI$ es cíclico. Por otro lado, $\angle ALR = \angle FLC$ y $\angle FLC = \angle FIC$ (ambos subtienden a FC), de donde $\angle ALR = \angle FIC$. Análogamente tenemos que $\angle ARL = \angle EIB$. Como además $\angle FIC = \angle EIB$, entonces $\angle ALR = \angle ARL$, así que el triángulo ARL es isósceles y $AR = AL$. Por otro lado, $\angle ABF = \angle ACF$ por subtender el mismo arco, $\angle LIF = \angle LCF$ pues ambos subtienden a LF en el cuadrilátero cíclico $LFCI$. entonces $\angle LIF = \angle ABF$. Tenemos entonces que AB y LI son paralelas pues cortan con el mismo ángulo a BF. Análogamente, AC es paralela a RI y de aquí que $ARIL$ es paralelogramo, pero como tiene dos lados consecutivo iguales, $ARIL$ es un rombo. Ya con esto, podemos hacer la construcción de la siguiente manera:

Dado que tenemos el círculo y el arco BC constante, el ángulo $\angle BAC$ es constante. Entonces, el rombo $ARIL$, con una diagonal y el ángulo opuesto constante, es único. Analíticamente podemos obtener el valor de la otra diagonal:

$$AI = \frac{RL}{\tan\frac{\angle BAC}{2}}$$

Recordemos que el lugar geométrico de I cuando A recorre la circunferencia es un arco con centro en X (punto medio del arco BC) y radio $BX = XC$. Ahora, como A, I y X están alineados (los tres pertenecen a la bisectriz del ángulo $\angle BAC$), el lugar geométrico de A será un arco parecido al del lugar geométrico de I, pero de radio mayor, al radio anterior hay que aumentarle la distancia AI. Es decir, el lugar geométrico de A es justamente el arco con centro en X y radio $BX + AI$. La intersección del arco con el círculo será A. Puede haber 2 soluciones, una o ninguna; dependiendo si hay intersecciones tomando X en el arco menor de BC o en el mayor. Las dos intersecciones que se dan del arco de radio $BX + AI$ y el circuncírculo del triángulo ABC dan soluciones simétricas.

Autor:

OMAR ANTOLÍN CAMARENA.

Apareció en:

13ª OLIMPIADA NACIONAL, 1999.

Omar Antolín fue ganador de primer lugar en las 9ª, 10ª y 11ª Olimpiadas Nacionales, representando a Chihuahua. Participó en las Olimpiadas Internacionales de 1996 (India), 1997 (Argentina) ganando una medalla de bronce y 1998 (Taiwan) ganando una medalla de plata; y en la 11ª y la 12ª Olimpiadas Iberoamericanas (Costa Rica, 1996, y México, 1997, respectivamente) ganando en cada una medalla de plata. Ha colaborado con los comités estatales de Chihuahua y el Distrito Federal. Actualmente estudia la carrera de Matemáticas en la Facultad de Ciencias de la UNAM y es miembro del Comité Organizador de la OMM.

Problema.

Un polígono se dice que es ortogonal si todos sus lados tienen longitudes enteras y cada dos lados consecutivos son perpendiculares. Demostrar que si un polígono ortogonal puede cubrirse con rectángulos de 2×1 (sin que éstos se traslapen) entonces al menos uno de sus lados tiene longitud par.

Solución.

Tomamos un polígono ortogonal cualquiera y lo colocamos con sus lados sobre las líneas de una cuadrícula infinita. Pintamos la cuadrícula como tablero de ajedrez. Debemos probar que el polígono tiene al menos un lado par suponiendo que es posible llenarlo con rectángulos de 2×1. Probaremos algo un poco más fuerte: que si un polígono ortogonal de n lados tiene todos los lados impares, entonces no es posible que tenga el mismo número de cuadros blancos que negros y de hecho, probaremos que el número B de cuadros blancos y N, el número de cuadros negros

Autor:

OMAR ANTOLÍN CAMARENA.

Apareció en:

13ª OLIMPIADA NACIONAL, 1999.

Omar Antolín fue ganador de primer lugar en las 9ª, 10ª y 11ª Olimpiadas Nacionales, representando a Chihuahua. Participó en las Olimpiadas Internacionales de 1996 (India), 1997 (Argentina) ganando una medalla de bronce y 1998 (Taiwan) ganando una medalla de plata; y en la 11ª y la 12ª Olimpiadas Iberoamericanas (Costa Rica, 1996, y México, 1997, respectivamente) ganando en cada una medalla de plata. Ha colaborado con los comités estatales de Chihuahua y el Distrito Federal. Actualmente estudia la carrera de Matemáticas en la Facultad de Ciencias de la UNAM y es miembro del Comité Organizador de la OMM.

Problema.

Un polígono se dice que es ortogonal si todos sus lados tienen longitudes enteras y cada dos lados consecutivos son perpendiculares. Demostrar que si un polígono ortogonal puede cubrirse con rectángulos de 2×1 (sin que éstos se traslapen) entonces al menos uno de sus lados tiene longitud par.

Solución.

Tomamos un polígono ortogonal cualquiera y lo colocamos con sus lados sobre las líneas de una cuadrícula infinita. Pintamos la cuadrícula como tablero de ajedrez. Debemos probar que el polígono tiene al menos un lado par suponiendo que es posible llenarlo con rectángulos de 2×1. Probaremos algo un poco más fuerte: que si un polígono ortogonal de n lados tiene todos los lados impares, entonces no es posible que tenga el mismo número de cuadros blancos que negros y de hecho, probaremos que el número B de cuadros blancos y N, el número de cuadros negros cumplen $|N-B|=\frac{1}{4}n$.

Asignamos a cada cuadro negro del interior del polígono un 4 (1 por cada lado) y a cada cuadro blanco le asignamos un -4 (-1 por cada lado). La suma de los valores asignados a los cuadros es obviamente $4(N-B)$. Por otra parte, la contribución total de cada segmento del interior es 0: 1 por ser lado de un cuadro negro y -1 por ser lado de un cuadro blanco. Entonces, la suma de los valores asignados a los cuadros es igual a la suma de los valores asignados a los segmentos en la orilla del polígono. Pero si todos los lados tienen longitud impar, la suma de los valores de los segmentos en cada lado es siempre 1 o siempre -1. Por lo tanto, $4(N-B)=n$ o $-n$, es decir, $|N-B|=\frac{1}{4}n$.

Autor:

HUMBERTO CÁRDENAS TRIGOS.

Apareció en:

9ª OLIMPIADA EN MICHOACÁN, 1995.

Humberto Cárdenas es investigador de tiempo completo del Instituto de Matemáticas de la UNAM, campus Morelia.

Problema.

Los alumnos de un cierto curso están divididos en n equipos $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Llega un conjunto V de visitantes de otra escuela que se reúne con cada uno de los equipos para formar otros equipos $F_1, F_2, \ldots, F_n$ (es decir, $F_1 = V \cup E_1$, $F_2 = V \cup E_2$, $\ldots$, $F_n = V \cup E_n$). Se les va a aplicar un examen a todos (tanto a los del curso como a los visitantes). Según los resultados del examen se quiere premiar a menos de $\frac{n}{2}$ y de tal manera que en la mayoría de los F_i la cantidad elegida (en cada uno) sea par. Probar que, en este caso, el número de alumnos visitantes premiados será par.

Solución.

Sea P el conjunto de alumnos premiados. Queremos probar que $P \cap V$ tiene un número par de elementos. Supongamos que $P \cap V$ tiene un número impar de elementos y, sin pérdida de generalidad, supongamos que cada uno de $P \cap F_1$, $P \cap F_2$, $\ldots$, $P \cap F_k$ tiene una cantidad par de elementos, donde $k > \frac{n}{2}$. Entonces para cada $i = 1, \ldots, k$, los alumnos premiados de E_i son un número impar (pues ellos, junto con los de V deben formar una cantidad par). Pero entonces al menos habrá un premiado en cada E_i para $i = 1, \ldots, k$, es decir, el número de premiados será mayor o igual que k que es mayor que $\frac{n}{2}$, lo cual contradice la hipótesis.

Autor:

ENRIQUE ARMANDO CETINA CANUL.

Apareció en:

DE LA 10ª OLIMPIADA NACIONAL, 1996.

Enrique Cetina fue ganador de primer lugar en la 6ª Olimpiada Nacional, representando a Yucatán. Participó en la Olimpiada Internacional de 1993 (Turquía). Ha colaborado en concursos y entrenamientos en el estado de Yucatán. Estudió la carrera de Enseñanza de las Matemáticas en la Universidad de Yucatán.

Problema.

En una cuadrícula de $n \times n$ se escriben los números del 1 al n^2 en el orden habitual (de izquierda a derecha y de arriba a abajo, como se ilustra en la figura para el caso $n = 3$).

1	2	3
4	5	6
7	8	9

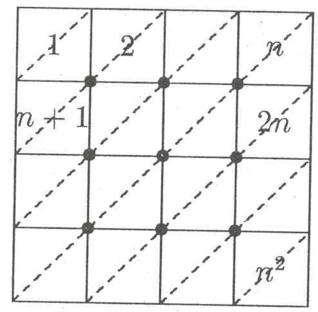
Llamamos *camino* en la cuadrícula a una sucesión de pasos de un cuadro a otro, desde el cuadro que tiene el número 1 hasta el que tiene el número n^2, de tal manera que en cada paso el movimiento sea hacia la derecha o hacia abajo. Si $\mathcal{C}$ es un camino, denotamos por $L(\mathcal{C})$ a la suma de los números por los que pasa el camino $\mathcal{C}$.

(i) Sea M la mayor $L(\mathcal{C})$ que se puede obtener de entre todos los caminos $\mathcal{C}$ en una cuadrícula fija de tamaño $n \times n$ y sea m la menor $L(\mathcal{C})$ (también de entre todos los caminos $\mathcal{C}$ en una cuadrícula fija de tamaño $n \times n$). Prueba que $M - m$ es un cubo perfecto.

(ii) Probar que en ninguna cuadrícula hay un camino $\mathcal{C}$ tal que $L(\mathcal{C}) = 1996$.

Solución.

Observemos primero que cada camino C cruza exactamente una vez cada una de las diagonales que se muestran en la figura.



El mínimo valor de un número en cada diagonal está arriba a la derecha y el máximo está abajo a la izquierda, así que m se logra con el camino que va todo a la derecha hasta terminar el primer renglón y después hacia abajo por la última columna, y M se logra con el camino que primero va hacia abajo recorriendo toda la primera columna y después hacia la derecha por el último renglón. Así

$$\begin{aligned} m =& 1+2+\cdots+n+2n+3n+\cdots+n^2, \quad \text{y} \\ M =& [1+(n+1)+(2n+1)\cdots+((n-1)n+1)] \\ &+[((n-1)n+2)+\cdots+n^2]. \end{aligned}$$

Además observemos que sobre las diagonales en cuadritos juntos, la diferencia es de $n-1$. Entonces $M-m=(n-1)^2(n-1)=(n-1)^3$ (pues en cada $\bullet$ en la cuadrícula hay una diferencia de $n-1$ y hay $(n-1)^2$ $\bullet$'s).

Ahora, si buscamos una n y un camino C en una cuadrícula de $n \times n$ que cumpla $L(C)=1996$, debemos tener $m \leq 1996 \leq M$. Pero $m=[1+2+\cdots+(n-1)]+[n+2n+3n+\cdots+n^2]=\frac{n(n-1)}{2}+n\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)+n^2=\frac{(n-1)n(n+1)}{2}+n^2$, y $M=m+(n-1)^3$, como vimos arriba; entonces de $m \leq 1996$ obtenemos $n \leq 15$ y de $M \geq 1996$ obtenemos $n \geq 12$.

- Para $n=15$ tenemos $m=\frac{16\cdot 15\cdot 14}{2}+15^2=1905<1996$,
- Para $n=16$ tenemos $m=\frac{17\cdot 16\cdot 15}{2}+16^2=2296>1996$,

• Para $n = 11$ tenemos $M = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{2} + 11^2 + 10^3 = 1781 < 1996$ y

• Para $n = 12$ tenemos $M = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{2} + 12^2 + 11^3 = 2333 > 1996$).

Entonces los posibles valores para n son 12, 13, 14 y 15.

Ahora recordemos que cualquier camino tiene diferencia un múltiplo de $n - 1$ con el mínimo, así que debemos tener que $1996 - m$ debe ser múltiplo de $n - 1$. Calculemos entonces en cada caso $1996 - m$:

• Si $n = 12$, entonces $m = 1002$ y $1996 - m = 994$ que no es múltiplo de 11.

• Si $n = 13$, entonces $m = 1261$ y $1996 - m = 735$ que no es múltiplo de 12.

• Si $n = 14$, entonces $m = 1561$ y $1996 - m = 435$ que no es múltiplo de 13.

• Si $n = 15$, entonces $m = 1905$ y $1996 - m = 91$ que no es múltiplo de 14.

De los cálculos anteriores concluimos que no es posible encontrar un camino $\mathcal{C}$ con $L(\mathcal{C}) = 1996$.

Autor:

DAVID COSSÍO RUIZ.

Apareció en:

10^a OLIMPIADA EN CHIHUAHUA Y MICHOACÁN, 1996.

David Cossío obtuvo el grado de Maestro en Matemáticas en la Universidad de Texas en El Paso. Ha trabajado para la Olimpiada de Matemáticas desde 1991 en el Estado de Chihuahua, en el cual es Delegado de la OMM desde 2001. Actualmente es profesor en la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez y en la Universidad de Texas en El Paso.

Problema.

El centro de la Ciudad de las Angustias tiene forma rectangular y está cuadriculado por 6 calles con sentido oriente-poniente numeradas del 1 al 7, y 6 calles con sentido norte-sur cuyos nombres son $A, B, \ldots, F$. En cada una de las cuatro esquinas que forma la calle A con las calles 1, 3, 5 y 7 había un policía. Cada uno hizo un recorrido de vigilancia hasta llegar a la calle F de tal manera que ninguno de los policías pasó por un lugar donde otro (incluyendose a sí mismo) había pasado y ninguno caminó sobre la calle F (sólo llegaron a ella). Demostrar que alguno de los policías recorrió 8 o menos cuadras.

Solución.

Suponiendo que todos recorrieron 9 cuadras por lo menos, tenemos que cada uno pasó por 10 esquinas o más; pero como no caminaron sobre la calle F, entonces cada uno pasó por 9 esquinas por lo menos hasta la calle E, así que entre todos cubrieron la vigilancia de 36 esquinas (al menos). Sin embargo, entre la calle A y la calle E hay sólo 35 esquinas en total, así que no es posible que todos hubieran recorrido 9 cuadras por lo menos.

Autor:

HOMERO DÍAZ MARÍN.

Apareció en:

13ª OLIMPIADA EN MICHOACÁN, 1999.

Homero Díaz fue ganador de primer lugar en la 9ª Olimpiada Nacional, representando a Michoacán. Ha colaborado en concursos y entrenamientos en el estado de Michoacán. Estudió la carrera de Matemáticas en la Universidad Michoacana y fue ganador del Premio Sotero Prieto en 2001. Actualmente estudia la maestría en Matemáticas en el la Universidad Michoacana.

Problema.

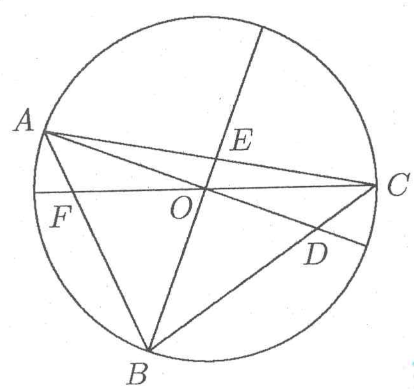
Un triángulo ABC está inscrito en una circunferencia de radio 1. El centro O de la circunferencia yace en el interior del triángulo.

(i) Probar que si P es el perímetro de $\triangle ABC$, entonces $P \geq 2$.

(ii) ¿Es cierto que $P \geq 4$?

Solución.

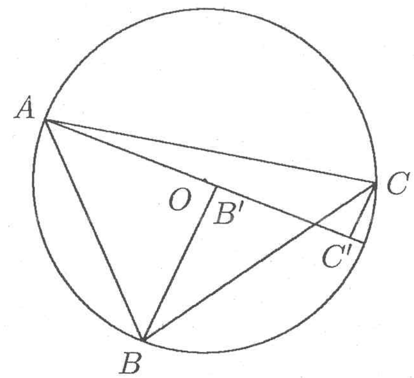
(i) Sea D el punto de intersección de la recta que pasa por A y por O. Sea E el punto de intersección de la recta que pasa por B y por O. Sea F el punto de intersección de la recta que pasa por C y por O (ver la figura).



Observamos entonces que $p = AC + CB + BA = (AC + CD) + (DB + BA) \geq AD + AD \geq AO + AO = 2$.

(ii) Veamos que es posible elegir un ángulo interno del triángulo de forma que el radio lo divida en dos ángulos menores iguales a 45^o. Si $\angle DAC < 45^o$ y $\angle DAB < 45^o$ ya habríamos terminado. Si alguno de esos ángulos fuera mayor a 45^o, digamos (sin pérdida de generalidad) el $\angle DAC$, entonces $\angle DOC > 90^o$, de donde $\angle AOC < 90^o$. De lo anterior tenemos que $\angle AOE < 90^o$ y $\angle COE < 90^o$ y con esto encontramos dos ángulos como los que buscábamos, ya que $\angle CBE < 45^o$ y $\angle ABE < 45^o$.

Supongamos que el ángulo elegido fue el $\angle CAB$. Encontremos el punto D igual que en el incisto uno, y llamemos B' y C' a los pies de las perpendiculares a la recta AD que pasan por B y C, respectivamente. Como $\angle DAC \leq 45^o$ y $\angle DAB \leq 45^{rmo}$ tenemos que $AB' > AO$ y $AC' > AO$, como se muestra en la figura.

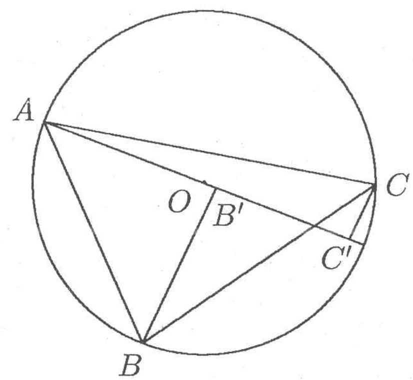


Ahora, $p = AC + CD + DB + BA \geq AC' + CC' + BB' + AB' \geq (AO + OC') + CC' + BB' + (AO + OB') \geq AO + (OC' + CC') + AO + (OB' + BB') \geq AO + OC + AO + OB = 4$

Observamos entonces que $p = AC + CB + BA = (AC + CD) + (DB + BA) \geq AD + AD \geq AO + AO = 2$.

(ii) Veamos que es posible elegir un ángulo interno del triángulo de forma que el radio lo divida en dos ángulos menores iguales a 45^o. Si $\angle DAC < 45^o$ y $\angle DAB < 45^o$ ya habríamos terminado. Si alguno de esos ángulos fuera mayor a 45^o, digamos (sin pérdida de generalidad) el $\angle DAC$, entonces $\angle DOC > 90^o$, de donde $\angle AOC < 90^o$. De lo anterior tenemos que $\angle AOE < 90^o$ y $\angle COE < 90^o$ y con esto encontramos dos ángulos como los que buscábamos, ya que $\angle CBE < 45^o$ y $\angle ABE < 45^o$.

Supongamos que el ángulo elegido fue el $\angle CAB$. Encontremos el punto D igual que en el incisto uno, y llamemos B' y C' a los pies de las perpendiculares a la recta AD que pasan por B y C, respectivamente. Como $\angle DAC \leq 45^o$ y $\angle DAB \leq 45^{rmo}$ tenemos que $AB' > AO$ y $AC' > AO$, como se muestra en la figura.



Ahora, $p = AC + CD + DB + BA \geq AC' + CC' + BB' + AB' \geq (AO + OC') + CC' + BB' + (AO + OB') \geq AO + (OC' + CC') + AO + (OB' + BB') \geq AO + OC + AO + OB = 4$

Autor:

EDUARDO DUÉÑEZ GUZMÁN.

Apareció en:

8ª OLIMPIADA NACIONAL, 1994.

Eduardo Duéñez fue ganador de primer lugar en la 2ª y la 3ª Olimpiada Nacional, representando a Jalisco. En 1990 participó en la Olimpiada Internacional (China) ganando una mención honorífica, y en la 5ª Olimpiada Iberoamericana (España) ganando una medalla de plata. Entre 1991 y 1996 colaboró en concursos y entrenamientos en los estados de Jalisco y Guanajuato, siendo Delegado de la OMM en este último durante 1995. Estudió la licenciatura en matemáticas en la Universidad de Guanajuato, y en 2001 obtuvo el grado de Doctor en Matemáticas en la Universidad de Princeton. Actualmente es profesor asistente en la Universidad John Hopkins en Baltimore.

Problema.

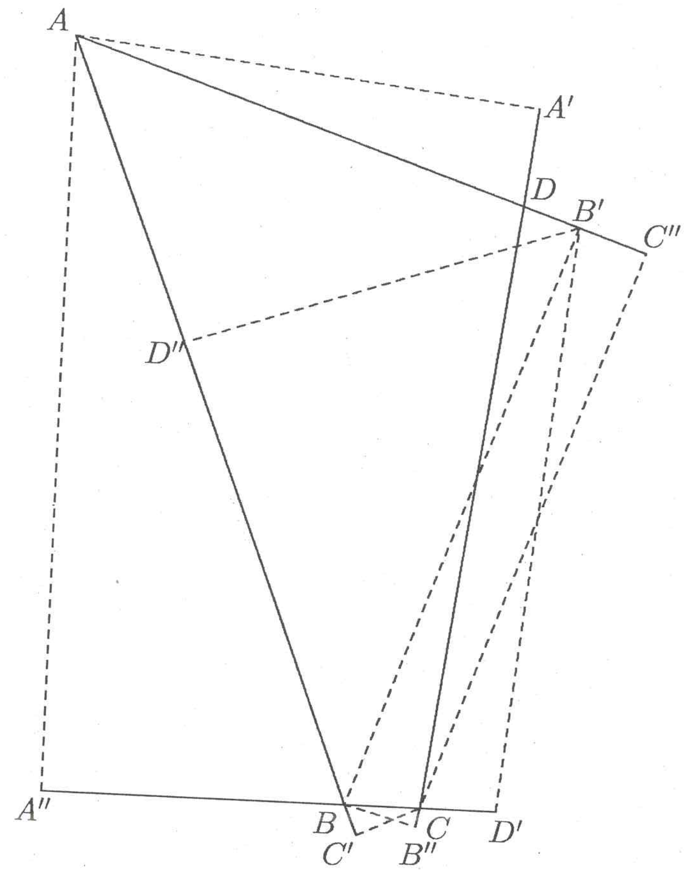
Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Cada uno de sus cuatro vértices se proyecta sobre los dos lados a los que no pertenece (posiblemente las proyecciones yacen no en el lado, sino en su prolongación). Así se obtienen los ocho puntos: A', A'', B', B'', C', C'', D', D''.

(a) Mostrar con un ejemplo que es posible que siete de los ocho puntos $A', \ldots, D''$ yazgan estrictamente en la prolongaciones (es decir, fuera) del lado respectivo del cuadrilátero.

(b) Demostrar que es imposible que los ocho puntos $A', \ldots, D''$ yazgan todos fuera del lado respectivo.

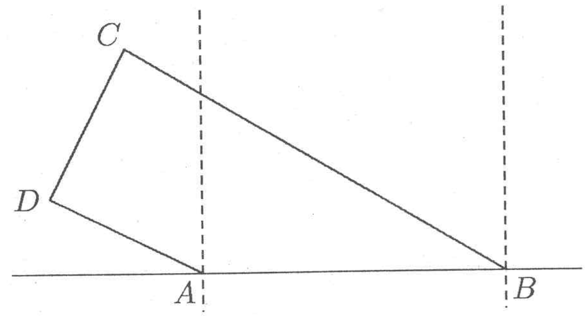
Solución.

(a) En la figura todas las proyecciones, excepto por D'', yacen estrictamente en la prolongación del lado respectivo.

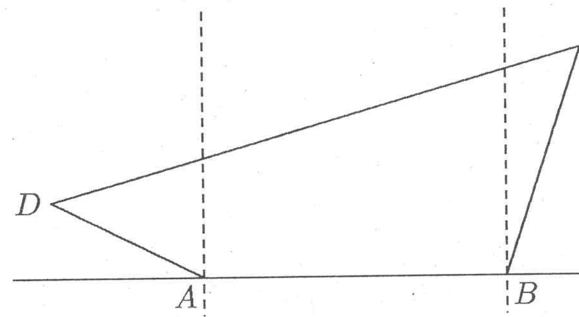


(b) Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el lado AB del cuadrilátero tiene longitud máxima entre todos los lados. Sean C', D'' las proyecciones de C, D sobre el lado AB. Vamos a demostrar que al menos uno de los puntos C', D'' yace sobre el segmento AB. Supóngase lo contrario, es decir, que C' y D'' yacen estrictamente fuera del segmento AB. Dividimos en dos casos:

(i) Si C' y D'' yacen del mismo lado del segmento AB. Sin pérdida de generalidad supóngase que yacen del lado de A. Entonces es claro que BC es más largo que AB, contradicción.



(ii) Si C' y D'' yacen en distintos lados de AB. Entonces claramente el lado CD es más largo que AB, contradicción.



Por tanto, al menos uno de C', D'' yace sobre el lado AB, concluyendo la prueba.

Autor:

SILVIA FERNÁNDEZ MERCHANT Y BERNARDO ÁBREGO LERMA.

Apareció en:

LISTA CORTA DE LA 12ª OLIMPIADA IBEROAMERICANA, 1997. GANÓ 1er LUGAR EN EL CONCURSO SIPROMA.

Silvia Fernández estudió la carrera de Matemáticas en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Ha colaborado con el Comité Organizador de la OMM, del cual formó parte en 1994.

Bernardo Ábrego fue ganador de primer lugar en la 4ª Olimpiada Nacional, representando al DF. En 1991 participó en la Olimpiada Internacional (Suecia) ganando una medalla de bronce y en la 6ª Olimpiada Iberoamericana (Argentina) ganando una medalla de oro. Ha colaborado con el Comité Organizador de la OMM, del cual formó parte en 1994. Estudió la carrera de Matemáticas en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Actualmente estudia el doctorado en la Universidad de Rutgers, EUA.

Problema.

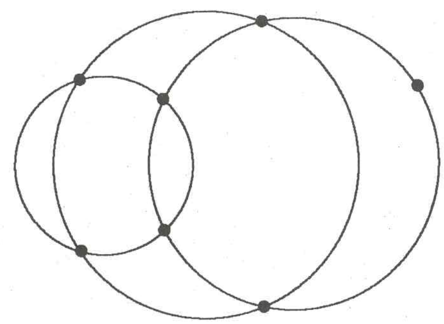
(a) Probar que no es posible encontrar un conjunto de 7 puntos en el plano de tal manera que haya 8 circunferencias, cada una de las cuales pase por (al menos) 4 puntos del conjunto.

(b) Encontrar un conjunto de 7 puntos en el plano para el cual existan 6 circunferencias de tal manera que cada una pase por 4 puntos del conjunto.

(c) ¿Es posible que un conjunto de 7 puntos en el plano determine 7 circunferencias, de manera que cada una de esas circunferencias pase por (al menos) 4 puntos del conjunto?

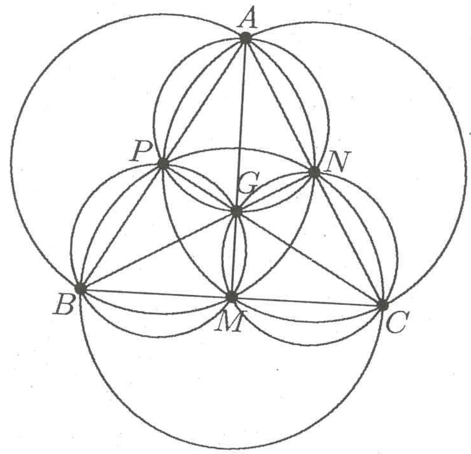
Solución.

(a) Recordemos que tres puntos determinan una circunferencia, así es que si en un conjunto de 7 puntos en el plano hay 5 concíclicos, entonces el máximo número de circunferencias que puede haber de tal manera que cada una tenga al menos 4 puntos del conjunto es 3, pues, hay sólo dos pares ajenos de puntos en esa circunferencia que, junto con los otros dos puntos (aparte de los 5), podrían determinar dos circunferencias más.



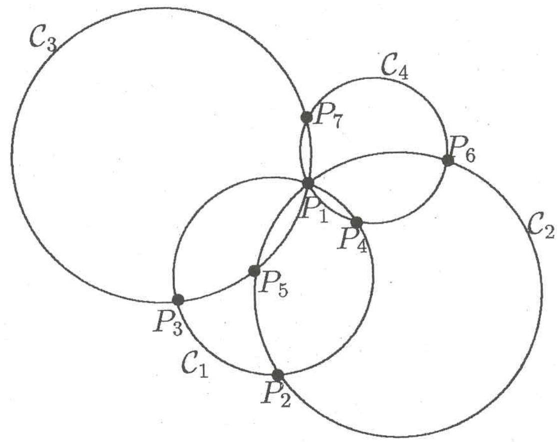
Supongamos entonces que tenemos un conjunto $\mathcal{P}$ de 7 puntos entre los cuales no hay 5 concíclicos, y supongamos también que hay un conjunto $\mathcal{C}$ de n circunferencias, cada una de las cuales pasa por 4 puntos del conjunto. Probaremos que $n \leq 7$. Si $P, Q \in \mathcal{P}$, denotemos por $c(P,Q)$ al número de circunferencias de $\mathcal{C}$ que pasan por P y Q. Sea S la suma de todos los $c(P,Q)$, con $P, Q \in \mathcal{P}$ (hay $\binom{7}{2}$ de ellos). Observemos que $c(P,Q) \leq 2$ para cualquier pareja (P,Q) de elementos de $\mathcal{P}$, pues sólo hay 7 puntos en $\mathcal{P}$ y tres puntos determinan una circunferencia (así es que circunferencias distintas por P y Q pasan por pares ajenos de los otros 5 puntos). Entonces tenemos que $S \leq 2\binom{7}{2} = 42$. Por otro lado, $S = \binom{4}{2}n$, ya que cada una de las n circunferencias se cuenta en S una vez por cada pareja de puntos por los cuales ella pasa. Combinando las dos fórmulas para S obtenidas, tenemos que $n \leq \frac{42}{\binom{4}{2}} = 7$.

(b) Consideremos el conjunto de 7 puntos formado por los vértices A, B, C de un triángulo equilátero, los puntos medios M, N, P de los lados y el centroide G, como se muestra en la figura.

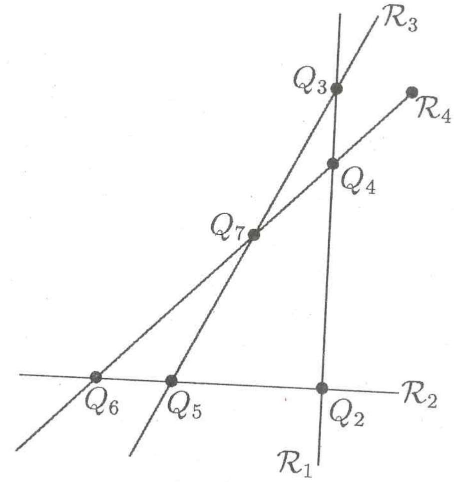


Por ser ΔABC equilátero, $GM \perp BC$, y lo mismo ocurre en cada uno de los lados, así es que las cuartetas siguientes son cíclicas: (G, M, C, N), (G, N, A, P) y (G, P, B, M). También, por ser un triángulo equilátero, $\angle NPB = 120^o$ y $\angle BCN = 60^o$, así es que en el trapecio $NPBC$ los ángulos opuestos suman 180^o, de donde éste es cíclico; lo mismo ocurre con los trapecios $PMCA$ y $NABM$, así es que, en total, los 7 puntos determinan 6 circunferencias.

(c) Probaremos que no existen 7 puntos en el plano de manera que haya 7 circunferencias, cada una de las cuales pase por 4 de los 7 puntos. Supongamos que sí y sea $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_7\}$ el conjunto de los 7 puntos. Observemos que, por el inciso (a), al verificarse la igualdad en $7\binom{4}{2} = S \leq 2\binom{7}{2} = 42$, por cada dos puntos de $\mathcal{P}$ deben pasar exactamente 2 circunferencias. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ las dos circunferencias que pasan por P_1 y P_2, y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ y $\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_5, P_6\}$. Sean $\mathcal{C}_3$ y $\mathcal{C}_4$ las dos circunferencias que pasan por P_1 y P_7. Entonces $\mathcal{C}_3$ tiene exactamente un punto más (aparte de P_1) en común con cada uno de $\mathcal{P} \cap \mathcal{C}_1$ y $\mathcal{P} \cap \mathcal{C}_2$, y lo mismo ocurre con $\mathcal{C}_4$. Sin pérdida de generalidad $\mathcal{C}_3 \cap \mathcal{P} = \{P_1, P_7, P_3, P_5\}$ y $\mathcal{C}_4 \cap \mathcal{P} = \{P_1, P_7, P_4, P_6\}$.



Hagamos ahora una inversión con centro en P_1 y cualquier radio, y llamemos Q_i el punto inverso de P_i, para $i = 2, \ldots, 7$. Bajo esta inversión, los círculos $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ y $\mathcal{C}_4$ se convierten en las rectas $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$ y $\mathcal{R}_4$, respectivamente. Notemos que todas estas rectas se intersectan entre sí y que no hay tres concurrentes, de manera que hay un punto, digamos Q_7, que cumple la propiedad de que en cada una de las dos rectas $\mathcal{R}_i$ en las que se encuentra hay puntos Q_j a ambos lados de él (esto se comprueba fácilmente considerando el triángulo que forman tres de las rectas y luego analizando las posibilidades de intersección de la cuarta recta con los interiores o exteriores de los lados del triángulo). Indicamos en la siguiente figura la posición relativa de las rectas.



Entonces sólo hay un punto que no está junto con Q_7 en una de las rectas: Q_2. Ahora consideremos los dos círculos que deben pasar por P_2 y P_7; como éstos no pasan por P_1, entonces en la figura invertida se convierten en círculos (no rectas) por Q_2 y Q_7 y otros dos puntos Q_i, cada uno. Como Q_2, Q_3 y Q_4 son colineales y lo mismo ocurre con Q_2, Q_5 y Q_6, uno de los círculos deberá tener a uno de Q_3 y Q_4 y el otro a uno de Q_5 y Q_6. Además Q_4, Q_6 y Q_7 están alineados, así es que Q_4 y Q_6 no pueden estar en el mismo círculo. Entonces la única posibilidad es que un círculo contenga a Q_2, Q_4, Q_5 y Q_7 y que el otro contenga a Q_2, Q_3, Q_6 y Q_7; pero Q_7 es interior en $\Delta Q_2Q_3Q_6$, así es que el último círculo es imposible, y con esto queda completa la demostración.

Autor:

HÉCTOR FLORES CANTÚ.

Apareció en:

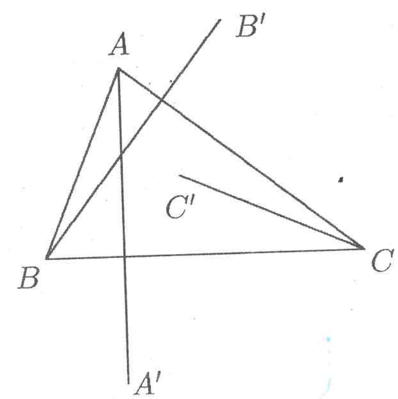
10ª OLIMPIADA NACIONAL, 1996.

Héctor Flores fue ganador de primer lugar en la 5ª Olimpiada Nacional, representando a Nuevo León. En 1992 participó en la Olimpiada Internacional (Rusia) y en la 7ª Olimpiada Iberoamericana (Venezuela) ganando una medalla de plata. Entre 1993 y 2001 ha sido entrenador de la olimpiada en los estados de Nuevo León y Guanajuato. Estudió la carrera de Matemáticas en la Universidad de Guanajuato. Actualmente es profesor en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas en la Universidad Autónoma de Nuevo León.

Problema.

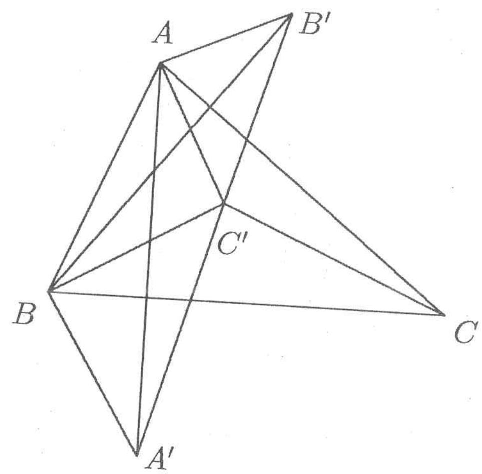
En la figura se muestra un triángulo acutángulo ABC en el que la longitud de AB es menor que la de BC y la longitud de BC es menor que la de AC. Los puntos A', B', y C' son tales que AA' es perpendicular a BC y la longitud de AA' es igual a la de BC; BB' es perpendicular a AC y la longitud de BB' es igual a la de AC; CC' es perpendicular a AB y la longitud de CC' es igual a la de AB. Además el ángulo $\angle AC'B$ es de 90°.

Demostrar que A', B' y C' están alineados.



Solución.

Observemos primero que $\angle ABB' = \angle C'CA$ puesto que ambos son complementarios de $\angle BAC$ (ya que CC' es perpendicular a AB y BB' es perpendicular a AC). Entonces los triángulos ABB' y $C'CA$ son iguales (por tener iguales dos lados y el ángulo comprendido entre ellos). Como dos lados correspondientes en estos triángulos son perpendiculares entre sí, entonces también lo es el tercero, es decir, $\angle B'AC' = 90^o$. Por la misma razón, los triángulos BCC' y $A'AB$ son iguales y $\angle C'BA' = 90^o$. Pero entonces $A'BC'$ y $C'AB'$ son triángulos rectángulos isósceles ($A'B = BC'$ y $C'A = AB'$), de donde sus ángulos no rectos son de 45^o. Así $\angle A'C'B' = \angle A'C'B + \angle BC'A + \angle AC'B' = 45^o + 90^o + 45^o = 180^o$, de donde A', C' y B' están alineados.



Autor:

JOSÉ FÉLIX GARCÍA GOITIA.

Apareció en:

2ª OLIMPIADA NACIONAL, 1988.

Félix García es profesor de tiempo completo en la Secundaria Técnica No. 1 de Durango. Ha colaborado desde hace varios años en la olimpiada en el estado de Durango, en el cual es actualmente Delegado de la OMM.

Problema.

Calcular el volumen del octaedro que circunscribe a una esfera de radio 1.

Solución.

El volumen V_o del octaedro es igual a la suma de los volúmenes V_p de 8 pirámides con base el triángulo equilátero de una de sus caras y altura 1. Sea a el lado de esos triángulos equiláteros. Así, si A_b es el área de una cara del octaedro, tenemos que $V_o = 8V_p = 8\left(\frac{A_b \cdot 1}{3}\right)$ y $A_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Usando el Teorema de Pitágoras dos veces, es fácil ver que $a = \sqrt{6}$, y sustituyendo encontramos que $A_b = \frac{6\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Así, $V_o = 4\sqrt{3}$.

Autor:

LUIS MIGUEL GARCÍA VELÁZQUEZ.

Apareció en:

14ª OLIMPIADA NACIONAL, 2000.

Luis Miguel García fue ganador de primer lugar en la 8 ª Olimpiada Nacional, representando a Michoacán. En 1995 participó en la Olimpiada Internacional (Canadá) y en la 10ª Olimpiada Iberoamericana (Chile) ganando una medalla de bronce. Desde 1996 ha colaborado en concursos estatales y entrenamientos en los estados de Jalisco y Michoacán. Estudió la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales en el ITESM Campus Guadalajara. Actualmente estudia la maestría en Matemáticas en la Universidad Michoacana y es miembro del Comité Organizador de la OMM.

Problema.

Se tiene un tablero de $n \times n$ pintado como tablero de ajedrez. Está permitido efectuar la siguiente operación en el tablero:

Escoger un rectángulo en la cuadrícula tal que las longitudes de sus lados sean ambas pares o ambas impares, pero que no sean las dos iguales a 1 al mismo tiempo, e invertir los colores de los cuadritos de ese rectángulo (es decir, los cuadritos del rectángulo que eran negros se convierten en blancos y los que eran blancos, se convierten en negros).

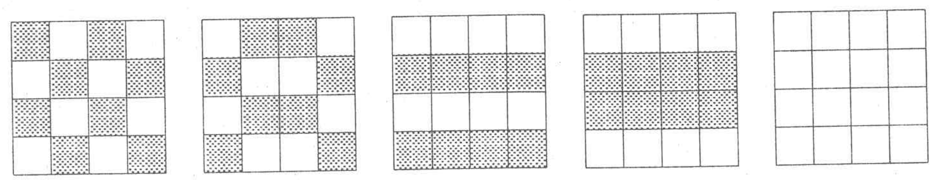
Encontrar para qué n's es posible lograr que todos los cuadritos queden de un mismo color después de haber efectuado la operación el número de veces que sea necesario. (Nota: Las dimensiones de los rectángulos que se escogen pueden ir cambiando.)

Solución.

Es claro que para $n = 2$ es imposible. Veamos que es posible para toda $n > 2$. Tomemos primero el caso n impar. Eligiendo los rectángulos de $1 \times n$ cambiemos el color de todos los renglones en posición impar. De esta manera todas las columnas en posición impar quedan blancas y todas las columnas en posición par quedan negras; entonces con rectángulos de $n \times 1$ cambiamos las columnas en posición par para lograr que todos los cuadros sean blancos.

Para ver el caso cuando $n = 2^a b$, donde $a \geq 1$ y b impar distinto de 1, subdividamos el tablero en tableros de $b \times b$ y hagamos en cada tablero de $b \times b$ las operaciones que indicamos en el caso n impar.

Nos falta analizar las potencias de 2. Por un argumento similar al que describimos en el caso anterior, basta analizar el caso $n = 4$, el cual indicamos en los siguientes dibujos, en los que, en cada paso, se ha escogido un rectángulo de 2×4 o de 4×2 para hacer la operación:



Autor:

JOSÉ ANTONIO GÓMEZ ORTEGA.

Apareció en:

LISTA CORTA DE LA 15ª OLIMPIADA IBEROAMERICANA, 2000.

José Antonio Gómez es profesor de tiempo completo en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Ha trabajado para la Olimpiada Mexicana de Matemáticas durante más de diez años. Fue presidente del Comité Organizador de la OMM de 1996 a 2000. Actualmente es miembro del Comité Organizador de la OMM.

Problema.

Nueve puntos, no tres de ellos colineales, se colorean con dos colores. Mostrar que hay tres de ellos con del mismo color y tales que el triángulo que determinan no contiene en su interior puntos de los nueve.

Solución.

De un color debe haber por lo menos cinco puntos, digamos que es rojo, y que el otro es azul. Consideremos el casco convexo $\mathcal{C}$ de los puntos rojos.

• Si $\mathcal{C}$ tiene 6 o más vértices, se puede dividir en por lo menos 4 triángulos, de modo que necesariamente hay uno vacío.

• Si $\mathcal{C}$ tiene 5 vértices, se puede dividir en tres triángulos. Si hay otro punto rojo, éste cae en alguno de los triángulos y, uniéndolo con los vértices de dicho triángulo, obtenemos (en total) 5 triángulos rojos ajenos y alguno debe estar vacío. Si no hay otro punto rojo, los cuatro puntos restantes son azules y por lo menos tres deben estar dentro del pentágono rojo (de lo contrario, uno de los tres triángulos rojos está vacío). Si sólo hay tres azules dentro del pentágono, ésos forman una triángulo vacío. Si los cuatro están dentro, con ellos podemos formar dos o tres triángulos azules vacíos ajenos, dependiendo de si son los vértices de un cuadrilátero convexo o no.

• Si $\mathcal{C}$ tiene4 vértices, se puede dividir en dos triángulos. Debe haber por lo menos otro punto rojo, éste está dentro de uno de los dos triángulos y, uniéndolo con los vértices de dicho triángulo, podemos obtener (en total) 4 triángulos rojos ajenos. Para que ninguno de ellos este vacío, los cuatro puntos restantes deben estar uno en cada uno de los cuatro triángulos. Si alguno de estos cuatro puntos restantes es rojo, tenemos triángulos rojos vacíos. Si los cuatro son azules, podemos, como arriba, formar dos o tres triángulos azules ajenos. El punto rojo del interior está dentro de a lo más uno de esos triángulos azules, de modo que habrá un triángulo azul vacío.

• Si $\mathcal{C}$ tiene 3 vértices, debe haber por lo menos otros dos puntos azules dentro del triángulo de esos tres. Podemos dividir el $\mathcal{C}$ en 5 triángulos usando como vértices esos cinco puntos azules. Uno de estos triángulos debe estar vacío.

Autor:

ALEJANDRO ILLANES MEJÍA.

Apareció en:

8ª OLIMPIADA IBEROAMERICANA, 1993.

Alejandro Illanes es investigador del Instituto de Matemáticas de la UNAM. Ha trabajado para la Olimpiada de Matemáticas desde sus inicios. Actualmente es miembro del Comité Organizador de la OMM.

Problema.

Dados P y Q dos puntos distintos del plano, sea $m(P,Q)$ la mediatriz del segmento PQ. Sea $\mathcal{S}$ un subconjunto finito del plano, con más de un elemento, tal que si P y Q son elementos de $\mathcal{S}$, entonces hay otro elemento de $\mathcal{S}$ en $m(P,Q)$, y tal que si las mediatrices de tres parejas de puntos de $\mathcal{S}$ se intersectan, entonces el punto de concurrencia no pertenece a $\mathcal{S}$. Determinar el número n de elementos que puede tener $\mathcal{S}$.

Solución.

Los valores $n = 3$ y $n = 5$ son posibles: En cada uno de estos casos tomemos el polígono regular con n lados. Entonces es claro que se satisfacen las condiciones, puesto que el punto de concurrencia de todas las mediatrices es el centro del polígono, el cual no pertenece a $\mathcal{S}$.

Ahora veamos que $n = 3$ y $n = 5$ son las únicas posibilidades. Sea n el número de elementos de un conjunto $\mathcal{S}$ que satisface las condiciones. Por hipótesis, $n \geq 2$. Obviamente $n \geq 3$ pues P y Q no pertenecen a $m(P,Q)$. Sea X el conjunto de parejas de $\mathcal{S}$. Entonces X tiene $\binom{n}{2}$ elementos. Consideremos una función $f : X \to \mathcal{S}$ que a cada $(P,Q) \in X$ le asigna un punto de $\mathcal{S}$ en $m(P,Q)$. En esa asignación cada punto de $\mathcal{S}$ es imagen de a lo más dos elementos de X, así que $\frac{1}{2}\binom{n}{2} \leq n$, de donde $n \leq 5$. Ahora ya sólo nos falta eliminar el caso $n = 4$. En éste caso hay 6 parejas de puntos, así que un punto A de $\mathcal{S}$ pertenece a dos mediatrices, que deben estar determinadas por dos segmentos con un punto en común (pues $\mathcal{S}$ sólo tiene 4 elementos y A, al pertenecer a las mediatrices de dos segmentos, no puede ser extremo de ninguno de ellos). Entonces, si las mediatrices son $m(B, C)$ y $m(B, D)$, en el triángulo BCD, A es el circuncentro, así que también pertenece a $m(C, D)$, lo cual contradice las condiciones de $\mathcal{S}$.

Autor:

JESÚS JERÓNIMO CASTRO.

Apareció en:

12ª OLIMPIADA NACIONAL, 1998.

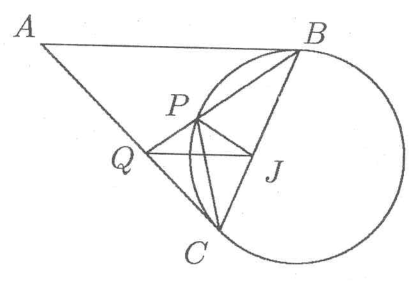
Jesús Jerónimo fue ganador de tercer lugar en la 4ª Olimpiada Nacional, representando al estado de Baja California. Desde 1994 ha trabajado como entrenador en la olimpiada de Baja California. Estudió la carrera de Ingenierio en Electrónica en la Universidad Autónoma de Baja California, y actualmente estudia la Maestría en Matemáticas en la Universidad de Guanajuato.

Problema.

Sean B y C dos puntos de una circunferencia y sea A un punto exterior tal que AB y AC son tangentes a la circunferencia. Sea Q un punto del segmento AC y sea P la intersección de BQ con la circunferencia. La paralela a AB por Q corta a BC en J. Demostrar que PJ es paralelo a AC si, y sólo si, $BC^2 = AC \cdot QC$.

Solución.

Como QJ es paralela a AB, tenemos que $\angle JQP = \angle QBA$ y $\angle QBA = \angle JCP$ porque subtienden el mismo arco en la circunferencia. Por lo tanto, $JPQC$ es un cuadrilátero cíclico.



Por otro lado, usando que los únicos trapecios cíclicos son los isósceles, tenemos la siguiente sucesión de equivalencias: $BC^2 = AC \cdot QC \Leftrightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{QC}{BC} \Leftrightarrow$ los triángulos BCA y QCB son semejantes (comparten $\angle C$) $\Leftrightarrow \angle PQC = \angle JCQ$ (ABC es isósceles) $\Leftrightarrow JPQC$ es un trapecio isósceles (porque $JPQC$ es cíclico) $\Leftrightarrow JP$ es paralelo a QC (otra vez, porque $JPQC$ es cíclico).

Autor:

JUAN JIMÉNEZ RÁMIREZ.

Apareció en:

12^{a} OLIMPIADA EN SAN LUIS POTOSÍ, 1998.

Juan Jiménez fue ganador de primer lugar en la 2^{a} Olimpiada Nacional representando al estado de San Luis Potosí. En 1989 participó en la Olimpiada Internacional (Alemania) y la 4^{a} Olimpiada Iberoamericana (Cuba).

Problema.

Demostrar que si p y q son números primos tales que $\frac{p^2+q^2}{p+q}$ es un entero, entonces $p = q$.

Solución.

Sean p y q números primos. Tenemos que $\frac{p^2+q^2}{p+q}$ es entero si y sólo si $\frac{p^2+q^2+2pq-2pq}{p+q} = \frac{(p+q)^2-2pq}{p+q}$ es entero, si y sólo si $\frac{2pq}{p+q}$ es entero. Luego, $p+q$ divide a $2pq$. Los divisores de $2pq$ son $1, 2, p, q, 2p, 2q, pq$ y $2pq$, así que tenemos los siguientes casos:

- $p+q = 1$ o 2 es imposible por ser p y q mayores que 1.
- $p+q = p$ o $p+q = q$ nos lleva a que uno de p o q es cero, lo cual es falso.
- $p+q = 2p$ o $p+q = 2q$ nos lleva a que $p = q$.
- $p+q = pq$ implica que $p = q(p-1)$ y, como p y q son primos, tenemos que $p = q = 2$.
- $p+q = 2pq$ implica $p = q(2p-1)$ y, como q es primo, llegamos a que $p = 1$, que es una contradicción.

En consecuencia, $p = q$.

Autor:

JUAN JIMÉNEZ RÁMIREZ.

Apareció en:

12ª OLIMPIADA EN SAN LUIS POTOSÍ, 1998.

Juan Jiménez fue ganador de primer lugar en la 2ª Olimpiada Nacional representando al estado de San Luis Potosí. En 1989 participó en la Olimpiada Internacional (Alemania) y la 4ª Olimpiada Iberoamericana (Cuba).

Problema.

Demostrar que si p y q son números primos tales que $\frac{p^2+q^2}{p+q}$ es un entero, entonces $p = q$.

Solución.

Sean p y q números primos. Tenemos que $\frac{p^2+q^2}{p+q}$ es entero si y sólo si $\frac{p^2+q^2+2pq-2pq}{p+q} = \frac{(p+q)^2-2pq}{p+q}$ es entero, si y sólo si $\frac{2pq}{p+q}$ es entero. Luego, $p+q$ divide a $2pq$. Los divisores de $2pq$ son $1, 2, p, q, 2p, 2q, pq$ y $2pq$, así que tenemos los siguientes casos:

- $p+q = 1$ o 2 es imposible por ser p y q mayores que 1.
- $p+q = p$ o $p+q = q$ nos lleva a que uno de p o q es cero, lo cual es falso.
- $p+q = 2p$ o $p+q = 2q$ nos lleva a que $p = q$.
- $p+q = pq$ implica que $p = q(p-1)$ y, como p y q son primos, tenemos que $p = q = 2$.
- $p+q = 2pq$ implica $p = q(2p-1)$ y, como q es primo, llegamos a que $p = 1$, que es una contradicción.

En consecuencia, $p = q$.

Autor:

RUBÉN JUÁREZ GARCÍA.

Apareció en:

13ª OLIMPIADA NACIONAL, 1999.

Rubén Juárez fue ganador de primer lugar en la 12ª Olimpiada Nacional, representando a Baja California. Ha colaborado en la olimpiada en los estados de Baja California y Guanajuato. Actualmente estudia la carrera de Matemáticas en la Universidad de Guanajuato.

Problema.

Demostrar que no hay 1999 primos en progresión aritmética todos ellos menores que 12 345.

Solución.

Supongamos que sí los hay, y sean p el primer primo y r la diferencia de la progresión. Así, la progresión es $p, p+r, p+2r, \ldots, p+1998r$. El primo p no puede ser ninguno de los primos: 2, 3, ..., 1997, pues si lo fuera, $p+pr$ sería un elemento de la progresión, pero éste no es primo. Luego, $p \geq 1999$. Por otro lado, como p es impar y $p+r$ es primo, entonces r es par. Todos los números pares son de la forma $6n$, $6n-2$ o $6n+2$. Pero r no puede ser de la forma $6n+2$ o $6n-2$. En efecto, como p es primo, éste es de la forma $6k+1$ o $6k-1$; en cualquiera de los dos casos, uno de los elementos de la progresión es múltiplo de 3:

$$p+r = (6k+1)+(6n+2)$$
$$p+2r = (6k+1)+2(6n-2)$$
$$p+2r = (6k-1)+2(6n+2)$$
$$p+r = (6k-1)+(6n-2).$$

Por lo tanto r es de la forma $6n$, es decir, la progresión es de la forma: $p, p+6n, \ldots, p+1998(6n)$. Pero $p \geq 1999$ y $n \geq 1$ implican que $p+1998(6n) \geq 1999+11988 > 12345$. Así los números $p+jr$ no pueden ser todos menores que 12 345.

Autor:

JORGE LUIS LÓPEZ LÓPEZ.

Apareció en:

10^{a} OLIMPIADA NACIONAL, 1996.

Jorge Luis López fue ganador de primer lugar en la 5^{a} Olimpiada Nacional, representando a Michoacán. Ha colaborado en los concursos y entrenamientos del Estado de Michoacán, en el cual fue Delegado de la OMM en 1996. Estudió la carrera de Matemáticas en la Universidad Michoacana y ganó el Premio Sotero Prieto en 1998 con su tesis de licenciatura. Actualmente estudia el doctorado en matemáticas en el Instituto de Física y Matemáticas de la Universidad Michoacana.

Problema.

¿Para qué enteros $n \geq 2$ se pueden acomodar los números del 1 al 16 en los cuadros de una cuadrícula de 4×4 (un número en cada cuadro, sin repetir números) de tal manera que las 8 sumas de los números que quedan en cada fila y en cada columna sean múltiplos de n, y que estos 8 múltiplos sean todos distintos entre sí?

Solución.

Supongamos que para cierta $n \geq 2$ sí es posible llenar la cuadrícula como se pide y veamos cómo debe ser n. La mínima suma posible por renglones o columnas es $10 (= 1+2+3+4)$ y la máxima suma posible es $58 (= 13+14+15+16)$. Se necesitan 8 múltiplos distintos de n pues hay 4 filas y 4 columnas, pero $\frac{58-10}{8} = 6$, así que $n \leq 6$ (por ejemplo, entre 10 y 58 no podemos encontrar 8 múltiplos distintos de 7 ya que entre 10 y 58 sólo hay 7 múltiplos de 7 que son: 14, 21, 28, 34, 42, 49 y 56).

Ahora observemos que la suma de todos los números del 1 al 16 es 136, así que este número también se obtiene sumando los 4 múltiplos de n que aparezcan por filas, de donde n no puede ser 3, 5 o 6 pues estos no son divisores de 136. Para ver que los casos $n = 2$ y $n = 4$ sí son posibles, consideremos, por ejemplo, los acomodos de las figuras, en donde el caso $n = 4$ se obtuvo del caso $n = 2$ intercambiando las posiciones de 4 y 6 y las de 12, 16 y 14 (estos últimos tres en forma cíclica).

					sumas
	1	2	3	4	10
	5	6	7	8	26
	9	10	11	12	42
	13	14	15	16	58
sumas	28	32	36	40	

$n = 2$

					sumas
	1	2	3	6	12
	5	4	7	8	24
	9	10	11	14	44
	13	16	15	12	56
sumas	28	32	36	40	

$n = 4$

Autor:

DAVID MARTÍNEZ RAMÍREZ.

Apareció en:

11ª OLIMPIADA NACIONAL, 1997.

David Martínez fue ganador de primer lugar en la 10ª Olimpiada Nacional, representando al DF. Estudiá la carrera de Matemáticas en la UNAM.

Problema.

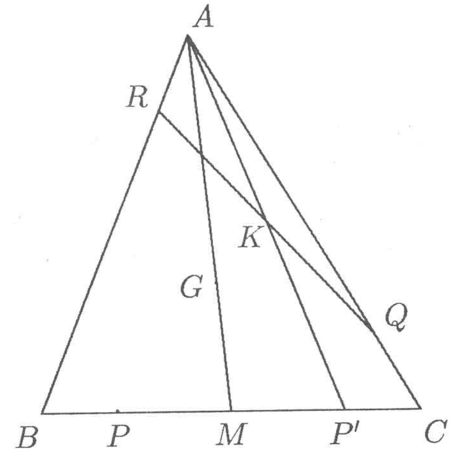
Dado un triángulo ABC se toman puntos P y P' en el segmento BC, Q en el segmento CA y R en el segmento AB de tal forma que

$$\frac{AR}{RB} = \frac{BP}{PC} = \frac{CQ}{QA} = \frac{CP'}{P'B}.$$

Sea G el centroide de ABC y sea K el punto de intersección de las rectas AP' y RQ. Demostrar que los puntos P, G y K son colineales.

Solución.

Usando el Teorema de Tales tenemos que $QP' \,||\, AB$, puesto que estos segmentos están cortados por las transversales CA y CB, y se tiene que $\frac{CQ}{QA} = \frac{CP'}{P'B}$. entonces los triángulos CQP' y CAB son semejantes con razón de semejanza $\frac{CQ}{QA}$; de aquí que $QP' = AR$. Tenemos entonces que los triángulos AKR y $P'KQ$ son iguales, de donde K es el punto medio de AP'. Sea M el punto medio de BC.



Aquí podemos proceder de dos maneras:

Primera forma. Notemos que M también es punto medio de PP' y, como $AG = 2GM$, entonces G también es centroide de APP', de donde la mediana PK pasa por G, y así P, G y K están alineados.

Segunda forma. Usemos el Teorema de Menelao en AMP' para deducir la colinealidad de P, G y K:

$$\frac{AG}{GM}\frac{MP}{PP'}\frac{P'K}{KA} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 = -1.$$

Autor:

HUMBERTO MONTALVÁN GÁMEZ.

Apareció en:

15ª OLIMPIADA EN PUEBLA, 2001.

Humberto Montalván fue ganador de primer lugar en la 14ª Olimpiada Nacional, representando a Puebla. Participó en la Olimpiada Internacional de 2001 (EUA), ganando una medalla de bronce. Actualmente estudia la carrera de Matemáticas en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla y forma parte del comité organizador de la olimpiada en Puebla.

Problema.

En una mesa están los primeros 2001 números impares mayores que 2001. Dos jugadores, A y B, toman alternadamente uno de estos números (comienza A). Cuando no hay más números, A y B calculan el producto de los números que tomaron y suman 1 al resultado. Gana el jugador que haya obtenido un número divisible entre la potencia de 2 más grande. Qué jugador puede asegurar que ganará?

Solución.

A tiene estrategia ganadora. Para ver esto, observemos primero que en la mesa hay 1001 números de la forma $4k+3$ (llamémoslos negros) y 1000 números de la forma $4k+1$ (llamémoslos blancos). Es claro que el producto de dos números blancos es blanco, que el producto de dos números negros es blanco y que el producto de un blanco y un negro es negro. Entonces, supongamos que A comienza tomando un número negro. En sus turnos siguientes, A imita lo que B acaba de hacer. Esto siempre es posible porque después de un turno de A queda un número par tanto de números negros como de blancos. Al final, A se queda con 501 números negros mientras que B se queda con 500. Por lo que se vio antes, el número de A es de la forma $4k$ y el de B es de la forma $4k+2$. Como el número de A es divisible entre 4 y el de B no, A gana.

Autor:

MIGUEL ÁNGEL MORENO NÚÑEZ.

Apareció en:

14ª OLIMPIADA EN SONORA, 2000.

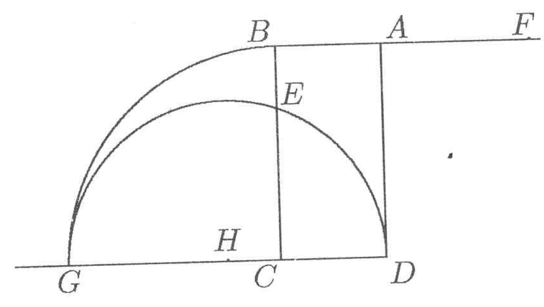
Miguel Ángel Moreno es profesor de tiempo completo de la Universidad de Sonora. Ha trabajado varios años en el comité estatal de Sonora, estado en el cual es Delegado de la OMM desde 1997.

Problema.

Dado el rectángulo $ABCD$, encontrar con regla y compás la posición del punto E sobre el segmento BC y la posición del punto F sobre la prolongación del segmento AB, de tal manera que $CE = AF$ y $(CE)(AF) = (AD)(DC)$.

Solución.

Para localizar E sobre BC, prolonguemos el segmento DC por el vértice C; con el compás localicemos G sobre la prolongación de DC de tal forma que $CG = CB$; obtengamos el punto medio H de DG; con centro en H construyamos una semicircunferencia con diámetro DG y sea E el punto de intersección con CB. Entonces $\angle DEG = \frac{\pi}{2}$, así que CEG y CDE son semejantes y de aquí que $\frac{CE}{CG} = \frac{CD}{CE}$ y así $(CE)^2 = (AD)(CD)$. Para localizar el punto F copiamos el segmento CE en la prolongación de AB.



Autor:

JESÚS MUCIÑO RAYMUNDO.

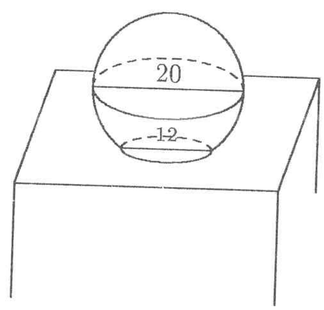
Apareció en:

10ª OLIMPIADA EN MICHOACÁN, 1996.

Jesús Muciño es investigador del Instituto de Matemáticas de la UNAM, campus Morelia.

Problema.

Una mesa tiene un hoyo circular de 12 cm de diámetro. Descansando en el hoyo se encuentra una esfera de 20 cm de diámetro. Si la mesa tiene 30 cm de altura, ¿cuántos centímetros de distancia hay desde el punto más alto de la esfera hasta el piso?



Solución. Tenemos un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es un radio de la esfera y uno de cuyos catetos es radio del agujero. Entonces el otro cateto de ese triángulo mide $\sqrt{10^2 - 6^2} = 8$. A este número hay que sumarle la altura de la mesa y otro radio de la esfera para obtener la distancia buscada: $8 + 10 + 30 = 48$.

Autor:

MARÍA LUISA PÉREZ SEGUÍ.

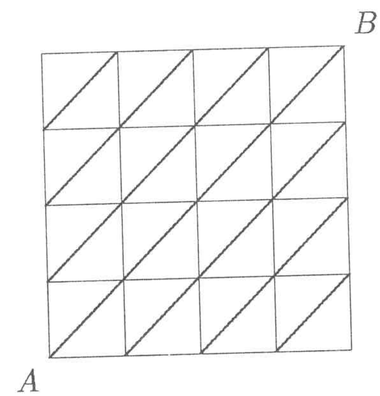
Apareció en:

5ª OLIMPIADA IBEROAMERICANA, 1990.

María Luisa Pérez es profesora-investigadora en la Universidad Michoacana. Ha trabajado para la Olimpiada desde 1988. Actualmente es presidenta del Comité Organizador de la OMM.

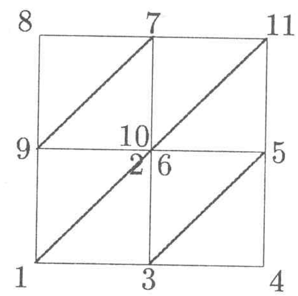
Problema.

En un campo hay caminos formando una cuadrícula de $n \times n$ ($n \geq 2$) con sus diagonales a 45° como se ilustra en la figura para $n = 4$. Un campesino sale del punto A caminando sobre el camino para llegar a B. Cada vez que recorre un lado de un triángulo deja caer una semilla sobre el (los) triángulo(s) del (de los) cual(es) ese lado es parte. Suponiendo que no puede caminar dos veces sobre el mismo lado de un triangulito, determinar para qué n's es posible describir un recorrido con el cual al final cada triangulito tenga exactamente dos semillas.

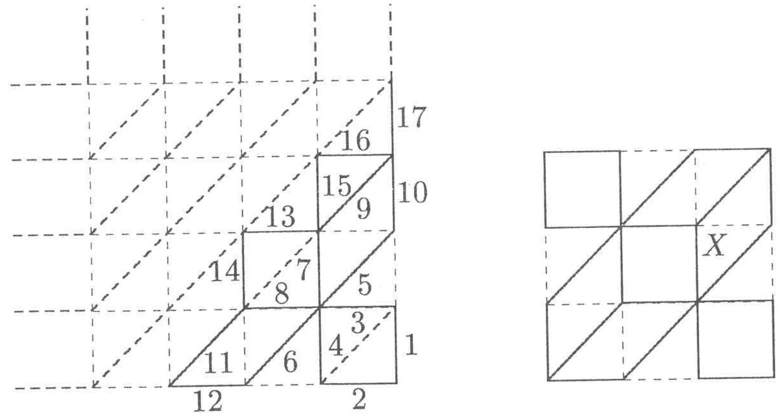


Solución.

El caso $n = 2$ sí es el posible. Un recorido que funciona en este se obtiene siguiendo la numeración en el dibujo



Veremos que éste es el único caso posible. Observemos que los caminos que dejan dos semillas en cada triángulo tienen dos características importantes: $(*)$ pasan por exactamente dos de los tres lados de cada triángulo y $(**)$ en cada vértice (excepto en A y en B) usan un número par de aristas (pues cada vez que se entra se tiene que salir). Veamos que para $n \geq 3$ no se pueden marcar aristas sobre la figura con estas dos propiedades. Empecemos suponiendo que $n \geq 4$ y que hay un camino que cumple las condiciones del problema. Entonces (por $(*)$) en el vértice inferior derecho deberán estar marcadas las dos aristas (1 y 2 en el dibujo) y así, por $(**)$, se completará el cuadradito (1234); otra vez por $(**)$ las aristas sobre los lados del cuadrado grande que están junto al cuadradito no pueden estar marcadas así que por $(*)$ sí estarán las otras que completan los triangulitos (5 y 6); con este mismo análisis vemos que están marcadas 7 y 8 (por $(**)$) y así también 9, 10, 11 y 12 por $(*)$. También por $(*)$ están marcadas 13 y 14. Por $(**)$, 15 está marcada, y por $(*)$, también 16 y 17, pero esto nos lleva a una contradicción con $(**)$ en el triángulo 9, 15 y 16. El caso $n = 3$ se puede analizar de la misma manera, usando el argumento también el vértice superior izquierdo (por simetría). La contradicción en este caso la obtenemos en el vértice marcado con X en la figura, pues a él concurren tres aristas.



Autor:

JUAN CARLOS PICENO RIVERA.

Apareció en:

10ª OLIMPIADA NACIONAL, 1996.

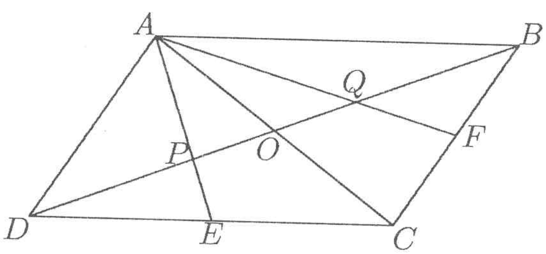
Juan Carlos Piceno es profesor de tiempo completo de la Universidad de Puebla. Ha trabajado en el comité estatal de Puebla, en el cual fue Delegado de la OMM durante más de cinco años.

Problema.

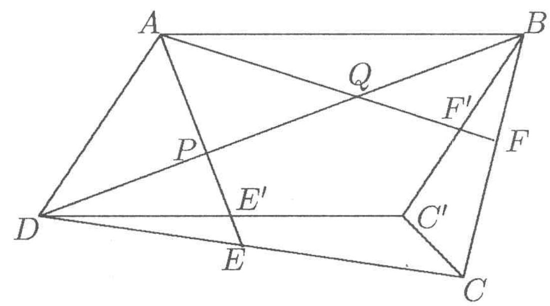
Sea $ABCD$ un cuadrilátero y sean P y Q los puntos de trisección de la diagonal BD (es decir, P y Q son los puntos del segmento BD para los cuales las longitudes BP, PQ y QD son todas iguales). Sea E la intersección de la recta que pasa por A y P con el segmento BC y sea F la intersección de la recta que pasa por A y Q con el segmento DC. Demostrar que $ABCD$ es paralelogramo si, y sólo si, E y F son los respectivos puntos medios de los segmentos BC y CD.

Solución.

Supongamos primero que $ABCD$ es paralelogramo y sea O la intersección de las diagonales; entonces O es punto medio de AC y de BD (pues los triángulos AOD y COB son iguales por tener sus ángulos iguales y puesto que $AD = BC$). Entonces BO es mediana del triángulo ABC. Pero P divide a esta mediana en proporción 2:1, así que P es baricentro del triángulo, de donde AP es mediana y E es punto medio de BC. Por la misma razón F es punto medio de CD.



Ahora supongamos que E y F son los puntos medios de BC y CD, respectivamente, pero que $ABCD$ no es paralelogramo. Sea C' el punto tal que $ABC'D$ es paralelogramo y sean E' y F' los respectivos puntos de intersección de AP con BC' y de AQ con DC', como se muestra en la figura.



Por el inciso anterior, E' es punto medio de BC', así que los triángulos $BC'C$ y $BE'E$ son semejantes en proporción 2:1 (tienen dos lados en esta razón y el ángulo comprendido entre ellos es el mismo); entonces tenemos que $E'E$ y $C'C$ son paralelas. Análogamente, $F'F$ y $C'C$ son paralelas. Combinando tenemos que $E'E \,||\, F'F$; pero estas dos rectas se intersectan en A así que no pueden ser paralelas, contradiciendo la suposición que hicimos de que $ABCD$ no era paralelogramo.

Autor:

GERARDO RAGGI CÁRDENAS Y HUMBERTO CÁRDENAS TRIGOS.

Apareció en:

12ª OLIMPIADA IBEROAMERICANA, 1997.
GANÓ 2° LUGAR EN EL CONCURSO SIPROMA.

Gerardo Raggi y Humberto Cárdenas son investigadores de tiempo completo en el Instituto de Matemáticas de la UNAM, campus Morelia.

Problema.

En la función polinomial $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ en $2n$ variables $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ los valores que pueden tomar las variables son únicamente 0 o 1. Sea I el número de $2n$-adas $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ para las cuales el polinomio toma valor impar y sea P el número de $2n$-adas $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ para las cuales el polinomio toma valor par. Probar que $\frac{P}{I} = \frac{2^n+1}{2^n-1}$.

Solución.

Para que la suma sea par, un número par de $x_i y_i$ debe ser 1 y los demás deben ser 0. Para i fija, hay sólo una posibilidad de que $x_i y_i$ sea 1 y tres posibilidades de que sea 0. Si $k = 1, \ldots, n$, las posibilidades de que haya k monomios $x_i y_i$ iguales a 0 es $\binom{n}{k} 3^k$. Así

$$I = \binom{n}{n-1} 3^{n-1} + \binom{n}{n-3} 3^{n-3} + \ldots . \quad \text{y}$$

$$P = \binom{n}{n} 3^n + \binom{n}{n-2} 3^{n-2} + \ldots .$$

Entonces $P + I = (3+1)^n = 2^{2n}$ y $P - I = (3-1)^n = 2^n$. Resolviendo tenemos que $I = \frac{2^{2n}-2^n}{2} = \frac{2^n(2^n-1)}{2}$ y $P = \frac{2^{2n}+2^n}{2} = \frac{2^n(2^n+1)}{2}$, y de aquí que $\frac{P}{I} = \frac{2^n+1}{2^n-1}$.

Autor:

MIGUEL RAGGI PÉREZ.

Apareció en:

14ª OLIMPIADA EN MICHOACÁN, 2000.

Miguel Raggi fue ganador de primer lugar en las 13ª y 14ª Olimpiadas Nacionales, representando a Michoacán. En 2001 participó en la Olimpiada Internacional (Estados Unidos) ganando una mención honorífica y en la 16ª Olimpiada Iberoamericana (Uruguay) ganando una medalla de plata. Participó también en la Olimpiada Centroamericana y del Caribe de 2000 en El Salvador, ganando una medalla de plata. Actualmente estudia la preparatoria.

Problema.

En una hoja de papel cuadriculado cada cuadrito mide 1×1. Se coloca una moneda encima. ¿Cuál es el máximo número de cuadritos que puede cubrir parcialmente (de manera que la región cubierta en ese cuadrito tenga área mayor que 0) una moneda de diámetro $\sqrt{2}$?

Solución.

La respuesta es 7. Para probar esto, observemos que $\sqrt{2} < 2$, así que la moneda toca a lo más 3 cuadros horizontales y 3 verticales. Entonces el problema se reduce a considerar una cuadrícula de 3×3. Si la moneda cubre un pedazo de algún cuadro de la esquina, entonces no cubre el de la esquina contraria porque la mínima distancia entre las dos esquinas opuestas es $\sqrt{2}$ (la diagonal del cuadrado). Son 4 esquinas, entonces hasta ahora hemos visto que a lo más la moneda cubre 7 cuadritos. Ahora veamos que sí es posible cubrir 7 cuadritos. Para esto, observemos que si colocamos la moneda circunscribiendo el cuadro central, entonces cubrirá (parcialmente) 5 cuadros; la recorremos hacia arriba un poco (menos de $\frac{\sqrt{2}}{2}$) para lograr que cubra todos los cuadros salvo las esquinas inferiores.

Autor:

GILBERTO REYNOSO MEZA.

Apareció en:

14ª OLIMPIADA EN QUÉRETARO, 2000.

Gilberto Reynoso obtuvo segundo lugar en la 9ª y la 10ª Olimpiadas Nacionales, representando al estado de Michoacán. Estudia la carrera de Ingeniero Mecánico Administrador en el ITESM, campus Querétaro. Desde 1998 ha trabajado para la olimpiada en el estado de Querétaro, en el cual es Delegado de la OMM a partir de 2001.

Problema.

En su última trasmisión el agente Kobra envió los datos necesarios para encontrar la clave de acceso a una computadora. El mensaje fue: "La clave de acceso es el número N que cumple con la propiedad de que la suma de N con sus primeros k consecutivos y sus primeros k antecesores es 2000. Además, N es un número tal que la suma de sus cifras es un número impar". ¿Cúal es la clave de acceso de la computadora?

Solución.

Sea N el número que buscamos. Tenemos que los k primeros números consecutivos son: $(N+1), (N+2), \ldots, (N+k)$ y los primeros k antecesores son $(N-1), (N-2), \ldots, (N-k)$. Factorizando y eliminando términos obtenemos: $(2k+1)N = 2000$. Esto nos dice que debemos expresar 2000 como el producto de un número impar con N. Observemos que $2000 = 2^4 \times 5^3$, por lo que el término impar debe ser 5, 25 o 125.

- Si $2k+1 = 5$, entonces $N = 400$
- Si $2k+1 = 25$, entonces $N = 80$
- Si $2k+1 = 125$, entonces $N = 16$

Así, el único valor de N que cumple la propiedad de que la suma de sus cifras es un número impar es 16.

Autor:

HUGO ALBERTO RINCÓN MEJÍA.

Apareció en:

3ª OLIMPIADA NACIONAL, 1989.

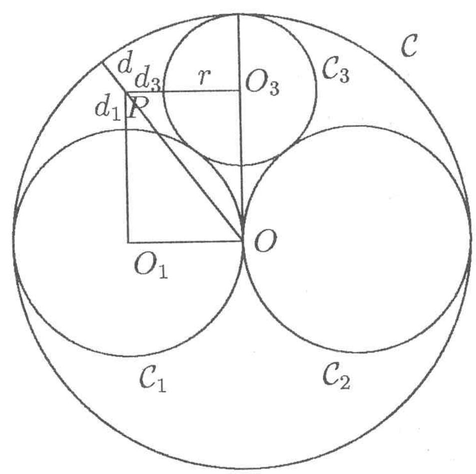
Hugo Rincón es profesor de tiempo completo en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Fue miembro del Comité Organizador de la OMM en 1989.

Problema.

Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos círculos tangentes y de radio 1 dentro de un círculo $\mathcal{C}$ de radio 2. Sea $\mathcal{C}_3$ un círculo dentro de $\mathcal{C}$ tangente a cada uno de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$. Sea $\mathcal{C}_4$ un círculo dentro de $\mathcal{C}$ tangente a $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$, y $\mathcal{C}_3$. Demostrar que los centros de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_3$ y $\mathcal{C}_4$ son los vértices de un rectángulo.

Solución.

Sean O, O_1 y O_3 los centros de las circunferencias $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_3$, respectivamente. Es claro, por simetría, que OO_3 es perpendicular a OO_1.



Sea P el punto que completa el rectángulo con O, O_1 y O_3. Probaremos que las distancias de P a $\mathcal{C}$, a $\mathcal{C}_1$ y a $\mathcal{C}_3$ son iguales, con lo cual quedará establecido que P es el centro de $\mathcal{C}_4$, y así, lo que queríamos probar. Llamemos d, d_1 y d_3 a las distancias respectivas de P a $\mathcal{C}$, a $\mathcal{C}_1$ y a $\mathcal{C}_3$. Sea r el radio de $\mathcal{C}_3$. Tenemos que

$$(1) \quad 1 + d_1 = PO_1 = OO_3 = 2 - r,$$

$$(2) \quad r + d_3 = PO_3 = OO_1 = 1,$$

$$(3) \quad 2 - d = OP = O_1O_3 = 1 + r.$$

Despejando r en todas ellas e igualando tenemos que $1 - d_1 = 1 - d_3 = 1 - d$, de donde $d = d_1 = d_3$.

Autor:

EDUARDO RIVERA CAMPO.

Apareció en:

11ª OLIMPIADA EN EL DISTRITO FEDERAL, 1997.

Eduardo Rivera es profesor en la UAM, Iztapalapa. Fue miembro del Comité Organizador de la OMM en 1990, 1991 y 1996.

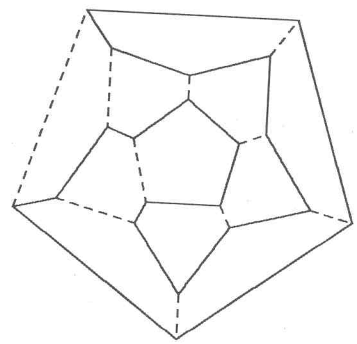
Problema.

Una hormiga camina sobre las aristas de un dodecaedro. (a) Probar que la hormiga puede hacer un recorrido que pase por todos los vértices una y sólo una vez. (b) Mostrar que en un recorrido de la forma anterior, la hormiga debe recorrer en forma consecutiva cuatro aristas de alguna cara.

Solución.

Recordemos que un dodecaedro tiene 12 caras, cada una de las cuales es un pentágono; además a cada vértice llegan exactamente tres aristas. Entonces el número de vértices es $\frac{12\times5}{3} = 20$. Un camino que pase por todos los vértices exactamente una vez debe usar 20 aristas (una por cada vértice). Supongamos que en cada cara se utilizan a lo más tres aristas; pero entonces, puesto que son 12 caras y cada arista pertenece a 2 caras exactamente el número total de aristas usadas será a lo más $\frac{12\times3}{2} = 18$, lo cual contradice el hecho de que deben usarse 20 aristas; con esto hemos probado que el camino utiliza por lo menos 4 aristas de alguna cara; pero entonces es claro que deben ser consecutivas por lo siguiente: Cada vez que el camino llega a un vértice, debe salir, y como a cada vértice llegan 3 aristas, una queda sin usar, de manera que si 4 aristas de una cara se usaron, esto debe haber sido en forma consecutiva (porque una vez que se sale de un vértice ya no se puede volver a entrar).

Para construir el camino nos podemos apoyar en el resultado recién obtenido. Indicamos un camino en el esquema en el que se ha aplanado el dodecaedro (una cara es el pentágono más grande; quedaría por atrás al desaplanarlo).



Autor:

JESÚS RODRÍGUEZ VIORATO.

Apareció en:

14^{a} OLIMPIADA EN GUANAJUATO, 2000.

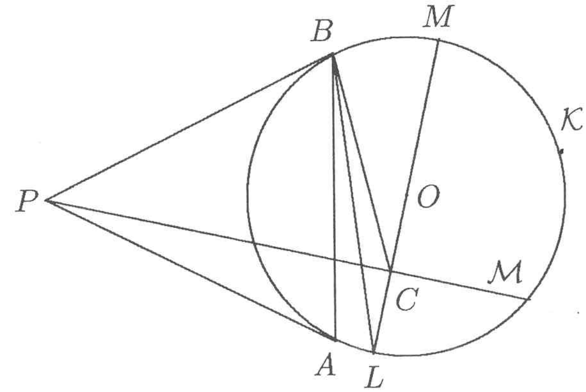
Jesús Rodríguez fue ganador de primer lugar en la 10^{a} Olimpiada Nacional, representando a Baja California. En 1997 participó en la Olimpiada Internacional (Argentina) ganando una medalla de bronce y en la 12^{a} Olimpiada Iberoamericana (México) ganando una medalla de oro. Ha colaborado en concursos y entrenamientos en los estados de Baja California y Guanajuato. Actualmente estudia la carrera de Matemáticas en la Universidad de Guanajuato.

Problema.

Sea P un punto fuera de una circunferencia $\mathcal{K}$. Sean A y B los puntos distintos en los que las tangentes desde P tocan a $\mathcal{K}$. Sean $\mathcal{M}$ una secante a $\mathcal{K}$ que pase por P y C el pie de la perpendicular a $\mathcal{M}$ desde el centro O de $\mathcal{K}$. La recta OC corta a $\mathcal{K}$ en L y M, con L más cercano a A. Probar que BL es bisectriz de $\angle ABC$.

Solución.

Observemos que $\angle OCP = \angle OAP = \angle OBP = \frac{\pi}{2}$, por lo que $APBCO$ es cíclico. Así $\angle ABC = \angle AOC = \angle AOL$. Ahora, $\angle ABL = \frac{\angle AOL}{2}$ ya que $\angle ABL$ es ángulo inscrito y abarca el mismo ángulo que el arco central $\angle AOL$. Entonces $\angle ABL = \frac{\angle ABC}{2}$.



Autor:

CARLOS JACOB RUBIO BARRIOS.

Apareció en:

13ª OLIMPIADA EN SAN LUIS POTOSÍ, 1999.

Carlos Jacob Rubio obtuvó el grado de Maestro en Matemáticas en la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, donde actualmente estudia el doctorado. Desde 1997 ha colaborado con el comité estatal de San Luis Potosí, estado en el cual es Delegado de la OMM desde 2000.

Problema.

Demostrar que existe un número entero de la forma

$$999991999991999991\ldots999991$$

que es divisible por 1999.

Solución.

Sea $N = 999991999991999991\ldots999991$ (n veces 999991). Entonces

$$N = 999991\left(1 + 10^6 + 10^{12} + \cdots + 10^{6(n-1)}\right)$$

para algún entero positivo n. Luego, queremos que $N \equiv 0 \pmod{1999}$ o, equivalentemente,

$$999991 \cdot \frac{(10^6)^n - 1}{10^6 - 1} \equiv 0 \pmod{1999}.$$

Ahora bien, como $\text{m.c.d.}(1999, 10^6 - 1) = 1$, entonces debemos tener que $10^{6n} - 1 \equiv 0 \pmod{1999}$. Como 1999 es primo y m.c.d.(10,1999)=1, entonces según el Pequeño Teorema de Fermat, $10^{1998} \equiv 1 \pmod{1999}$, o bien, $10^{6\cdot 333} - 1 \equiv 0 \pmod{1999}$. Luego, el número

$$999991999991999991\ldots999991$$

en el que se repiten 333 veces 999991 es divisible por 1999.

Autor:

PEDRO DAVID SÁNCHEZ SALAZAR.

Apareció en:

14ª OLIMPIADA EN YUCATÁN, 2000.

Pedro Sánchez fue ganador de primer lugar en la 8ª y la 9ª Olimpiadas Nacionales, representando a Yucatán. Participó en las Olimpiadas Internacionales de 1995 (Canadá) y 1996 (India). Desde 1996 ha colaborado con la olimpiada en el estado de Yucatán como entrenador. Actualmente estudia la carrera de Matemáticas en la Universidad Autónoma de Yucatán.

Problema.

En la Joyería Factorial hubo un robo y los sopechosos son los dos empleados: Combinado y Permutado. Ellos son los únicos que conocen la combinación de la caja, que consta de 3 números naturales. El inspector Truquini le hace una pregunta a cada uno, sabiendo que uno de ellos dice la verdad y el otro miente. La pregunta es ¿Quién robó el banco?, y las respuestas son:

– Combinado: Yo no fui

– Permutado: Si al tercer número le resto el segundo obtengo lo mismo que si al segundo le resto el primero. Además, su producto es 2001.

¿Quién robó la joyería?

Solución.

Supongamos que Combinado dice la verdad, entoncés el culpable fue Permutado. Si Combinado mintiera, Permutado diría la verdad, eso significa que hay 3 naturales en progresión aritmética cuyo producto es 2001, pero al factorizar 2001 vemos que eso es imposible, así que Permutado está mintiendo y él es el culpable.

Autor:

CARMEN SOSA GARZA.

Apareció en:

14ª OLIMPIADA EN QUERÉTARO, 2000.

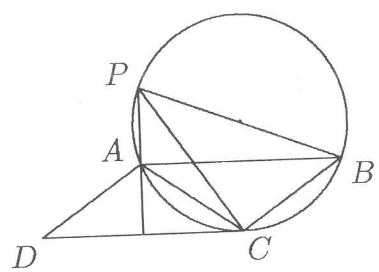
Carmen Sosa es profesora de tiempo completo en la Universidad Autónoma de Querétaro. Ha colaborado durante varios años con el comité estatal de Querétaro, estado en el cual fue Delegada de la OMM en 1999 y 2000.

Problema.

(a) Sean A, B, C y D los vértices de un paralelogramo tal que AB es paralelo a CD y BC es paralelo a DA. Demostrar que el punto diametralmente opuesto al vértice B de la circunferencia circunscrita del triángulo ABC es el ortocentro del triángulo ACD.

(b) ¿Qué ocurre cuando $ABCD$ es un rectángulo?

Solución.



(a) Sea $\mathcal{C}$ el circuncírculo de ABC y sea P el punto en $\mathcal{C}$ diametralmente opuesto a B. Como PB es diámetro, $\angle PAB = \frac{\pi}{2}$. Dado que $AB \,||\, DC$, $PA \perp DC$, AP está contenido en la altura por A del triángulo ADC. Análogamente CP está contenido en la altura por C de ADC. Como P pertenenece a ambas alturas o a las prolongaciones de las alturas y éstas son iguales, P es el ortocentro de ADC.

(b) Si $ABCD$ es un rectángulo entonces $P = D$ y la circunferencia circunscrita a ABC es la circunferencia con diámetro DB.

Autor:

ROBERTO TORRES HERNÁNDEZ.

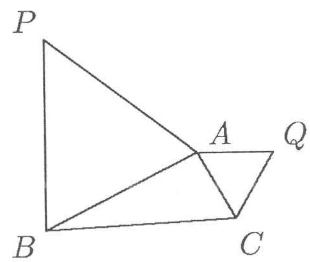
Apareció en:

10ª OLIMPIADA EN QUERÉTARO, 1995.

Roberto Torres es profesor de la Universidad Autónoma de Querétaro. Ha colaborado en el comité estatal de la olimpiada en Querétaro, estado en el cual fue Delegado de la OMM de 1995 a 1997.

Problema.

Sobre los lados AB y AC de un triángulo ABC se construyen externamente los triángulos equiláteros ABP y ACQ (ver figura). Probar que CP y BQ tienen la misma longitud.



Solución.

Probaremos que los triángulos $\triangle ABQ$ y $\triangle APC$ son iguales. Para ello observemos que su ángulo en A coincide pues $\angle BAQ = \angle BAC + 60^o = \angle PAC$. Además los lados que abarcan este ángulo son iguales en los dos triángulos, $AB = AP$ y $AQ = AC$, así que queda probada la igualdad de los triángulos y, en consecuencia el tercer lado también es igual ($PC = BQ$), como queríamos probar.

Autor:

ROBERTO TORRES HERNÁNDEZ.

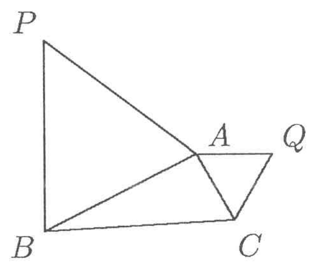
Apareció en:

10ª OLIMPIADA EN QUERÉTARO, 1995.

Roberto Torres es profesor de la Universidad Autónoma de Querétaro. Ha colaborado en el comité estatal de la olimpiada en Querétaro, estado en el cual fue Delegado de la OMM de 1995 a 1997.

Problema.

Sobre los lados AB y AC de un triángulo ABC se construyen externamente los triángulos equiláteros ABP y ACQ (ver figura). Probar que CP y BQ tienen la misma longitud.



Solución.

Probaremos que los triángulos $\triangle ABQ$ y $\triangle APC$ son iguales. Para ello observemos que su ángulo en A coincide pues $\angle BAQ = \angle BAC + 60^o = \angle PAC$. Además los lados que abarcan este ángulo son iguales en los dos triángulos, $AB = AP$ y $AQ = AC$, así que queda probada la igualdad de los triángulos y, en consecuencia el tercer lado también es igual ($PC = BQ$), como queríamos probar.

Autor:

MARÍA DEL ROSARIO VELÁZQUEZ CAMACHO.

Apareció en:

14ª OLIMPIADA EN QUERÉTARO, 2000.

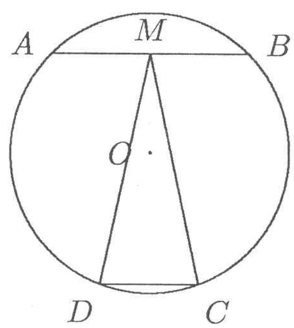
Rosario Velázquez estudia la licenciatura en Matemáticas Aplicadas en la Universidad Autónoma de Querétaro. Desde 1998 colabora con el comité académico estatal de la olimpiada en Querétaro.

Problema.

Sean A, B, C y D cuatro puntos concíclicos. Probar que si M es el punto medio de AB y el triángulo DMC es isósceles, entonces AB es paralelo a DC

Solución.

Sea $\mathcal{R}$ la circunferencia que contiene a A, B, C y D. Como CD y AB son cuerdas de $\mathcal{R}$, el centro O de $\mathcal{R}$ está en la mediatriz de ambas. Además, M está en la mediatriz de CD, por ser ABC isósceles. Entonces OM es perpendicular tanto a AB como a CD, así que $AB \,||\, CD$.



Autor:

HUGO VILLANUEVA MÉNDEZ.

Apareció en:

15ª OLIMPIADA EN PUEBLA, 2001.

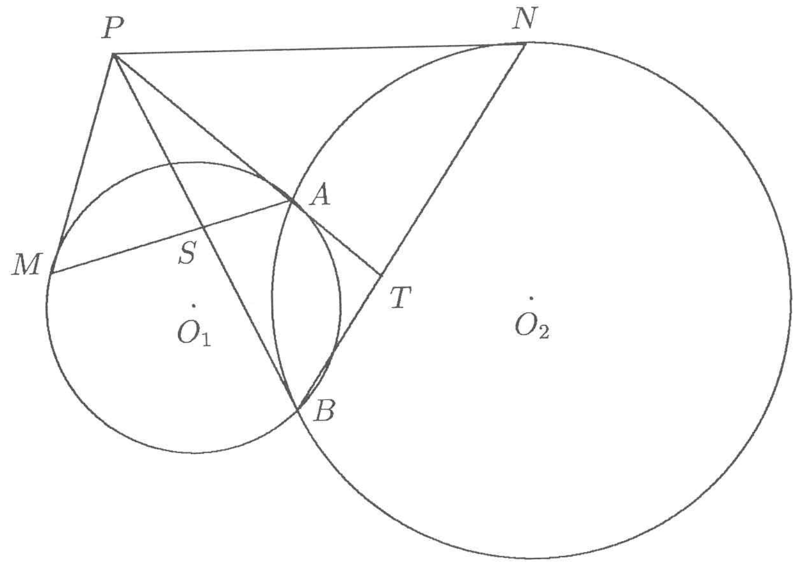
Hugo Villanueva fue ganador de primer lugar en la 14ª Olimpiada Nacional, representando a Puebla. Actualmente estudia la carrera de Matemáticas en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla y colabora en los concursos y entrenamientos de la olimpiada en Puebla.

Problema.

Dadas dos circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ de distinto radio que se cortan en A y B, sean $\mathcal{L}_1$ la recta tangente a $\mathcal{C}_1$ que pasa por A y $\mathcal{L}_2$ la recta tangente a $\mathcal{C}_2$ que pasa por B. Sea P el punto de intersección de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$. Desde P se trazan las tangentes a $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ distintas de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$; sean M y N los puntos de tangencia en $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, respectivamente. Probar que si AM y BP se cortan en S y BN y AP se cortan en T entonces el cuadrilátero $ATBS$ es cíclico.

Solución.

Los triángulos PAM y PBN son isósceles. Si probamos que son semejantes, tendremos que $\angle PBN = \angle PAM$, condición suficiente para afirmar que $ATBS$ es cíclico. Entonces basta ver que $\angle APM = \angle NPB$ o, equivalentemente, $\angle APO_1 = \angle BPO_2$, donde O_1 y O_2 son los centros de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, respectivamente. Esto es porque PO_1 y PO_2 son bisectrices de $\angle MPA$ y de $\angle BPN$, respectivamente. Pero los triángulos PAO_1 y PBO_2 son rectángulos: si vemos que $\frac{PA}{PB} = \frac{AO_1}{BO_2}$, podremos concluir que son semejantes y habremos acabado. Si PA vuelve a cortar a $\mathcal{C}_2$ en Q, y PB vuelve a cortar a $\mathcal{C}_1$ en R, tenemos que $a := \angle PBQ = \angle BAQ = \angle BRA$. Luego, $2a = \angle BO_1A = \angle BO_2Q$, de donde los triángulos isósceles AO_1B y BO_2Q son semejantes. Entonces $\frac{AB}{BQ} = \frac{AO_1}{BO_2}$.



Por último vemos que los triángulos PAB y PBQ son semejantes (tienen dos ángulos iguales), de donde $\frac{PA}{PB} = \frac{AB}{BQ} = \frac{AO_1}{BO_2}$.

Nuestros Problemas Favoritos. 15 años de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, se imprimió en Morevallado Editores, en Octubre de 2001, estuvieron al cuidado de la edición los autores. Tiraje de 1000 ejemplares.