La Olimpiada de Matemáticas
Problemas Tipo
Fase Inicial

María Luisa Pérez Seguí
José Gerardo Tinoco Ruiz

La Olimpiada de Matemáticas
Problemas Tipo
Fase Inicial

María Luisa Pérez Seguí
José Gerardo Tinoco Ruiz

La Olimpiada de Matemáticas Problemas Tipo - Fase Inicial.
María Luisa Pérez Seguí y José Gerardo Tinoco Ruiz.

ISBN - 970-9056-81-7

Morelia, Mich., México. 2000.

Contenido

Presentación

Una de las mayores dificultades que se presentan durante la formación matemática de una persona es la falta de motivaciones para hacerle atractiva la disciplina. Dentro de las muchas maneras que puede haber para remediar este problema, consideramos que una es la de presentarle problemas no rutinarios, que además sirvan para descubrir las habilidades necesarias para destacar en Matemáticas.

En este contexto, presentamos una colección de problemas del tipo que se usan en las fases estatales de la olimpiada nacional de Matemáticas. Están catalogados de acuerdo al tipo de contenidos que se usan para su solución y para la mayoría de ellos se incluye en la parte final una solución; se esperaría que dichas soluciones sean consultadas sólo después de haber dedicado un tiempo razonable a resolver cada problema.

Esperamos contribuir en alguna medida a una mejor formación de nuestros alumnos de bachillerato.

Morelia, Mich. Marzo de 2000

María Luisa Pérez Seguí

José Gerardo Tinoco Ruiz

Escuela de Ciencias Fisico-Matemáticas
"Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez"
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Capítulo 1

ARITMETICA Y LOGICA

1. Alberto, Bernardo, Carlos, Daniel y Elena se entretienen con un juego en el que cada uno es una vaca o una foca. Las aseveraciones de las vacas son siempre verdaderas, mientras que las de las focas son falsas.

   Alberto dice que Bernardo es una vaca.
   Carlos dice que Daniel es una foca.
   Elena dice que Alberto no es una foca.
   Bernardo dice que Carlos no es una vaca.
   Daniel dice que Elena y Alberto son diferentes animales.

   ¿Quiénes son vacas?

2. Un pueblo tiene 2500 habitantes, el 60% de los cuales votó en una elección para elegir presidente municipal. Los resultados fueron: De los votantes, el 38% votó por P, el 32% votó por Q y el 30% votó por R. ¿Cuántas personas votaron por P?

3. Los enteros positivos se escriben en forma consecutiva en renglones de cinco números. Los renglones están numerados de tal manera que los números que aparecen en el renglón número 1 son: 1, 2, 3, 4, 5; los números escritos en el renglón número 2 son: 6, 7, 8, 9, 10, etc. ¿En qué número de renglón la suma de los elementos que aparecen en él es más cercana a 150?

4. Un pastel se corta quitando cada vez la tercera parte del pastel que hay en el momento de cortar. ¿Que fracción del pastel original quedó después de cortar tres veces?

5. ¿Cuál es el menor entero positivo por el que se debe multiplicar 504 para obtener un cuadrado perfecto?

6. En una tarea Alberto sacó 80 de calificación y así elevó su promedio de 68 a 69. ¿Cuántas tareas había antes de esa última?

7. Si los números $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{9}$, 1, 2 y 3 se ordenan de izquierda a derecha en orden de magnitud, ¿cuál de ellos queda enmedio?

8. Un niño tiene fichas redondas (de $0.5\,cm$ de diámetro) que pondrá sobre los cuadros blancos de una cuadrícula (de $0.5\,cm$ de lado) coloreada como el tablero de ajedrez. Seguirá los siguientes pasos: En el primer paso colocará una ficha sobre un cuadro blanco. En el segundo paso pondrá fichas en todas las casillas blancas que rodean la ficha colocada en el primer paso. En cada uno de los siguientes pasos colocará fichas sobre todos los cuadros blancos que rodean las fichas puestas en el paso anterior. Para ilustrar, en la figura se han puesto los primeros cuatro pasos con un número dentro de las fichas según el paso en que fueron colocadas. Si el niño dispone de 5000 fichas (y la cuadrícula es tan grande como sea necesario), ¿para cuántos pasos completos le alcanzarán sus fichas?, ¿cuántas fichas le sobrarán después del último paso que pueda poner completo?

4		4		4		4
	3		3		3	
4		2		2		4
	3		1		3	
4		2		2		4
	3		3		3	
4		4		4		4

9. Calcular la suma de los 100 quebrados que se obtienen formando todos los cocientes de cada par de números de la siguiente lista
$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512$$
Nota: También deben tomarse en cuenta los quebrados en que numerador y denominador son iguales como $\frac{16}{16}$.

10. Encontrar un entero positivo a tal que la suma
$$a + 2a + 3a + 4a + 5a + 6a + 7a + 8a + 9a$$
resulta ser un número con todas sus cifras iguales.

11. ¿Para qué valor entero de n el número 2×10^n está más cercano a $\frac{601.2}{0.03}$?

12. Si a y b son números positivos distintos que cumplen $a^2 + b^2 = 4ab$, hallar el valor de $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$.

13. Considera la sucesión de números $a_1, a_2, a_3, \ldots$ que está definida por:

$$a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{1+a_1},\ a_3 = \frac{1}{1+a_2},\ a_4 = \frac{1}{1+a_3},\ \ldots$$

Calcula el producto $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_{15}$ de los primeros 15 términos de la sucesión. [Escribe la respuesta en la forma $\frac{p}{q}$ con p y q enteros.]

14. Decir cuál de los siguientes números es mayor que los demás:

$$2^{4^8},\quad 2^{8^4},\quad 4^{2^8},\quad 4^{8^2},\quad 8^{2^4},\quad 8^{4^2}.$$

15. La suma de cuatro números enteros consecutivos es 1994. ¿Cuál es el menor de esos cuatro números?

16. A una cantidad le sumo su 10%, y a la cantidad así obtenida le resto su 10%. ¿Qué porcentaje de la cantidad original me queda?

17. En el piso se va a pintar un triángulo equilátero de 1 m de lado. Dentro de él se pintarán líneas paralelas a los lados partiendo de los puntos medios de los lados para formar triángulos equiláteros más chicos; los nuevos triángulos así obtenidos se dividirán siguiendo el mismo procedimiento y así sucesivamente. Se dispone de pintura para pintar hasta 200 m. ¿Cuál es la longitud de los triángulos más chicos que se pueden pintar? (Nota: Puede sobrar pintura pues se quiere que la figura que quede tenga todos los triángulos del mismo tamaño.)

18. En una balanza se utilizan pesas marcadas en gramos (cantidades enteras) para determinar el peso de objetos de la manera usual, es decir, colocando las pesas necesarias en cada lado de la balanza para que se equilibre.

    (a) Probar que si se tienen ciertas pesas con las cuales es posible determinar pesos enteros en gramos del 1 al 10, entonces agregando una pesa de 21 gramos, ya será posible determinar todos los pesos enteros del 1 hasta el 31.

    (b) Suponiendo que se tenga una colección de pesas con las cuales se puedan determinar todos los pesos enteros en gramos del 1 al 31, ¿qué pesa se deberá agregar a la colección para poder determinar todos los pesos del 1 al 94?

(c) Decir los pesos de una colección de 4 pesas con las cuales se puedan determinar todos los pesos del 1 al 40.

19. Con 48 cubitos de madera se quiere formar una pirámide de tres niveles de tal forma que el segundo nivel tenga el doble de cubitos que el primero, y el tercer nivel tenga el triple que el primero. ¿Cuántos cubitos debe tener el segundo nivel? (Nota: Todos los cubitos deben ser utilizados para formar la pirámide.)

20. En cierto planeta hay tantos días en una semana como semanas en un mes como meses en un año. Si un año tiene 1331 días, ¿cuántos días tiene cada semana?

21. Los enteros positivos se escriben en orden sucesivo por renglones según la siguiente regla: En el primer renglón va únicamente el 1; después, a partir del segundo renglón, en cada renglón se escribe doble cantidad de números que en el renglón anterior.

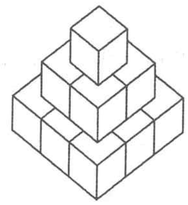
22. La resta de los cuadrados de dos números enteros positivos no consecutivos es 93. ¿Cuál es el mayor de esos dos números?

23. En una ocasión se le preguntó al matemático Alfa que cuántos alumnos había tenido en las tres universidades donde había dado clases antes de retirarse. Alfa contestó: "Sólo recuerdo que en la primera universidad donde trabajé tuve la décima parte de los alumnos que he tenido, en la segunda tuve varios séptimos del total y en la tercera universidad tuve 399 alumnos." ¿Cuántos alumnos tuvo Alfa en total? *[Problema propuesto por Lorge Luis López.]*

24. Ana tiene 10 años más que Beto; Beto es 4 años mayor que Cecilia; Cecilia es 5 años mayor que Daniel, y Ernesto es 7 años mayor que Daniel. Si la edad de Ana es a y la de Ernesto es e, ¿cuánto vale $a - e$?

25. Compré dos libros; uno de ellos costaba el doble que el otro. Me hicieron un descuento de 25% sobre el más caro y de 10% sobre el más barato. En total, ¿qué porcentaje de descuento obtuve?

26. Lupita juega con cubos de madera de 1 dm de lado. Pegó los cubos para formar una pirámide: primero pegó 9 cubos, luego encima pegó 4 y hasta arriba uno más). Quiere pintar la superficie visible de los cubos (lo que da al piso no la va a pintar). ¿Cuántos decímetros cuadrados de superficie pintará?



27. ¿Qué dígito debe sustituirse por $*$ para que sea cierta la igualdad

$$\frac{*1996}{9} = *444?$$

[Problema propuesto por Jorge Luis López López.]

28. Mi edad es dos terceras partes de la edad de Juan; si a la edad de Susana le agrego un 20%, obtengo mi edad. ¿Qué porcentaje debo agregarle a la edad de Susana para que me dé la de Juan?

29. El promedio de 5 números es 40. Al eliminar dos de ellos el nuevo promedio es 36. ¿Cuál es el promedio de los dos números eliminados?

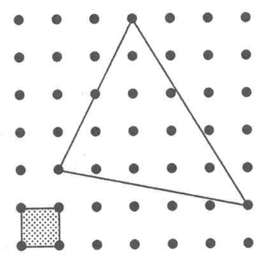
30. El producto de tres enteros positivos es 1500 y su suma es 45. ¿Cuál es el mayor de esos tres números?

31. Se va a viajar a una isla lejana por avión desde México. Los vuelos de ida y vuelta tienen la misma duración. El vuelo sale de México el lunes a las 6:25 de la mañana (hora de México) y llega a las 2:10 de la tarde del martes (hora local de la isla). Después sale de la isla a la 1:35 de la tarde del jueves (hora local de la isla) y llega el mismo jueves a las 3:20 de la tarde (hora de México). Cuando en México son las 4 de la tarde del sábado, ¿qué hora es en la isla y de qué día?

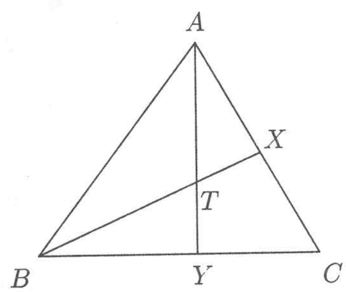
Capítulo 2

GEOMETRIA

1. ¿Cuál es el área en cm^2 de la región triangular de la figura si el área sombreada es $1\,\text{cm}^2$?

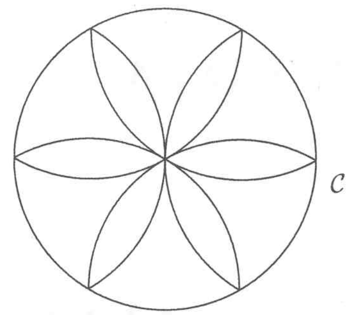


2. En la figura, AY es perpendicular a BC y BX es perpendicular a AC. Si el ángulo $\angle ABC$ mide 50^o y el ángulo $\angle BAC$ mide 60^o, ¿cuánto mide el ángulo $\angle BTY$?

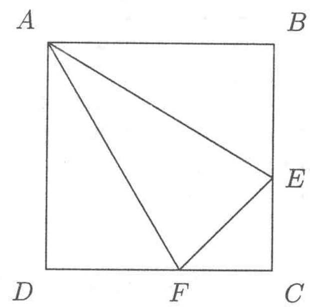


3. Manteniendo todo el tiempo una abertura de 2 cm en un compás dibujemos una flor como sigue: Tracemos una circunferencia $\mathcal{C}$. Con centro

en cualquier punto de $\mathcal{C}$ tracemos un arco de circunferencia dentro de $\mathcal{C}$ hasta intersectar $\mathcal{C}$ con los dos extremos del arco. Después, con centro en cualquiera de esas intersecciones tracemos otro arco de circunferencia como el anterior; continuemos haciendo lo mismo hasta obtener la flor como en la figura. Calcula el perímetro de la flor.



4. En un cuadrado $ABCD$ de lado 1 está inscrito un triángulo ΔAEF de tal forma que E está sobre BC y F está sobre CD. Las longitudes de los lados AE y AF son iguales y son el doble de la longitud del lado EF. Calcula la longitud de EF.



5. ¿Cuántos puntos de una circunferencia equidistan de dos rectas si las dos rectas son tangentes a la circunferencia y paralelas entre sí?

6. En un triángulo ABC, P es un punto sobre el lado BC que lo divide en la razón $2:1$, y Q es un punto sobre el lado AC que lo divide en la razón $3:1$. Suponiendo que el área del triángulo ABC es $18\,cm^2$, ¿cuál es el área del triángulo APQ?

7. En el cuadrilátero ABCD, los ángulos ABC y DAC son rectos, los

segmentos AC y AD son iguales y los segmentos BC y BA son iguales y cada uno de estos dos mide $3cm$. Calcular el área del cuadrilátero $ABCD$.

8. En un triángulo equilátero de papel se doblan las tres esquinas hacia adentro de tal manera que los tres vértices queden justo en el centro del triángulo. Describir el contorno de la figura obtenida.

9. Un círculo $\mathcal{C}$ tiene centro O y su diámetro mide 3. Los segmentos AT y RS son diámetros perpendiculares del círculo. La recta $\mathcal{L}$ es tangente al círculo en el punto T; B es la intersección de la recta $\mathcal{L}$ con la recta AR. Calcular el área de la región (delimitada por los segmentos BR y BT y el arco de círculo de R a T.)

10. En un rectángulo $ABCD$, M y N son los puntos medios de AD y BC, respectivamente, y P y Q son las respectivas intersecciones de AC con BM y con ND. Suponiendo que AD mide $5cm$ y que AB mide $3cm$, ¿cuántos centímetros cuadrados tiene de superficie el cuadrilátero $MPQD$?

11. Un círculo cuyo radio mide $1cm$ está inscrito en un cuadrado y éste, a su vez, está inscrito en otro círculo. ¿Cuántos centímetros mide el radio de éste último círculo?

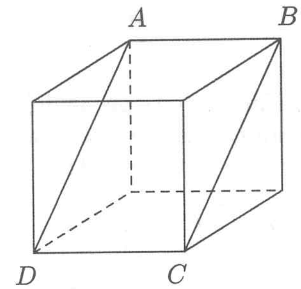
12. Un cubo se encuentra inscrito en una esfera cuyo radio mide $1\,cm$. ¿Cuál es la longitud del lado del cubo?

13. En un triángulo ABC se prolongan las rectas AB y AC, por A y B, hasta B' y C', respectivamente, de tal manera que el segmento $B'C'$ es paralelo a BC. Si el área de ABC es 1 y el área de $AB'C'$ es 2, ¿cuánto vale $\frac{AB}{BB'}$?

14. $ABCD$ es un rectángulo y P es un punto sobre el lado AB tal que el ángulo $\angle DPC$ es recto y se conocen las longitudes de los segmentos $PA = 9$, $PD = 15$ y $PC = 20$ (en centímetros). Hallar el área (en cm^2) del triángulo PBC.

15. $ABCDE$ es un pentágono regular (de $1\,m$ de lado) y P es un punto interior tal que ABP es un triángulo equilátero. ¿Cuántos grados mide el ángulo $\angle BCP$?

16. La figura representa un cubo de 1 cm de lado y A, B, C y D son los vértices marcados. ¿Cuántos centímetros cuadrados tiene de área $ABCD$?



17. En un paralelogramo $ABCD$, M es un punto sobre AD de tal manera que $\angle MBD = \angle DBC = 18^o$. ¿Cuántos grados mide $\angle AMB$?

18. En un cubo, llamemos C a su centro y unamos C con una de las caras del cubo para formar una pirámide. Si el volumen de la pirámide es de $15\,\text{cm}^3$, ¿cuántos centímetros cúbicos de volumen tiene el cubo?

19. Una mesa de 30 cm de altura tiene un hoyo circular de 12 cm de diámetro. Descansando en él se encuentra una esfera de 20 cm de diámetro. ¿Cuántos centímetros hay del punto más alto de la esfera al piso?.

Capítulo 3

CONTEO

1. Si hubo exactamente cuatro domingos en octubre de cierto año, ¿en qué días de la semana no pudo haber caído el 31 de octubre de ese año?

2. Un cubo de arista 4 cm ha sido construido con cubos de arista 1 cm. ¿Cuántos cubos de arista 1 *cm* se encuentran cara a cara con exactamente 4 de los demás cubos?

3. Hoy es miércoles 26 de noviembre de 1997. ¿En qué día de la semana caerá el 26 de noviembre del año 2497?

4. Un costal está lleno de canicas de 20 colores distintos. Al azar se van sacando canicas del costal. ¿Cuál es el mínimo número de canicas que deben sacarse para poder garantizar que en la colección tomada habrá al menos 100 canicas del mismo color?

5. Un número palíndrome es un número entero que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda (por ejemplo 3808083). ¿Cuántos números palíndromes hay entre el 10 y el 1000?

6. En un torneo de futbol hay 8 equipos. Cada equipo juega con cada uno de los demás exactamente una vez. ¿Cuántos partidos se juegan en todo el torneo?

7. Si c es un número entero positivo, llamemos $P(c)$ al producto de las cifras de c (por ejemplo, $P(414) = 16$ y $P(70) = 0$). ¿Cuántos enteros positivos c menores que $100\,000$ satisfacen $P(c) = 243$?

8. En el plano se encuentran 10 conjuntos de rectas de manera que un conjunto tiene una recta, otro tiene dos rectas, otro tres y así sucesivamente hasta diez. Las rectas de cada uno de los diez conjuntos son paralelas entre sí pero no son paralelas a las de ninguno de demás conjuntos. Además entre todas las rectas no hay tres concurrentes (es decir, no hay tres rectas que pasen por un mismo punto). Calcula el número de puntos de intersección que tiene la colección completa de las rectas (cada dos rectas no paralelas determinan un punto de intersección).

9. Una niña tiene tres listones (uno rojo, uno verde y uno blanco) que colocará en su pelo formando diademas. ¿Para cuántos días le alcanzan si quiere combinarlos de manera diferente cada día? (Cada día usará al menos uno y puede juntarlos para buscar distintas combinaciones sin importar el orden en que queden colocados.)

10. Se construyó un cubo de alambre de $3cm$ de lado y se marcaron divisiones con el mismo alambre para que en el cubo quedaran marcados 27 cubitos de $1cm$ de lado. ¿Cuántos centímetros de alambre se usaron (si no hubo desperdicio)?

11. Un juego de dominó extraño tiene fichas con los números del 1 al 9 en cada uno de sus dos lados. (Por ejemplo, cuatro de esas fichas son $2|8$, $3|3$, $4|1$ y $4|2$.) ¿Cuántas fichas tiene el juego en total si tiene todas las combinaciones de números del 1 al 9?. (Nota: Las fichas como $2|8$ y $8|2$ deben contarse una sola vez pues se consideran iguales.)

12. Se tiene una cuadrícula de $5\,cm \times 5\,cm$, con divisiones horizontales y verticales cada $1cm$, determinando de esta manera 36 puntos. Usando esos puntos como extremos, ¿cuántos segmentos de $2\,cm$ de longitud se pueden trazar?

13. Considera todos los números de 4 cifras que se forman usando sólo $1'$s y $2'$s. (Por ejemplo 1111, 2112 y 2122 son tres de esos números.) ¿Cuál es la cifra de las unidades de la suma de todos ellos?

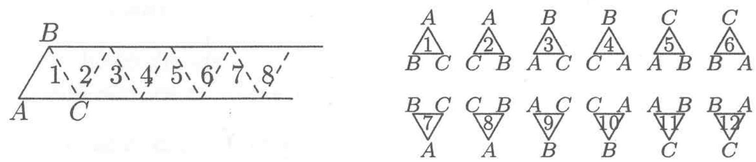
14. ¿Cuál es la cifra decimal que ocupa el lugar 1997 en el desarrollo decimal de $\frac{4}{101}$? (Por ejemplo, en el desarrollo decimal de $\pi = 3.14159\ldots$, las cifras decimales son las que aparecen a la derecha del punto decimal y los lugares que ocupan son: el lugar 1 lo ocupa el 1, el lugar 2 lo ocupa el 4, el lugar 3 lo ocupa el 1, etc.)

15. Se escriben en sucesión todos los números del 1 al 1997, en orden, uno a continuación del otro, para formar un número muy grande que

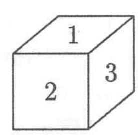
llamaremos G (es decir, $G = 1234567891011\cdots 1997$) ¿Cuál es la cifra central de G? y ¿a qué número de los de la sucesión corresponde esa cifra?

16. ¿Cuántas cifras tiene el número $4^{1997} \times 25^{2000}$?

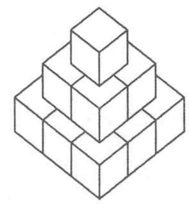
17. La figura de la izquierda abajo representa una tira de papel muy larga dividida en 1998 triángulos equiláteros por las líneas punteadas. Supón que se va doblando la tira por las líneas punteadas en el orden que indican los números de tal forma que la tira siempre conserva su posición horizontal y la parte ya doblada de la izquierda se dobla por encima de la derecha. Escribe el número del triangulito de la figura de la derecha que indica la posición final (después de los 1997 dobleces) en que quedan los vértices A, B y C.



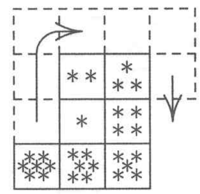
18. Para construir un dado se ponen puntitos en cada cara de un cubito simbolizando los números del 1 al 6 de tal manera que el 1, el 2 y el 3 queden colocados en las posiciones relativas que se indica en la figura, el 6 en la cara opuesta del 1, el 5 en la cara opuesta del 2 y el 4 en la cara opuesta del 3. Me dieron un dado con los números en las posiciones equivocadas. ¿De cuántas maneras equivocadas puede construirse un dado?



19. Lupita juega con cubos de madera de 1 dm de lado. Pegó los cubos para formar una pirámide: primero pegó 9 cubos, luego encima pegó 4 y hasta arriba uno más). Quiere pintar la superficie visible de los cubos (lo que da al piso no la va a pintar). ¿Cuántos decímetros cuadrados de superficie pintará?



20. Se quiere hacer un adorno **cuadrado** con mosaicos de 1 dm de lado cada uno. En el mosaico central habrá una estrella. Después alrededor de éste se irán colocando en espiral mosaicos con $2, 3, 4, 5, \ldots$ estrellas, respectivamente, como se muestra en la figura (cada uno con una estrella más que el anterior). ¿Cuántos decímetros de lado debe medir el cuadrado final, por lo menos, para que un mosaico con 1996 estrellas quede incluido en el adorno?



21. ¿Cuántas cifras tiene el número $999\,999\,999\,999^2 - 1$?

22. ¿Cuántos números enteros positivos menores que 10000 y divisibles entre 9 tienen entre sus cifras por lo menos un 5 y no tienen 6, ni 7, ni 8, ni 9 ?

23. ¿Cuántos números enteros del 1 al 10000 tienen todas sus cifras en orden estrictamente creciente?

24. Se tiene una cuadrícula de 10 por 10. Se quiere viajar a través de las líneas de esta cuadrícula partiendo del vértice superior izquierdo y terminando en el vértice inferior derecho. Se pueden hacer movimientos hacia la derecha, hacia abajo y hacia arriba, pero no hacia la izquierda, y no se puede pasar dos veces por el mismo vértice. ¿Cuántos caminos distintos hay para hacer este viaje?

Capítulo 4

DIVISIBILIDAD

1. ¿Cuántos números enteros del 1 al 1993 (inclusive) al elevarlos a la vigésima potencia el resultado es un número terminado en 1? (En otras palabras, ¿para cuántos n la cifra de las unidades de n^{20} es 1?)

2. El producto de tres enteros mayores que 1 y distintos entre sí es 100. ¿Cuáles son los tres enteros?

3. Encontrar el mayor número entero que no tenga cifras repetidas y tal que el producto de sus cifras sea el cuadrado de otro número entero distinto de cero.

4. A Juan se le olvidó el número secreto que le daba acceso al gimnasio; sin embargo, previendo su olvido anotó en su libreta los siguientes datos: La suma de los cuatro dígitos del número es 9 y ninguno de ellos es 0; además el número es múltiplo de 5 y mayor que 1995. ¿Cuál es el número?

5. ¿Cuántos ceros hay al final de
$$\left(10^2 + 10^3 + \cdots + 10^{10}\right)^{1995}?$$

6. Observa que los números 1900 y 1996 comparten la siguiente propiedad: cada uno de ellos es producto de dos números no 1 cuyas cifras son todas cuadrados perfectos: $1900 = 19 \times 100$ y $1996 = 4 \times 499$. Encuentra el próximo año que va a tener esa misma propiedad y también encuentra cuál fue el último año antes de 1996 que tuvo la propiedad.

7. Si A es un conjunto de números enteros del 1 al 10, llamemos p_A al producto de todos los elementos de A, y llamemos q_A al producto de

todos los enteros del 1 al 10 que no están en A. (Por ejemplo, si A consta de los números 2, 5, 6 y 8, entonces $p_A = 2 \times 5 \times 6 \times 8 = 480$ y $q_A = 1 \times 3 \times 4 \times 7 \times 9 \times 10 = 7560$.) Encuentra el menor entero que puede obtenerse como resultado de dividir p_A entre q_A.

8. Encontrar todos los números enteros positivos de cuatro cifras tales que la primera y la tercera cifra son iguales, la segunda y la cuarta cifras son iguales y el número más 1 es un cuadrado perfecto.

9. Al dividir cualquier potencia de 10 entre 45, el residuo es siempre 10. Con base en esto, dar un criterio de divisibilidad entre 45 (diferente al de divisibilidad simultánea entre 5 y 9).

10. Encontrar la última cifra distinta de cero de 100! ($100! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 100$).

11. Pruebe que el producto de todos los divisores positivos de 6^{100} es 6^{510050}.

12. (a) ¿Para qué enteros positivos n, se cumple que $2^n - 1$ es divisible por 7 ?

    (b) Mostrar que $2^n + 1$ nunca es divisible por 7.

    (c) Determinar para qué enteros positivos n, $2^n + 1$ es divisible por 3.

13. Encontrar todos los enteros positivos n, tales que $n^2 + 1$ es múltiplo de $n + 1$.

14. Encuentre todos los primos que son tanto suma de dos primos, como diferencia de dos primos.

15. La sucesión de Fibonacci $f_1, f_2, f_3, \ldots$ se define como sigue: $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ y para $n \geq 3$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Pruebe que el 9 divide a una infinidad de términos de la sucesión.

16. ¿Para qué enteros positivos n, sucede que n divide a $(n-1)!$?

17. Pruebe que si en un triángulo rectángulo los lados a, b, c son números enteros, entonces el producto abc es múltiplo de 30.

18. Encontrar todas las ternas de números enteros positivos distintos a, b, c, tales que la suma de sus recíprocos es un entero.

Capítulo 5

SOLUCIONES: Aritmética y Lógica

1. **Carlos.** Para simplificar, llamemos A a Alberto, B a Bernardo, C a Carlos, D a Daniel y E a Elena. Supongamos que A es vaca; entonces de la primera condición tendremos que B es vaca, de la cuarta que C es foca, de la segunda que D es vaca (pues C dice mentiras) y por la tercera que E es vaca. Pero entonces la quinta condición no puede ser cierta (porque D siempre dice verdades). Entonces debemos empezar el razonamiento tomando a A como foca. Entonces por la primera condición B es foca, E es foca por la tercera, D es foca por la quinta, C es vaca por la segunda (y por la cuarta). Así todas las condiciones se satisfacen.

2. **570 personas votaron por P.** El número de habitantes que votó es $.6 \times 2500 = 1500$, así que el número de habitantes que votó es $.38 \times 1500 = 570$.

3. **El número del renglón es el 6.** La suma de los números del primer renglón es 15. Observemos que de un renglón a otro, la suma incrementa en 25 (pues cada número es 5 más que el que se encuentra justo arriba de él). Entonces la segunda suma es $15 + 25 = 40$, la tercera es $15 + 2 \cdot 25 = 115$, así llegamos a que la sexta suma es $15 + 5 \cdot 25 = 140$ y la séptima suma es $15 + 6 \cdot 25 = 165$, de donde la más cercana es la sexta.

4. $\mathbf{\frac{8}{27}}$. (En cada corte quedan $\frac{2}{3}$ de lo que había antes de cortar, así que la respuesta es $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$.)

5. **14**. Dado que $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$, bastará multiplicar por $2 \times 7 = 14$ para obtener $2^4 \times 3^2 \times 7^2 = (2^2 \times 3 \times 7)^2$.

6. **11**. (Llamemos n al número de tareas que había. Como el promedio de esas n tareas era 68, la suma de las primeras n calificaciones era $68n$. El promedio de las $n+1$ tareas al incluir la tarea con calificación 80 fue de 69, así que $\frac{68n+80}{n+1} = 69$. Multiplicando por $n+1$ ambos miembros de la ecuación obtenemos $68n + 80 = 69n + 69$, y de aquí que $n = 11$.)

7. $\sqrt[3]{9}$. (Al elevar los números a la sexta potencia, el orden de tamaño se conserva. Calculemos entonces las sextas potencias de los números dados y comparemos los resultados:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{5}\right)^6 &= 5^3 = 125. \\ \left(\sqrt[3]{9}\right)^6 &= 9^2 = 81. \\ 1^6 &= 1. \\ 2^6 &= 64. \\ 3^6 &= 729. \end{aligned}$$

Tenemos entonces que $1 < 2 < \sqrt[3]{9} < \sqrt{5} < 3$ y el central es $\sqrt[3]{9}$.)

8. 1ª *Solución.* Contemos el número de fichas que se acumulan hasta el paso n. Si lo hacemos fijándonos en el número de fichas que han quedado acomodadas en cada renglón observaremos que en el primer renglón (contando de arriba hacia abajo) habrá n fichas, en el siguiente habrá $n-1$ fichas y éstos números (n y $n-1$) se irán alternando hasta finalizar con un renglón en el que hay n fichas; en total habrá n renglones con n fichas y $n-1$ renglones con $n-1$ fichas, es decir, $n^2 + (n-1)^2$ fichas. Queremos que este número sea menor o igual que 5000, así que, resolviendo, tenemos:

$$\begin{aligned} n^2 + (n-1)^2 &\leq 5000, \\ 2n^2 - 2n + 1 &\leq 5000, \\ 2n^2 - 2n &\leq 4999, \\ n^2 - n &\leq 2499.5. \end{aligned}$$

Entonces $n \leq 50$. Con $n = 50$ el número de fichas colocadas hasta el paso n es $n^2 + (n-1)^2 = 2500 + 2401 = 4901$; así las fichas alcanzan para 50 pasos completos y sobrarán 99 fichas.

2^{a} *Solución.* Observemos que para $n \geq 2$ el número de fichas que se colocan en el paso n son $4(n-1)$. Entonces, en total, el número de fichas que quedan colocadas hasta el paso n es $1+4+4\times 2+\cdots+4(n-1) = 1+4(1+2+\cdots+(n-1))$. Se quiere que este número sea menor o igual que 5000, así que $1+2+\cdots+(n-1) \leq \frac{5000-1}{4} = 1249.25$. Es fácil comprobar (haciendo las cuentas) que la desigualdad de arriba implica que $n \leq 50$. Para $n = 50$, $1 + 4(1 + 2 + \cdots + (n-1)) = 1 + 4 \times 1225 = 4901$, por lo que sobrarán 99 fichas.

9. Pongamos los quebrados en una tabla:

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$
$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{32}$	$\frac{2}{64}$	$\frac{2}{128}$	$\frac{2}{256}$	$\frac{2}{512}$
$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{4}{64}$	$\frac{4}{128}$	$\frac{4}{256}$	$\frac{4}{512}$
$\frac{8}{1}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{8}{32}$	$\frac{8}{64}$	$\frac{8}{128}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{8}{512}$
$\frac{16}{1}$	$\frac{16}{2}$	$\frac{16}{4}$	$\frac{16}{8}$	$\frac{16}{16}$	$\frac{16}{32}$	$\frac{16}{64}$	$\frac{16}{128}$	$\frac{16}{256}$	$\frac{16}{512}$
$\frac{32}{1}$	$\frac{32}{2}$	$\frac{32}{4}$	$\frac{32}{8}$	$\frac{32}{16}$	$\frac{32}{32}$	$\frac{32}{64}$	$\frac{32}{128}$	$\frac{32}{256}$	$\frac{32}{512}$
$\frac{64}{1}$	$\frac{64}{2}$	$\frac{64}{4}$	$\frac{64}{8}$	$\frac{64}{16}$	$\frac{64}{32}$	$\frac{64}{64}$	$\frac{64}{128}$	$\frac{64}{256}$	$\frac{64}{512}$
$\frac{128}{1}$	$\frac{128}{2}$	$\frac{128}{4}$	$\frac{128}{8}$	$\frac{128}{16}$	$\frac{128}{32}$	$\frac{128}{64}$	$\frac{128}{128}$	$\frac{128}{256}$	$\frac{128}{512}$
$\frac{256}{1}$	$\frac{256}{2}$	$\frac{256}{4}$	$\frac{256}{8}$	$\frac{256}{16}$	$\frac{256}{32}$	$\frac{256}{64}$	$\frac{256}{128}$	$\frac{256}{256}$	$\frac{256}{512}$
$\frac{512}{1}$	$\frac{512}{2}$	$\frac{512}{4}$	$\frac{512}{8}$	$\frac{512}{16}$	$\frac{512}{32}$	$\frac{512}{64}$	$\frac{512}{128}$	$\frac{512}{256}$	$\frac{512}{512}$

El trabajo se simplifica mucho si agrupamos correctamente antes de hacer la suma. Por ejemplo, observemos que en una misma columna de la tabla todos tienen el mismo denominador, así que la suma de cada columna es fácil de calcular; además, en cada caso los numeradores son los mismos y su suma es $1+2+4+8+16+32+64+128+256+512 = 1023$. Ahora debemos calcular la suma de las sumas de las columnas:

$$\begin{aligned}
& \tfrac{1023}{1} + \tfrac{1023}{2} + \tfrac{1023}{4} + \tfrac{1023}{8} + \tfrac{1023}{16} + \tfrac{1023}{32} + \tfrac{1023}{64} + \tfrac{1023}{128} + \tfrac{1023}{256} + \tfrac{1023}{512} \\
= & \quad 1023\left(\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{128} + \tfrac{1}{256} + \tfrac{1}{512}\right) \\
= & \quad 1023\left(\tfrac{512+256+128+64+32+16+8+4+2+1}{512}\right) \\
= & \quad \tfrac{1023^2}{512}.
\end{aligned}$$

10. Escribamos
$$a + 2a + 3a + 4a + 5a + 6a + 7a + 8a + 9a = bbb\cdots b,$$
con b un dígito. Entonces $45a = bbb\cdots b$. Ahora observemos que como 45 es múltiplo de 5, también lo debe ser $bbb\cdots b$, así que la única posibilidad es $b = 5$ (b no puede ser 0 pues el enunciado dice que a debe ser positivo). Hagamos la división de $555\cdots 5$ entre 45 con el número de $5'$s suficientes para obtener un residuo 0:

$$\begin{array}{r} 12345679 \\ 45\overline{)555555555} \\ 105 \\ 155 \\ 205 \\ 255 \\ 305 \\ 355 \\ 405 \\ 00 \end{array}$$

Entonces una posible respuesta es $a = 12345679$. Si agregamos otros nueve $5'$s obtendremos otro valor para a: $a = 12345679012345679$; todos los posibles valores para a se obtienen así. (Nota: De antemano podíamos haber deducido que con nueve $5'$s obtendríamos residuo 0 por primera vez, utilizando que 45 es múltiplo de 9 así que también debía serlo $555\cdots 5$; entonces el resultado que dice que los múltiplos de 9 son los números cuya suma de cifras es también múltiplo de 9 nos hubiera dado este dato.)

11. **4.** $\frac{601.2}{0.03}$ es aproximadamente igual a $\frac{60\,000}{3} = 20\,000 = 2 \times 10^4$.

12. **3.** ($\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2} = \frac{4ab+2ab}{4ab-2ab} = \frac{6ab}{2ab} = 3$.)

13. Tenemos que

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= \tfrac{1}{1+1} = \tfrac{1}{2}, \\ a_3 &= \tfrac{1}{1+\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3}, \\ a_4 &= \tfrac{1}{1+\frac{2}{3}} = \tfrac{1}{\frac{5}{3}} = \tfrac{3}{5}, \\ a_5 &= \tfrac{1}{1+\frac{3}{5}} = \tfrac{1}{\frac{8}{5}} = \tfrac{5}{8}, \ldots \end{aligned}$$

Podemos observar que cada uno se obtiene del anterior poniendo el denominador como numerador y el denominador como la suma del numerador y el denominador anteriores. Al multiplicarlos se cancelan todos excepto el último denominador (el de a_{15}); para calcular éste construyamos los denominadores anteriores (siempre sumando los dos que le preceden):

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987.$$

La respuesta es $\frac{1}{987}$.

14. $\mathbf{2^{4^8}}$. Recordemos que si a y b son enteros positivos, entonces a^b significa que vamos a multiplicar el número a por sí mismo b veces. Conviene entonces expresar los números del problema como potencias de 2 y después comparar sólo los exponentes: $2^{4^8} = 2^{(2^2)^8} = 2^{2^{16}}$, $2^{8^4} = 2^{(2^3)^4} = 2^{2^{12}}$, $4^{2^8} = (2^2)^{2^8} = 2^{2^9}$, $4^{8^2} = (2^2)^{(2^3)^2} = (2^2)^{2^6} = 2^{2^7}$, $8^{2^4} = (2^3)^{16} = 2^{48}$ y $8^{4^2} = (2^3)^{16} = 2^{48}$.

15. **497**. (Si llamamos n al número buscado tenemos que $1994 = n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4n + 6$, de donde $n = \frac{1994-6}{4} = 497$.)

16. **99%**. (En el primer paso, por cada 100 tendremos 110, a los cuales habrá que restarles 11 y, por tanto, quedando 99.)

17. En el primer paso habremos pintado $3\,m$. En el segundo, cada línea agregada mide $\frac{1}{2}\,m$, así que se habrán pintado $\frac{3}{2}\,m$ más. En el tercer paso, en cada en cada uno de los 4 triángulos del 2° paso, pintaremos un triángulo de $\frac{1}{4}\,m$ de lado, así que en este paso pintaremos $4 \times \frac{3}{4}\,m$ más. Ahora hay 16 triángulos, así que se pintarán, en el cuarto paso, $16 \times \frac{3}{8}\,m$ más. Queremos entonces que la suma

$$3 + \frac{3}{2} + 4 \times \frac{3}{4} + 4^2 \times \frac{3}{8} + 4^3 \times \frac{3}{16} + 4^4 \times \frac{3}{32} + \cdots$$

no sobrepase 200. Esta suma puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} & 3(1 + \tfrac{1}{2} + 2^2 \times \tfrac{1}{2^2} + 2^4 \times \tfrac{1}{2^3} + 2^6 \times \tfrac{1}{2^4} + 2^8 \times \tfrac{1}{2^5} \cdots) \\ = \quad & 3(1 + \tfrac{1}{2} + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots). \end{aligned}$$

Queremos entonces que la suma de las potencias de 2 sea menor o igual que $\frac{200-3(1+\frac{1}{2})}{3}$; por tanto debe ser menor o igual que 65; esto se logra tomando hasta la potencia 2^5, lo cual corresponde a que los últimos triángulos dibujados sean los de lado $\frac{1}{128}$.

18. Los objetos cuyo peso está determinado con las pesas de que se disponga en un momento dado, serán aquéllos que al ponerlos de un lado de la balanza, puedan agregarse pesas según se necesite en ambos lados de la balanza para lograr el equilibrio de la balanza; el peso del objeto será la diferencia entre la suma de los pesos que se hayan puesto del lado contrario al que él esté y la suma de los que se hayan puesto de su lado. Tomaremos en cuenta estas observaciones al responder los incisos del problema.

    (a) Los objetos que pesan de 1 a 10 gramos ya se podían equilibrar desde antes de agregar la pesa de $21\,g$; los de 11 a 21 se equilibrarán poniendo del otro lado la pesa de $21\,g$; lo que le falta al objeto para los $21\,g$ es una cantidad entre 0 y 10, los cuales se podían equilibrar desde antes. Los de 22 a 31 gramos se equilibrarán poniendo también la pesa de $21\,g$ del otro lado al objeto y ahora considerando que lo que el objeto se excede de $21\,g$ es una cantidad del 1 al 10, que ya se podía equilibrar desde antes.

    (b) Como en el inciso anterior, bastará agregar una pesa de $2 \times 31 + 1 = 63$, logrando así equilibrar todos los pesos hasta $63+31 = 94$, como queríamos.

    (c) Sigamos el procedimiento que nos marcaron los incisos anteriores. Empecemos con un peso de 1; entonces al agregar una pesa de $2 \times 1 + 1 = 3$, lograremos pesar todas las cantidades del 1 al $3 \times 1+1 = 4$; ahora agreguemos una pesa de $2 \times 4+1 = 9$ y lograremos determinar todas las cantidades del 1 al $3 \times 4 + 1 = 13$; por último, con una pesa de $2 \times 13 + 1 = 27$, determinaremos los objetos de peso 1 hasta $3 \times 13 + 1 = 40$. La respuesta es, entonces, los pesas que nos sirven son la de 1, la de 3, la de 9 y la de 27.

19. **16**. Llamemos n al número de cubitos del primer nivel. Entonces $n + 2n + 3n = 48$, de donde $6n = 48$ y así $2n = 16$.

20. **11**. Llamemos d al número de días en cada semana. Entonces $d^3 = 1331$, de donde $d = 11$.

21. **11**. Observamos que las potencias de 2 son los números que inician cada renglón (empezando por $2^0 = 1$). Como $2^{10} = 1024 < 1995$ y $2^{11} = 2048 > 1995$, 1995 quedará en el renglón que inicia con 2^{10}, es decir, en el renglón número 11.

22. **17**. Llamemos a y b a los números y supongamos que $a > b$. Tenemos entonces que $a^2 - b^2 = 93$. Pero $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ y $93 = 31 \times 3$.

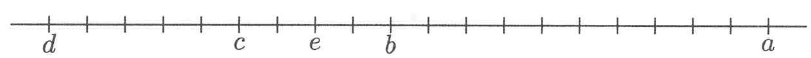
Comparando éstos y tomando en cuenta que $a+b > a-b$, que 31 y 3 son números primos y que $a-b$ no puede ser 1 pues a y b no son consecutivos, tenemos que la única posibilidad es $a+b=31$ y $a-b=3$. Si sumamos estas ecuaciones obtenemos $2a=34$, de donde $a=17$.

23. Llamemos A al número total de alumos de Alfa y s al número de séptimos. Podemos plantear la ecuación

$$\frac{A}{10} + \frac{s}{7}A + 399 = A.$$

Multiplicando la ecuación por 70 obtenemos $7A+10sA+27930 = 70A$, de donde, despejando A, $A = \frac{27930}{63-10s}$. Queremos ver para qué valor de s (que es un entero del 1 al 6) el cociente es un entero. Esto es fácil de analizar si observamos que la descomposición prima de 27930 es $27930 = 2 \times 3 \times 5 \times 7^2 \times 19$, y los valores posibles de $63-10s$ son (variando s) 53, 43, 33, 23, 13 y 3. Es claro que sólo el último de éstos (cuando $s=6$) es factor de 27930 (pues los demás tienen primos distintos de los que aparecen el la descomposición prima de 27930). Entonces $s=6$ y el número total de alumnos que tuvo Alfa es $A = \frac{27930}{3} = 9310$.

24. **12**. Llamemos b, c y d a las respectivas edades de Beto, Cecilia y Daniel. Para ver la diferencia $a-e$, coloquemos las letras a, b, c, d y e en una recta numérica.



25. **20**. Podemos pensar que el libro más caro costaba \$200 y el más barato \$100. Entonces, después del descuento el precio fue \$150 + \$90 = \$240, que representa el 80% de \$300.

26. **33**. En la parte de arriba hay 9 pues los cubitos que quedan encima tapan lo mismo que lo que tienen ellos mismos de superficie arriba. Cada lado tiene $3+2+1=6$. Entonces la respuesta es $9+4\times 6=33$.

27. **2**. Para ver esto, basta hacer la multiplicación $*444 \times 9$.

28. **80**. Llamemos M a mi edad, J a la de Juan y S a la de Susana; así $M = \frac{2}{3}J$ y $1.2S = M$. Entonces $J = \frac{3}{2}M = 1.5M = 1.5(1.2S) = 1.8S$.

29. **46**. Llamemos a, b, c, d y e a los números y supongamos que los que se eliminan son a y b. Entonces $\frac{a+b+c+d+e}{5} = 40$ y $\frac{c+d+e}{3} = 36$, de donde

$$\frac{a+b}{2} = \frac{40 \times 5 - (c+d+e)}{2} = \frac{200 - 36 \times 3}{2} = 46.$$

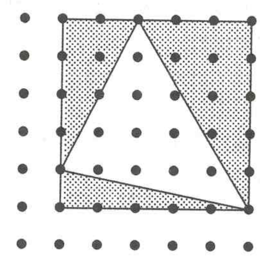
30. **30**. $1500 = 2^2 \times 5^3 \times 3$. Tenemos que repartir los tres 5's que aparecen en la factorización de 1500 entre los tres números que buscamos. Es claro que los tres no pueden quedar en un sólo número pues $5^3 = 125 > 45$. Entonces, por lo menos, dos de los números son múltiplos de 5. Pero el tercero es la diferencia de 45, que es múltiplo de 5, y la suma de los otros dos números, también múltiplo de 5. De esta manera, también ese número debe ser múltiplo de 5. Ahora ya sólo tenemos que repartir los dos 2's y el 3, buscando que la suma nos dé 45. Probando todas las posibilidades vemos que la única es cuando los números son 30, 10 y 5.

Capítulo 6

SOLUCIONES: Geometría

1. **11 cm²**. Podemos agregar triángulos rectángulos (los que aparecen sombreados en la figura de abajo) al triángulo original para lograr un cuadrado. De esta manera el área del triángulo es la diferencia entre el área del cuadrado y la suma de las áreas de los triángulos rectángulos:

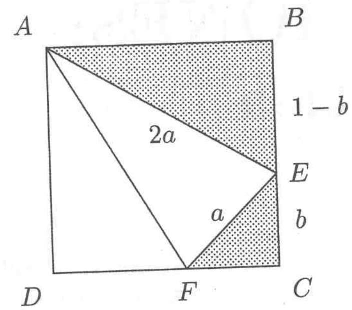
$$5 \times 5 - \left(\frac{1 \times 5}{2} + \frac{4 \times 2}{2} + \frac{3 \times 5}{2}\right) = 25 - \frac{28}{2} = 11.$$



2. **70°**. Recordemos que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°. Entonces, observando el triángulo ΔABC, deducimos que $\angle C = 180^o - (50^o + 60^o) = 70^o$. Del ΔXBC, tenemos $\angle XBC = 180^o - (90^o + 70^o) = 20^o$ y del ΔBTY obtenemos $\angle BTY = 180^o - (20^o + 90^o) = 70^o$.

3. Observemos que cada arco de circunferencia (de los que se usaron para construir la flor) mide lo mismo que $\frac{1}{3}$ del perímetro de la circunferencia. En total se trazan 6 arcos, así que el resultado es $6 \times \frac{1}{3} \times (2\pi \times 2) = 8\pi$.

4. Llamemos a a la longitud de EF y b a la longitud de EC. Entonces $BE = 1 - b$, $FC = b$ y $AE = 2a$.



Apliquemos el teorema de Pitágoras a los dos triángulos sombreados:

$$(2a)^2 = 1 + (1-b)^2 \qquad (*)$$

$$a^2 = b^2 + b^2. \qquad (**)$$

Resolvamos este sistema de ecuaciones. De $(**)$ tenemos $b^2 = \frac{1}{2}a^2$ y $b = \frac{1}{\sqrt{2}}a$. Desarrollemos $(*)$ y sustituyamos los valores de b y de b^2 que acabamos de obtener:

$$\begin{aligned} 4a^2 &= 1 + 1 - 2b + b^2 = 2 - 2b + b^2, \\ 4a^2 &= 2 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a\right) + \frac{1}{2}a^2. \end{aligned}$$

Desarrollemos y despejemos a:

$$\begin{aligned} \frac{7}{2}a^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}a - 2 &= 0, \\ \frac{7}{2}a^2 + \sqrt{2}a - 2 &= 0, \\ 7a^2 + 2\sqrt{2}a - 4 &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{2\times 7}\left(-2\sqrt{2}\pm\sqrt{(2\sqrt{2})^2-4(-4)(7)}\right)\\
&= \frac{1}{2\times 7}\left(-2\sqrt{2}\pm\sqrt{4\times 2+4(28)}\right)\\
&= \frac{1}{2\times 7}\left(-2\sqrt{2}\pm 2\sqrt{30}\right)\\
&= \frac{1}{7}\left(-\sqrt{2}\pm\sqrt{30}\right).
\end{aligned}$$

Como a es una longitud, tomamos el valor positivo en la raíz.

5. **2**.

6. **4.5**. (Los triángulos APC y ABC tienen la misma altura en A y la base PC es $\frac{1}{3}$ de la base BC, así que área $(APC) = \frac{1}{3}$ área $(ABC) = \frac{18\,cm^2}{3} = 6\,cm^2$. Análogamente, comparando las áreas de los triángulos APQ y APC tenemos: área $(APQ) = \frac{3}{4}$ área $(APC) = \frac{3\times 6\,cm^2}{4} = 4.5\,cm^2$).

7. **13.5**. (Por el teorema de Pitágoras tenemos $AC = \sqrt{AB^2+BC^2} = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18}$. Así área $(ABCD) =$ área $(ABC)+$ área $(ACD) = \frac{AB\times BC}{2} + \frac{AC\times AD}{2} = \frac{3\times 3}{2} + \frac{\sqrt{18}\times\sqrt{18}}{2} = \frac{9}{2} + \frac{18}{2} = 13.5$.)

8. Es un hexágono regular.

9. Notemos que el triángulo ABT es semejante al triángulo ARO en razón $2:1$ pues O es el punto medio de AT y RO es paralela a BT; de aquí que como en el triángulo ARO los lados AO y RO son iguales, también lo son sus correspondientes en el triángulo ABT, es decir, $BT = AT$; entonces $BT = 3$. El área buscada es área $(ABT)-$ área $(ARO) - \frac{1}{4}$ área $(\mathcal{C}) = \frac{3\times 3}{2} - \frac{\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}}{2} - \frac{1}{4}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{8} - \frac{9}{16}\pi$.

10. **3.75**. (Observemos que si juntamos los triángulos ABM y DNC, éstos formarán un rectángulo de 2.5×3 y que el área de $MPQD$ es la mitad del área restante $MBND$ para el rectángulo total, esto es: $\frac{5\times 3-2.5\times 3}{2} = 3.75$.)

11. $\sqrt{\mathbf{2}}$. (Del centro de los círculos tracemos segmentos a los puntos de tangencia del círculo menor con el cuadrado; así el cuadrado quedará dividido en cuatro cuadrados de lado 1 y el radio del círculo mayor será igual a la diagonal de ellos. Usando Pitágoras deducimos el resultado.)

12. Llamemos x al lado del cubo y marquemos vértices con las letras A, B, C, D, como se muestra en la figura. El triángulo ACD es isósceles y rectángulo, así que, por Pitágoras, $(AC)^2 = (CD)^2 + (AD)^2 = 2x^2$, esto es, $AC = \sqrt{2}x$. También el triángulo ABC es rectángulo y, como AB es diámetro de la esfera, AB mide $2\,cm$; entonces, otra vez por Pitágoras, $(BC)^2 + (AC)^2 = (AB)^2$; sustituyendo tenemos $x^2 + (\sqrt{2}x)^2 = 2^2$; despejando x obtenemos $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

13. Llamemos h a la altura en C y h' a la altura en C'. Entonces el área de ABC es $\frac{AB \times h}{2} = 1$ y el área de $AB'C'$ es $\frac{AB' \times h'}{2} = 2$, así que, tomando el cociente de estas dos ecuaciones, $\frac{AB' \times h'}{AB \times h} = 2$. Pero los triángulos ABC y $AB'C'$ son semejantes, así que $\frac{h'}{h} = \frac{AB'}{AB}$. Combinando estas dos últimas ecuaciones obtenemos $\left(\frac{AB'}{AB}\right)^2 = 2$. Pero $AB' = AB + BB'$; sustituyendo y despejando obtenemos $\frac{AB}{BB'} = \sqrt{2} + 1$.

14. **96**. Usando Pitágoras tenemos que $AD = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$ (en el triángulo APD) y que $DC = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$ (en el triángulo PDC). Entonces $AB = 25$ y $PB = 25 - 9 = 16$. Otra vez, por Pitágoras, $BC = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$ (en el triángulo PBC). Entonces el área de PBC es $\frac{PB \times BC}{2} = \frac{16 \times 12}{2} = 96$.

15. Utilizaremos varias veces el resultado de que la suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$. Primero lo usaremos para deducir cuánto valen los ángulos del pentágono como $\angle BCD$. Si llamamos O al centro del pentágono, entonces $\angle BOC = \frac{360°}{5} = 72°$ y de aquí que $\angle OBC = \angle OCB = \frac{180° - 72°}{2} = 54°$ (ver figura (p)). Entonces $\angle ABC = \angle BCD = 108°$. Como el triángulo ABP es equilátero, todos sus ángulos internos son de $60°$, así $\angle PBC = 108° - 60° = 48°$. Por otro lado, $PB = AB$ y $AB = BC$, así que $PB = BC$ y el triángulo PBC es isósceles, de donde $\angle PCB = \angle BCP = \frac{180° - 48°}{2} = 66°$.

16. $\mathbf{\sqrt{2}}$. Podemos observar que se forma un rectángulo, uno de cuyos lados mide 1. Usando Pitágoras notamos también que el otro lado de ese rectángulo mide $\sqrt{2}$ por ser la diagonal de un cuadrado de lado 1.

17. **36**. El ángulo $\angle AMB$ es alterno interno con el ángulo $\angle MBC = \angle MBD + \angle DBC = 36°$.

18. **90**. El volumen del cubo es 6 veces el de la pirámide. Esto se puede ver poniendo una pirámide con base en cada cara.

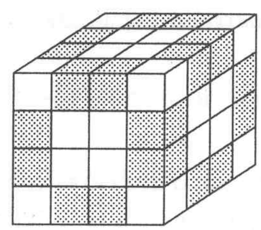
19. **48**. Tenemos un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es un radio de la esfera y uno de cuyos catetos es radio del agujero. Entonces el otro cateto de ese triángulo mide $\sqrt{10^2 - 6^2} = 8$. A este número hay que sumarle la altura de la mesa y otro radio de la esfera para obtener la distancia buscada: $8 + 10 + 30 = 48$.

Capítulo 7

SOLUCIONES: Conteo

1. **No pudo haber caído en: domingo, lunes o martes.** Si el día 1º hubiera sido domingo, entonces también lo habrían sido los días 8, 15, 22 y 29, así que habría habido 5 domingos ese octubre. Lo mismo habría ocurrido si el día 1º hubiera sido sábado o viernes. Respectivamente, en estos casos, el día 31 habría sido martes, lunes y domingo. En los demás casos sí habría habido 4 domingos.

2. **24.** El cubo de 4 cm de lado se ha construido con $4^3 = 64$ cubitos de 1 cm. Cada cubo tiene 6 caras. Los que tienen exactamente 2 caras hacia afuera (y por tanto sus otras cuatro caras estan tocando caras de otros cubos) son los que, no siendo esquinas, forman las aristas del cubo grande (sombreados en la figura). Entonces son 2 en cada arista, en total $2 \times 12 = 24$.



3. Nota: Para no incluir complicaciones técnicas en el problema, no se tomaron en cuenta ajustes de días más allá de los que ocurren cada 4 años.

   (a) 1ª *Solución.* Para esa fecha faltan 500 años, y habrá $\frac{500}{4} = 125$

años bisiestos, así que el número total de días de aquí a esa fecha es $500 \times 365 + 125 = 182\,625$; esto equivale a 26 089 semanas con 2 días. Como hoy es miércoles, el día 26 de noviembre de 2497 será viernes.

(b) 2ª *Solución.* $365 = 52 \times 7 + 1$, así que cada año normal recorre un día de la semana y cada año bisiesto recorre dos. Como son 500 años y de ellos 125 son bisiestos, el día de la semana se recorrerá 625 veces. Ahora, $625 = 89 \times 7 + 2$, así que el día buscado es 2 días después del miércoles, o sea el viernes.

4. Notemos que si sacáramos 2 canicas, podría ser que todas fueran de colores distintos, así que sólo podríamos garantizar que hay dos canicas del mismo color si sacáramos 21 canicas. De la misma manera, necesitaríamos $41 (= 20 \times 2 + 1)$ canicas para poder afirmar que con seguridad hay 3 canicas (al menos) del mismo color, pues con 40 canicas podría ser que cada color apareciera exactamente 2 veces. Con el mismo razonamiento que hemos seguido llegamos al resultado: Se necesitan $20 \times 99 + 1 = 1981$ canicas.

5. **99**. Queremos contar los números palíndromes de dos y de tres cifras. Los de dos cifras son 9, a saber $11, 22, 33, \ldots, 99$; los de tres cifras son de la forma aba, donde a tiene 9 posibilidades: $a = 1, 2, \ldots, 9$ y b tiene 10 posibilidades: $b = 0, 1, 2, \ldots, 9$, así que hay $9 \times 10 = 90$ formas de escoger un número palíndrome de tres cifras. En total serán $9 + 90 = 99$.

6. **28**. Cada uno de los 8 equipos juega contra los otros 7, así que 8×7 cuenta dos veces cada partido, por lo que el número de partidos es $\frac{56}{2}$.

7. Como $243 = 3^5$, las cifras de los números que queremos contar sólo pueden ser 1, 3 y 9.

   (a) No hay números de una o dos cifras con la propiedad.

   (b) Los de tres cifras que cumplen la condición deben tener dos $9'$s y un 3, así que son $\underline{3}$ (a saber 993, 939 y 399).

   (c) Los de cuatro cifras pueden ser de dos tipos:

      i. Con tres $3'$s y un 9, que son $\underline{4}$ (9993, 9939, 9399 y 3999) y

      ii. Con un 1, dos $9'$s y un 3, que son $\underline{12}$ en total (esto último se comprueba fácilmente considerando que a cada uno de los números de tres cifras se le puede agregar un 1 en cuatro lugares posibles, por ejemplo, del primero se obtienen 1993, 9193, 9913 y 9931).

(d) Los de cinco cifras son tres tipos distintos:

i. Con cinco $3'$s que hay $\underline{1}$ (el número 33333),

ii. Con un 9, tres $3'$s y un 1, que son $\underline{20}$ (pues a cada uno de los de los de cuatro cifras con $3'$s y un 9 le podemos poner 1 en cinco posiciones distintas) y

iii. Con un 1, dos $9'$s y un 3 que son $\underline{30}$ (se obtienen poniendo el número 3 en cada una de las cinco posiciones a los seis números 1199, 1919, 9119, 1991, 9191 y 9911).

En total hay $3+4+12+1+20+30 = 70$ números con la propiedad.

8. Vayamos contando las intersecciones de las rectas de cada conjunto con las de los conjuntos con menos rectas:

   Las rectas del segundo conjunto se intersectan en dos puntos con las del primero; cada una de las 3 rectas del tercer conjunto se intersecta con las de los otros dos conjuntos, así que éstas determinan otros $3(1+2)$ puntos de intersección; análogamente, las 4 rectas del cuarto conjunto agregan $4(1+2+3)$ intersecciones más, así sucesivamente. En total hay $2+3(1+2)+4(1+2+3)+\cdots+10(1+2+3+\cdots+9) = 1320$ intersecciones.

9. **7**. Si escribimos R por rojo, V por verde y B por blanco, las diademas posibles son R, V, B, RV, RB, VB y RVB.

10. **144**. Tenemos tres direcciones que pueden seguir las líneas, las cuales podríamos pensar como: de izquierda a derecha, de adelante a atrás y de arriba a abajo. En cada una de estas direcciones hay 16 líneas de $3\,cm$ cada una pues son 4 niveles y en cada nivel hay 4 líneas. De esta manera tenemos que el resultado es $3 \times 3 \times 16 = 144$.

11. **36**. Podemos contar las fichas como sigue: las que tienen al número 8 son ocho; las que tienen al 7 pero no al 8 son siete; las que tienen al 6 pero no al 8 ni al 7 son seis y así sucesivamente hasta contar la $1|1$. Entonces son $8+7+5+\cdots+1 = 36$.

12. **48**. En cada una de las 6 filas horizontales hay 4 segmentos de longitud 2, así que en total hay 24 segmentos horizontales. Análogamente hay 24 verticales, así que el total es de 48.

13. **4**. Podemos listar todos los números con las condiciones pedidas; son 16. Los terminados en 1 son 8: 1111, 1121, 1211, 2111, 1221, 2121, 1221 y 2221. De la misma manera hay 8 terminados en 2 (los que se obtienen sustituyendo el 1 final de los que escribimos arriba por el

2). Entonces para obtener la cifra final de la suma de todos, hay que sumar ocho veces 2 y 1, lo que nos da un total de 24. La cifra final es, entonces, 4.

14. **9**. Hacemos el cociente y obtenemos: $\frac{4}{101} = 0.039603960396\ldots$, es decir, hay un periodo de repetición de longitud 4 (se repite 0396 infinitamente). Como el residuo de la división de 1995 entre 4 es 3 ($1995 = 498 \times 4 + 3$), en el lugar 1995 aparece el tercer número del periodo 0396, o sea, el 9.

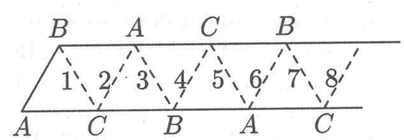
15. El número total de cifras de G es

$$9+2(99-9)+3(999-99)+4(1997-999) = 9+180+2700+3992 = 6881.$$

Entonces la cifra central está en el lugar 3441. Para llegar a esa cifra necesitamos todos los números del 1 al 999 (pues son $9+180+2700 = 2889$ y otras 552 cifras más. Como a partir del 1000 todos los números que se escriben tienen 4 cifras y $\frac{552}{4} = 138$, necesitaremos 138 números después del 999, es decir, hasta el 1137; la última cifra (el 7) de este número es la cifra buscada y el número al que corresponde es, precisamente, al 1137.

16. **1999**. Agrupemos todos los $2'$s y $5'$s que podamos: $2^{1996} \times 5^{2000} = (2 \cdot 5)^{1996} \times 5^4 = 625 \times 10^{1996}$.

17. **9**. En la misma tira pongamos las letras en los vértices como van quedando en los dobleces:



Observamos entonces que después de 6 dobleces los vértices quedan en la posición inicial. Tenemos que $1995 = 6 \times 332 + 3$, así que la posición final es igual a la que queda después de 3 dobleces.

18. **29**. Contemos todas las posibilidades para colocar los números del dado. Como dos posiciones se consideran una misma cuando pueden hacerse coincidir mediante un giro del dado, deberemos hacer la cuenta considerando algún número en una posición fija (y después también habrá que considerar que el dado puede rotar con ese número en la posición dada). Empecemos entonces pensando, por ejemplo, que la cara que tiene al 1 está hacia adelante. Hay 5 números distintos que

pueden haber quedado atrás. Para cada una de estas posibilidades, volvemos a elegir uno de los otros cuatro números para ponerlo arriba y así poder hacer la cuenta sin importar la posición del dado. Entonces en el sentido de las manecillas del reloj pueden estar colocados los otros tres números de $3 \times 2 \times 1 = 6$ formas. Entonces el número total de posibilidades es $6 \times 5 = 30$, y sólo una es la correcta.

19. **33**. En la parte de arriba hay 9 pues los cubitos que quedan encima tapan lo mismo que lo que tienen ellos mismos de superficie arriba. Cada lado tiene $3+2+1=6$. Entonces la respuesta es $9+4\times 6 = 33$.

20. **45**. En un cuadrado de lado 1 hay una estrella. En uno de lado 2 hay $2^2 = 4$ mosaicos y por tanto, se llega hasta el mosaico que tiene 4 estrellas; si el lado es 3, se llega hasta el mosaico que tiene $3^2 = 9$ estrellas, y así sucesivamente. Entonces buscamos el menor entero d para el cual $d^2 \geq 1996$. Como $44^2 = 1936 < 1996$ y $45^2 = 2025 > 1996$, el entero es 45.

21. **24**. Recordemos que para cualquier número x se tiene que $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Entonces $999\,999\,999\,999^2 - 1 = (999\,999\,999\,999 - 1)(999\,999\,999\,999 + 1) = (999\,999\,999\,998)10^{12}$.

Bibliografía

Comité Organizador de la Olimpiada Matemática Mexicana. *Olimpiada de Matemáticas, 140 Problemas.* Academia de la Investigación Científica, México 1993.

I. Niven, H. Zuckerman, *Introducción a la Teoría de Números.* Limusa-Wiley, México 1972.

H. Sariguin, *Problemas de Geometría.* Colección Ciencias Popular. Editorial MIR, Moscú 1989.

N. Vilenkin, *¿De cuántas formas?.* Editorial MIR, Moscú 1972.