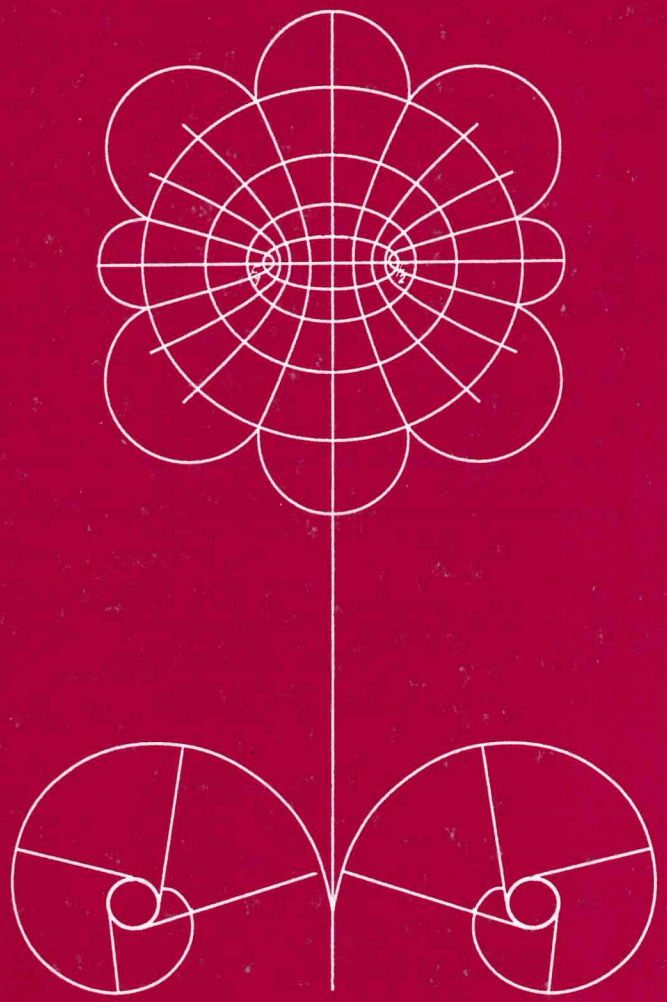
PROBLEMAS PARA LA 10a.

Olimpiada Mexicana de MATEMATICAS



SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

1996

Problemas para la

10ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

1996

Editado por

María Luisa Pérez Seguí

COMITÉ ORGANIZADOR

Presidente: José Antonio Gómez Ortega

Entrenamientos: Ignacio Barradas Bribiesca

Difusión y Publicaciones: Alejandro Illanes Mejía

Organización del Concurso Nacional: Ma. del Pilar Morfín Heras

Exámenes y Problemas: Ma. Luisa Pérez Seguí

Relaciones Internacionales: Eduardo Rivera Campos

CONTENIDO

Presentación 1

Problemario 4

Soluciones 14

Examen de la 10ª Olimpiada Iberoamericana 43

Examen de la 7ª Olimpiada de la Cuenca del Pacífico 44

Examen de la 36ª Olimpiada Internacional 45

Lecturas complementarias 46

PRESENTACIÓN

La Sociedad Matemática Mexicana organiza la 10ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los ganadores en ella formarán las selecciones que participarán en la XXXVIII Olimpiada Internacional de Matemáticas por celebrarse durante el mes de julio de 1997 en Argentina y en la XII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.

En la 10ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas pueden participar los jóvenes mexicanos nacidos despues del 1º de agosto de 1977. Los concursantes deberán estar inscritos en el bachillerato durante el primer semestre de 1997 y, para el 22 de julio de ese año, no deberán estar inscritos en ninguna escuela de nivel universitario.

Los problemas que aparecen en este folleto son problemas que aparecieron en concursos de las diferentes etapas de las olimpiadas de matemáticas. La intención del folleto es que sirva como orientación a los alumnos que desean participar en estas olimpiadas. Como se puede ver, los problemas que aparecen aquí, no son problemas rutinarios o problemas en los que se apliquen directamente los conocimientos que se adquieren en la escuela. Más bien son problemas que requieren de una buena dosis de ingenio y de esfuerzo para ser resueltos. Como en todos los aspectos del aprendizaje de las matemáticas, el esfuerzo individual y el enfrentamiento solitario con los problemas son importantes, pero también es muy importante la discusión con los compañeros y los profesores.

Una forma de manifestar creatividad en matemáticas es resolviendo problemas. Otra forma, que a veces requiere de más madurez, es inventando problemas. Invitamos a todos los lectores de este folleto: profesores, estudiantes, olímpicos y exolímpicos a que nos envíen problemas con solución. Estos problemas serán considerados para su inclusión en exámenes o en futuros folletos.

ETAPAS DE LA OLIMPIADA

Como ya es tradición, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas consta de tres etapas:

1. *Exámenes Estatales.* Estos exámenes servirán para formar las selecciones estatales que asistirán al Concurso Nacional.

2. *Concurso Nacional.* Este concurso se llevará a cabo en la ciudad de Mérida, Yuc., del 4 al 9 de noviembre de 1996. De él se elegirá a la preselección mexicana.

3. *Entrenamientos.* A la preselección que surja del Concurso Nacional se le entrenará intensivamente durante el primer semestre de 1997; también se le aplicarán exámenes para determinar los alumnos que representarán a México en las olimpiadas internacionales.

La participación en las tres etapas mencionadas es INDIVIDUAL.

RESUMEN DE RESULTADOS

OLIMPIADAS INTERNACIONALES DE MATEMATICAS

Desde 1987, año en que la Sociedad Matemática Mexicana organizó la 1ª olimpiada, los resultados han sido los siguientes:

Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1988	Australia	49	37
1989	Rep. Fed. De Alemania	50	31
1990	Rep. Popular de China	54	36
1991	Suecia	55	35
1992	Rusia	56	49
1993	Turquía	73	63
1994	Hong Kong	69	65
1995	Canadá	74	59

OLIMPIADAS IBEROAMERICANAS

Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1989	Cuba	13	3
1990	España	15	3
1991	Argentina	16	5
1992	Venezuela	16	6
1993	México	16	9
1994	Brasil	16	6
1995	Chile	18	9

En total, en las olimpiadas internacionales se han obtenido siete medallas de bronce y doce menciones honoríficas. En las olimpiadas iberoamericanas se han obtenido una medalla de oro, nueve medallas de plata, trece medallas de bronce y dos menciones honoríficas.

Agradecemos a las siguientes personas por sugerir problemas que aparecen en este folleto:

Alejandro Bravo
Héctor Flores
José Antonio Gómez
Francisco González
Alejandro Illanes
Jorge Luis López
Ma. Luisa Pérez
Eduardo Rivera
Benito Fabián Romero
Liudmila Sabinina

Este folleto incluye problemas de los exámenes estatales de:

Aguascalientes
Chihuahua
Nuevo León
Querétaro
Veracruz
Yucatán

COMITÉ ORGANIZADOR DE LA OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS

Marzo de 1996

PROBLEMARIO

Presentamos aquí algunos problemas para mostrar el tipo de matemáticas que se manejan en las primeras fases de las Olimpiadas de Matemáticas. Los primeros 42 problemas se han seleccionado de distintas etapas de algunos exámenes estatales y los últimos 6 formaron el Examen Nacional. Al final encontrarás las soluciones.

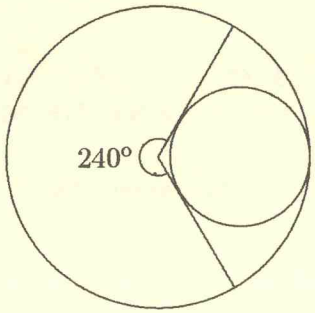
1. De una lámina cuadrada de 10 cm de lado se eliminan las esquinas para formar un octágono regular. ¿Cuál es el área de dicho octágono? *[Examen Eliminatorio de Aguascalientes, 1995.]*

2. Un cubo de 2 m de arista se corta con un plano que pasa por los puntos medios de tres aristas que concurren en un vértice. Calcula el volumen de la pirámide (esquina) así obtenida. (Nota: El volumen de una pirámide es $\frac{Sh}{3}$, donde S es el área de la base y h es la altura.) *[Examen Eliminatorio de Aguascalientes, 1995.]*

3. Un número es capicúa si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda (por ejemplo 5225, 333, 808 y 4 son capicúa). ¿Cuántos números capicúa de seis cifras (la primera no cero) son múltiplos de 7? (Puedes usar el resultado: Los números N de seis cifras o menos que son múltiplos de 7 son aquéllos que cuando se escriben en notación decimal $N = fedcba$ satisfacen que 7 es divisor de $a + 3b + 2c - d - 3e - 2f$.) *[Examen Eliminatorio de Aguascalientes, 1995.]*

4. Una fábrica de vidrio produjo 8 000 vasos para cumplir los pedidos de tres distribuidores, los cuales solicitaban los artículos en cajas de la siguiente manera: el primero en cajas de 36 vasos, el segundo en cajas de 24 vasos y el tercero en cajas de 20 vasos. Sabiendo que a todos les envió la misma cantidad de vasos y que envió la mayor cantidad de vasos que pudo, ¿con cuántos vasos se quedó el fabricante? *[Examen Final de Aguascalientes, 1995.]*

5. En la siguiente figura el radio del círculo mayor mide 1 m, el círculo menor es tangente al mayor y a los dos radios de éste que están dibujados. ¿Cuánto mide el radio del círculo menor? *[Examen Final de Aguascalientes, 1995.]*

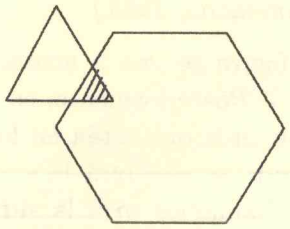


6. En un triángulo ΔABC con área S se escogen puntos M, N y P de manera que M está sobre el segmento AB y $AM = \frac{1}{3}AB$, N está sobre el segmento BC y $BN = \frac{1}{3}BC$ y P está sobre el segmento CA y $CP = \frac{1}{3}CA$. Demuestra que el área del triángulo ΔMNP es $\frac{S}{3}$. *[Examen Final de Aguascalientes, 1995.]*

7. ¿Cuánto suman las fracciones $\frac{a}{b}$ tales que a y b son enteros positivos, menores o iguales que 1000 y $a \leq b$ (por ejemplo $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{20}$, $\frac{122}{122}$, etc.). (Nota: Puedes usar la fórmula $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.) *[Examen Final de Aguascalientes, 1995.]*

8. Considera un triángulo isósceles. Sean R el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo y r el radio de la circunferencia inscrita. Prueba que la distancia d entre los centros de las dos circunferencias es $d = \sqrt{R(R-2r)}$. *[Examen de Coahuila, 1995.]*

9. Dibuja un hexágono (regular) y un triángulo sobrepuestos de manera tal que la figura formada por la intersección tenga el número máximo posible de lados. (En la figura siguiente la intersección tiene 3 lados.) *Examen Final de Nuevo León, 1995.]*



10. Encuentra (si es que existe) el menor número entero tal que al multiplicar sus dígitos el resultado sea 1890, y haz lo mismo con 1995. *Examen Final de Nuevo León, 1995.]*

11. Llama $R(k)$ al número formado por k números 1; es decir, $R(1) = 1$, $R(2) = 11$, $R(3) = 111$, etc. ¿Cuántos ceros aparecen en el número que resulta de dividir $R(144)$ entre $R(4)$? *[Examen Eliminatorio de Yucatán, 1995.]*

12. Dentro de los cuadritos de una cuadrícula de 42 renglones por 94 columnas escribimos los números del 1 al 3948 (uno en cada cuadrito) siguiendo el orden usal para escribir, es decir, en la esquina superior izquierda escribimos el 1, luego a su derecha el 2, etc. hasta terminar el primer renglón, y después empezamos por la izquierda del segundo renglón y así sucesivamente. Luego vamos tachando los cuadros uno por uno a partir del cuadro numerado con 1 y hacia su derecha, pero al terminar el primer renglón seguimos hacia abajo tachando toda la última columna

y después nos regresamos por el último renglón de derecha a izquierda y así sucesivamente vamos tachando todos en forma de espiral. ¿Cuál es el último número tachado? *[Examen de Yucatán, 1995.]*

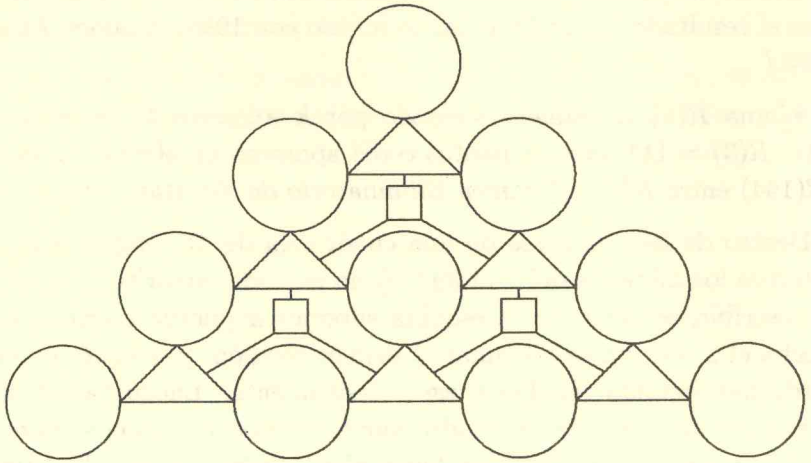
13. En un triángulo rectángulo isósceles con hipotenusa de longitud igual a 2 cm se ha inscrito un triángulo equilátero del cual uno de sus vértices está en el punto medio de la hipotenusa. Encuentra el área de tal triángulo equilátero. *[Examen de Yucatán, 1995.]*

14. Hallar todas las parejas de enteros positivos (a, b) que satisfagan la ecuación $a^2 - b^2 = 1995$. *[Examen de Yucatán, 1995.]*

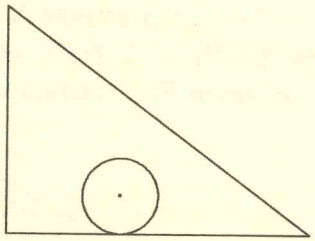
15. Sea $ABCD$ un cuadrilátero tal que sus vértices A, B, C y D se encuentren sobre una circunferencia. Sea P el punto de intersección de las diagonales AC y BD de cuadrilátero y sea E el punto de interesección de las rectas que son prolongación de los lados AB y CD del cuadrilátero. Demuestra que la bisectriz de $\angle APD$ es paralela a la bisectriz de $\angle AED$. *[Examen de Yucatán, 1995.]*

16. Sea $\Delta\, ABC$ un triángulo rectángulo en C. Sobre la hipotenusa se construye un cuadrado de lado AB. Sea D el centro del cuadrado. Demuestra que $CD = \frac{\sqrt{2}}{2}(AC + BC)$. *[Examen de Chihuahua, 1995.]*

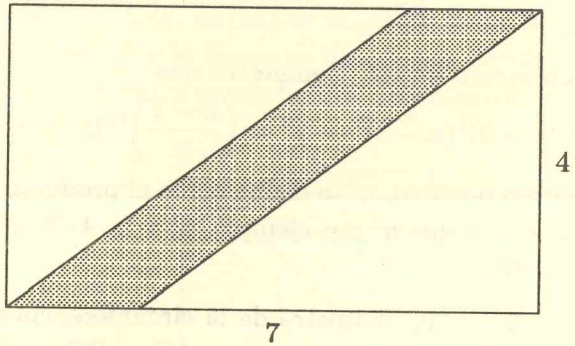
17. En los círculos de la figura se van a acomodar los números del 1 al 10 (uno en cada círculo, sin repetir). Posteriormente, en cada triángulo de la figura se escribirá la suma de los tres números que estén en los tres círculos contiguos. De la misma forma en cada cuadrado se escribirá la suma de los números que están en los triángulos contiguos. Si llamamos m a la suma de todos los números que aparezcan en los cuadrados, ¿cuál es el valor mínimo que puede tener m? *[Examen de Chihuahua, 1995.]*



18. La base de una caja tiene forma de un triángulo rectángulo cuyos lados miden 6 cm, 8 cm y 10 cm. Una ficha circular de 1 cm de radio gira sobre la base tocando siempre la orilla (como se muestra en la figura). Determina la longitud del camino que recorrió el centro de la ficha cuándo esta regresó por primera vez a su punto de partida. *[Examen de Chihuahua, 1995.]*



19. En un jardín de 7 m×4 m se trazó una vereda diagonal de 1 m de ancho, como se muestra en la figura. Calcula el área de la vereda. *[Examen de Veracruz, 1995.]*



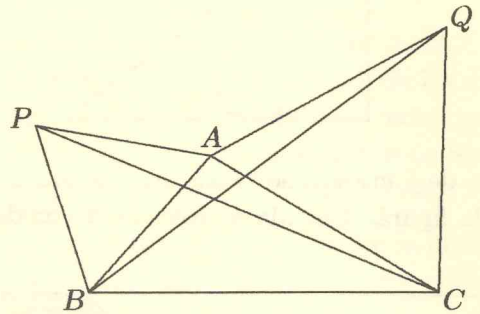
20. Encuentra todos los pares (x, y) de enteros no negativos tales que $x^2 - 50x + 25y = 0$. *[Examen de Veracruz, 1995.]*

21. En cierto torneo de ajedrez el número de competidores fue de 22. Se dividieron en dos grupos y en cada grupo todos los jugadores compitieron una vez entre sí. En el segundo grupo se jugaron 21 partidas más que en el primero. Karpov, que formaba parte del primer grupo y que no perdió ninguna partida ganó 6.5 puntos (se otorgaba 1 punto a cada jugador que ganara una partida y medio punto por empate). ¿En cuántas partidas empató Karpov? *[Examen de Veracruz, 1995.]*

22. ¿Cuántos enteros positivos de 222 cifras o menos tienen la propiedad de que la suma de sus dígitos es 1995? *[Examen de Veracruz, 1995.]*

23. Sea n un entero positivo. Prueba que si $3n+1$ es un cuadrado perfecto, entonces $n+1$ es la suma de tres cuadrados perfectos (por ejemplo, cuando $n=40$, se tiene que $3n+1=121=11^2$ y $n+1=41=6^2+2^2+1^2$. (Sugerencia: Escribe $3n+1=k^2$ y considera los distintos residuos que puede dejar k al dividirlo entre 3.) *[Examen Eliminatorio de Querétaro, 1995.]*

24. Sobre los lados AB y AC de un triángulo $\Delta\, ABC$ se construyen externamente los triángulos equiláteros $\Delta\, ABP$ y $\Delta\, ACQ$ (ver figura). Prueba que CP y BQ tienen la misma longitud. *[Examen Eliminatorio de Querétaro, 1995.]*

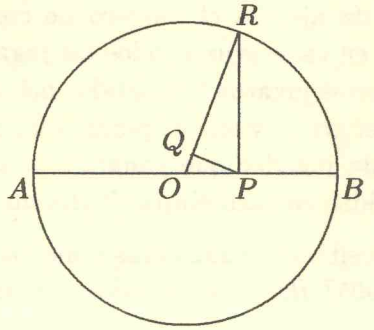


25. Sea $n>1$ un entero impar. Demuestra que

$$n^2(n-1)^3(n-2)^4(n-3)^5\cdots 2^n=\left(\frac{n-1}{2}\right)!(3!\cdot 5!7!\cdots n!)^2 2^{\frac{n-1}{2}}.$$

(Nota: Si n es un entero positivo, $n!$ se define como el producto de todos los enteros positivos menores o iguales que n; por ejemplo, $5!=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$.) *[Examen Final de Querétaro, 1995.]*

26. En la figura, AB es un diámetro de la circunferencia que tiene por centro al punto O. Además PR es perpendicular a AB y PQ es perpendicular a OR. Demuestra que la longitud de RQ es $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ donde a es la longitud de AP y b es la longitud de PB. *[Examen Final de Querétaro, 1995.]*

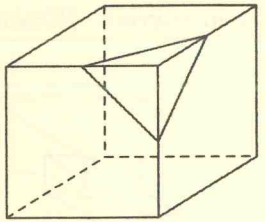


27. A Juan se le olvidó el número secreto que le daba acceso al gimnasio; sin embargo, previendo su olvido anotó en su libreta los siguientes datos: La suma de los cuatro dígitos del número es 9 y ninguno de ellos es 0; además el número es múltiplo de 5 y mayor que 1995. ¿Cuál es el número? *[Examen de práctica de Michoacán, 1995.]*

28. Con 48 cubitos de madera se quiere formar una pirámide de tres niveles de tal forma que el segundo nivel tenga el doble de cubitos que el primero, y el tercer nivel tenga el triple que el primero. ¿Cuántos cubitos debe tener el segundo nivel? (Nota: Todos los cubitos deben ser utilizados para formar la pirámide.) *[Examen de práctica de Michoacán, 1995.]*

29. Un juego de dominó extraño tiene fichas con los números del 1 al 8 en cada uno de sus dos lados. (Por ejemplo, cuatro de esas fichas son $\boxed{2|8}$, $\boxed{3|3}$, $\boxed{4|1}$ y $\boxed{4|2}$.) ¿Cuántas fichas tiene el juego en total si tiene todas las combinaciones de números del 1 al 8?. (Nota: Las fichas como $\boxed{2|8}$ y $\boxed{8|2}$ deben contarse una sola vez pues se consideran iguales.) *[Examen de práctica de Michoacán, 1995.]*

30. A un cubo sólido de 2 *cm* de lado se le quitan todos sus picos a una distancia sobre cada arista de 1 *cm*. (En la figura se ilustra por dónde se cortaría uno de los picos.) ¿Cuántos vértices tiene la nueva figura? *[Examen de práctica de Michoacán, 1995.]*



31. ¿Cuántos ceros hay al final de

$$\left(10^2 + 10^3 + \cdots + 10^{10}\right)^{1995}?$$

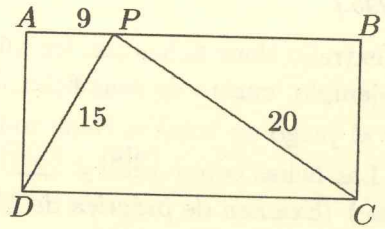
[Examen de práctica de Michoacán, 1995.]

32. En cierto planeta hay tantos días en una semana como semanas en un mes como meses en un año. Si un año tiene 1331 días, ¿cuántos días tiene cada semana? *[Examen de práctica de Michoacán, 1995.]*

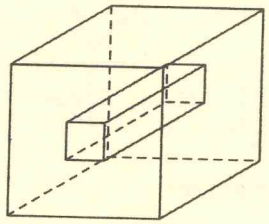
33. Usando los 36 vértices de una cuadrícula de 5 cm × 5 cm, ¿cuántos segmentos de 2 cm de longitud se pueden trazar? *[Examen Eliminatorio de Michoacán, 1995.]*

34. Ana y Beto van a hacer un mismo recorrido de 120 km por carretera. Ana viaja a una velocidad constante de 80 km por hora y Beto viaja a una velocidad también constante de 60 km por hora. Si salen del mismo lugar (pero no al mismo tiempo) y se encuentran a la mitad del recorrido, ¿cuántos minutos antes salió Beto que Ana? *[Examen Eliminatorio de Michoacán, 1995.]*

35. En la figura $ABCD$ es un rectángulo y P es un punto sobre el lado AB tal que el ángulo $\angle DPC$ es recto y las longitudes de los segmentos PA, PD y PC son (en cm) las indicadas en la figura. Hallar el área (en cm^2) del triángulo PBC. *[Examen Eliminatorio de Michoacán, 1995.]*

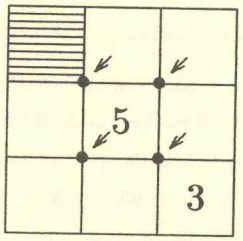


36. En un cubo sólido de 4 cm de lado se hace una perforación en forma de prisma recto con base cuadrada de 1 cm de lado desde el centro de cada cara hasta su cara opuesta. (En la figura se ilustró una de las perforaciones; hay que hacer dos perforaciones más usando las otras parejas de caras opuestas.) ¿Cuántos centímetros cúbicos de volumen tiene el nuevo sólido? *[Examen Eliminatorio de Michoacán, 1995.]*

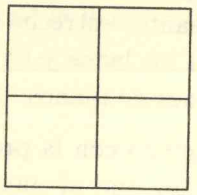


37. ¿Cuál es la cifra decimal que ocupa el lugar 1995 en el desarrollo decimal de $\frac{4}{101}$? (Por ejemplo, en el desarrollo decimal de $\pi = 3.14159\ldots$, las cifras decimales son las que aparecen a la derecha del punto decimal y los lugares que ocupan son: el lugar 1 lo ocupa el 1, el lugar 2 lo ocupa el 4, el lugar 3 lo ocupa el 1, etc.) *[Examen Eliminatorio de Michoacán, 1995.]*

38. En las casillas de la cuadrícula de la figura se van a escribir los números enteros del 1 al 9 (uno en cada una, sin repetir). Queremos que alrededor de cada vértice marcado con una flecha la suma de los cuatro números que queden sea 20. Si escribes 5 y 3 como se indica, ¿qué número deberá quedar en la casilla sombreada? *[Examen Eliminatorio de Michoacán, 1995.]*



39. Prueba que todo cuadrado se puede cortar en 6 cuadrados, en 7 cuadrados, en 8 cuadrados y en 11 cuadrados. (Nota: Los cuadrados en los que partas no tienen que se iguales entre sí. Para cada uno de los cuatro casos, dibuja un cuadrado e indica ahí claramente con líneas por dónde harías los cortes; por ejemplo si te hubiéramos pedido que probaras que todo cuadrado se puede partir en 4 cuadrados, tu dibujo podría haber sido el de la figura.) *[Examen Semifinal de Michoacán, 1995.]*



40. Cierto reloj tiene una forma curiosa de funcionar. Al ponerlo a andar sus dos manecillas marcan las 12. Después, cada minuto que pasa, la manecilla grande avanza como sigue: Al cabo de un minuto salta al número 1; después de otro minuto avanza dos números (hasta el 3); después de otro minuto avanza tres números (hasta el 6); otro minuto más y se va cuatro números más adelante (al 10); después 5 números (hasta el 3), etc. Mientras tanto la manecilla chica no se mueve, hasta que la manecilla grande se detiene en el 12 (en cuenta exacta, no sólo pasando por arriba), y entonces la manecilla chica avanza un número. ¿Cuántos minutos después de que se echa a andar el reloj, las dos manecillas volverán a marcar juntas el 12 por primera vez? *[Examen Final de Michoacán, 1995.]*

41. Ana ha decidido salir a caminar exactamente un kilómetro cada día. Vive en una ciudad cuadriculada de $5\,km \times 5\,km$ en que cada cuadra mide $100\,\mathrm{m} \times 100\,\mathrm{m}$ y su casa está en una esquina del centro. ¿Durante cuántos días puede hacer recorridos distintos si siempre empieza los recorridos saliendo de su casa y terminando también en ella pero sin repetir ningún otro punto en el recorrido de cada día? (Nota: Recorridos de días distintos pueden tener partes en común e inclusive determinar el mismo camino pero en sentido contrario.) *[Examen Final de Michoacán, 1995.]*

42. Sean x, y y z dígitos del 1 al 9 distintos entre sí. Encuentra todas las ternas (x, y, z) tales que la suma de todos los números que se obtienen permutando (es decir, revolviendo) x, y y z sea igual a 5 veces X, donde X es el número de tres cifras iguales x (es decir, $xyz + xzy + yxz + yzx + zxy + zyx = 5 \times xxx$). *[Examen Final de Michoacán, 1995.]*

Los siguientes 6 problemas constituyeron el Examen Nacional de la 9ª Olimpiada de Matemáticas. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4:30 h para resolverlos.

43. En una Olimpiada de Matemáticas los concursantes están ocupando todos los asientos de un salón rectangular donde los asientos están alineados en filas y columnas de tal manera que hay más de dos filas y en cada fila hay más de dos asientos. Al inicio del examen un profesor les sugiere que se deseen suerte dándose la mano; cada uno de los concursantes estrecha la mano de los concursantes que están junto a él (adelante, atrás, a los lados y en diagonal) y sólo a éstos. Alguien observa que se dieron 1020 apretones de manos. ¿Cuántos concursantes hay?

44. Considera 6 puntos en el plano con la propiedad de que 8 de las distancias entre ellos son iguales a 1. Muestra que al menos tres de los puntos forman un triángulo equilátero de lado 1.

45. Sean A, B, C y D vértices consecutivos de un heptágono regular; sean AL y AM las tangentes desde A a la circunferencia de centro C y radio CB. Sea N la intersección de AC y BD. Demuestra que los puntos L, M y N son colineales.

46. (a) Encuentra un subconjunto B del conjunto $A = \{1, 2, 3, \ldots, 40\}$, de manera que B tenga 26 elementos y que ningún producto de dos elementos de B sea un cuadrado perfecto.

(b) Demuestra que no se puede obtener un subconjunto de A de 27 elementos con la característica mencionada en (a).

47. Sea $ABCDE$ un pentágono (convexo) de manera que los triángulos $\Delta\, ABC$, $\Delta\, BCD$, $\Delta\, CDE$, $\Delta\, DEA$, y $\Delta\, EAB$ son todos de igual área. Demuestra que:

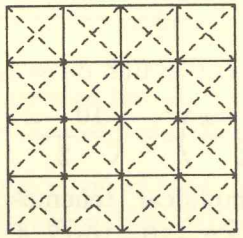
$$\text{área}(ABCDE) < \text{área}(\Delta\, ABC) < \text{área}(ABCDE).$$

48. Sobre los cuadrados de una cuadrícula de 4×4 se colocan símbolos 0 y 1; estos símbolos se cambian uno por el otro al aplicar alguna de las siguientes tres operaciones:

La operación (a) cambia de símbolos todos los elementos de un renglón.

La operación (b) cambia de símbolos todos los elementos de una columna.

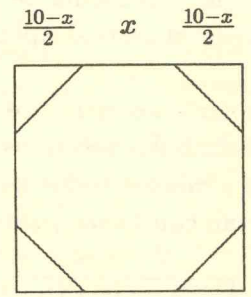
La operación (c) cambia de símbolos todos los elementos de una diagonal (las diagonales son las que se muestran con líneas punteadas en la figura).



Determina cuáles son los arreglos de los que se puede partir para que con un número finito de operaciones se pueda llegar a un arreglo de puros símbolos 0.

SOLUCIONES

1. Para obtener un octágono regular, las esquinas que deben eliminarse son triángulos rectángulos isósceles de catetos $\frac{10-x}{2}$ e hipotenusa x como se muestra en la figura.



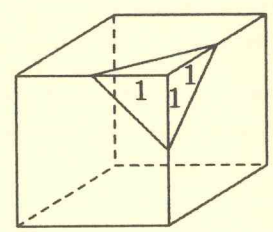
Aplicando el teorema de Pitágoras en uno de estos triángulos se tiene que

$$\left(\frac{10-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{10-x}{2}\right)^2 = x^2.$$

Al eliminar los paréntesis y simplificar, tenemos la ecuación $x^2 + 20x - 100 = 0$, cuyas soluciones son $-10+10\sqrt{2}$ y $-10-10\sqrt{2}$. Como x debe ser positivo, tomamos sólo la primera solución. Entonces el área de cada triángulo que se elimina es $25(3-2\sqrt{2})\,\mathrm{cm}^2$, por lo que el área del octágono será la del cuadrado menos la de los 4 triángulos: $100 - 4 \times 25(3-2\sqrt{2}) = 200(-1+\sqrt{2})\,\mathrm{cm}^2$.

2. El cálculo del volumen puede complicarse innecesariamente al tomar el triángulo equilátero como base. Sin embargo resulta muy simple si se elige como base a cualquier otra cara pues cada una es un triángulo rectángulo con base y altura iguales a 1 m (ver la figura). Entonces el volumen de la pirámide es

$$\frac{\frac{1}{2} \times 1}{3}\,\mathrm{m}^3 = \frac{1}{6}\,\mathrm{m}^3.$$



3. Buscamos números cuya notación decimal sea $abccba$, donde $a \neq 0$ y $a+3b+2c-c-3b-2a$, que es igual a $c-a$, sea múltiplo de 7 (según el criterio de divisibilidad mencionado en la nota). Puesto que a y c son dígitos, las únicas posibilidades para que $c-a$ sea múltiplo de 7 son $c-a=0$, $c-a=7$ y $c-a=-7$. Observemos además que b puede ser cualquier dígito.

En el primer caso ($c=a$) hay 90 posibilidades (pues a puede ser cualquier dígito no cero, c es igual a a, y b tiene diez posibilidades (cualquier dígito del 0 al 9). (El menor número aquí es 101 101, le siguen 111 111, 121 121, etc., hasta 989 989 y 999 999.)

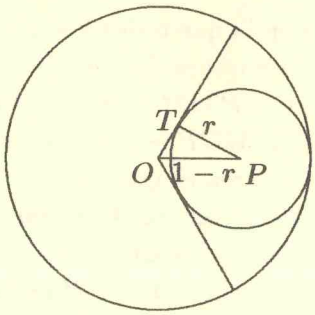
En el segundo caso ($c-a=7$), los dígitos a y c pueden ser, respectivamente, 1 y 8, o 2 y 9. Así el número de posibilidades en este caso es 20 (pues son de la forma $1b88b1$ o $2b99b2$, y en cada uno de éstos hay 10 posibilidades para b).

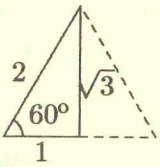
Para el tercer caso ($c-a=-7$), los dígitos a y c pueden ser, respectivamente, 7 y 0, 8 y 1, o 9 y 2; o sea, los números son de la forma $7b00b7$, $8b11b8$ o $9b22b9$; otra vez, en cada uno de estos subcasos hay 10 posibilidades para un total de 30.

Por lo anterior, hay 140 números capicúa, de seis cifras y divisibles entre 7.

4. El número N de vasos que envió el fabricante a cada distribuidor debe ser múltiplo de 36, de 24 y de 20, así que también debe serlo del mínimo común múltiplo de ellos. Encontremos éste (una forma sencilla para hacerlo es descomponer cada uno de los números como producto de potencia de primos y construir el mínimo común múltiplo tomando la mayor potencia de cada primo que aparezca en estas descomposiciones). Como $36=2^2\times 3^2$, $24=2^3\times 3$ y $20=2^2\times 5$, entonces su mínimo común múltiplo es $2^3\times 3^2\times 5=360$. Entonces N es de la forma $360k$ para algún entero k; además $3N\leq 8000$, por lo que $3\times 360k\leq 8000$, de donde el mayor valor posible para k es 7. Para $k=7$ tenemos que $3N=7560$, de donde el número de vasos con los que se quedó el fabricante es $8000-7560=440$.

5. Sea r el radio de la circunferencia menor. Consideremos el triángulo rectángulo ΔOTP marcado en la figura (O y P son los centros de las circunferencias y T es el punto de tangencia).





Observemos que

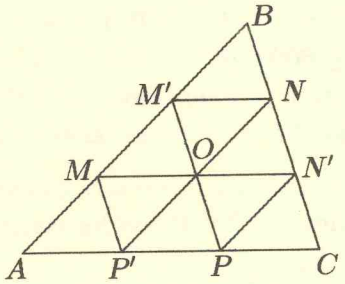
$$\angle TOP = \frac{360^\circ - 240^\circ}{2} = 60^\circ$$

y que la longitud de OP es $1 - r$, así que $\cos 60^\circ = \frac{r}{1-r}$. Por otro lado sabemos que $\cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (esto se comprueba fácilmente partiendo a la mitad un triángulo equilátero de lado 2 y aplicando el teorema de Pitágoras a uno de los triángulos obtenidos, como se ilustra en la figura). Comparando los dos resultados tenemos que $\frac{r}{1-r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Entonces $2r = \sqrt{3}(1-r)$ y, despejando r tenemos

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}.$$

(Multiplicando numerador y denominador en esta expresión y simplificando podemos obtener una expresión más sencilla para r que es $r = 2\sqrt{3} - 3$.)

6. Escojamos puntos M', N' y P' de tal manera que M' esté sobre el segmento AB y $AM' = \frac{2}{3}AB$, N' esté sobre el segmento BC y $BN' = \frac{2}{3}BC$ y P' esté sobre el segmento CA y $CP' = \frac{2}{3}CA$. Observemos entonces que, por proporcionalidad, $P'M$, PM' y BC son paralelos, $P'M = \frac{1}{3}BC$ y $PM' = \frac{2}{3}BC$. Análogas proporciones y paralelismos ocurren con los otros lados de ΔABC. Además MN', $P'N$ y PM' concurren en un punto pues si O es el punto de intersección de PM' con MN', entonces $P'MOP$ y $OM'NN'$ son paralelogramos iguales y sus lados son paralelos, por tanto también lo son sus diagonales $P'O$ y ON; pero como ambas pasan por O, son una misma línea.



Tenemos entonces la figura que se muestra en la que todos los triángulos son iguales (pues todos son la mitad de los paralelogramos que se forman; por ejemplo, $\Delta AMP'$ y $\Delta P'MO$ son la mitad del paralelogramo $AP'OM$ y por tanto tienen la misma área, pero $\Delta P'MO$ también es la mitad del $P'MOP$ así que su área también es igual a la de $\Delta P'OP$). Como son 9 triángulos, su área es igual a $\frac{1}{9}\mathcal{S}$. Ahora observemos que PM es diagonal del paralelogramo $P'MOP$, así que también el área de ΔPMO es igual a $\frac{1}{9}\mathcal{S}$, y lo mismo ocurre con las áreas de los triángulos ΔMON y ΔNOP. Sumando estas últimas tres tenemos que el área de ΔMNP es $\frac{1}{3}\mathcal{S}$.

7. Sumemos primero las fracciones con el mismo denominador:
Sólo hay una con denominador 1 que es 1.
Con denominador 2:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2}=\frac{(1+2)}{2}=\frac{3}{2}.$$

Con denominador 3:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3}=\frac{(1+2+3)}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{3\times 4}{3}=\frac{4}{2}.$$

Con denominador 4:

$$\frac{1}{4}+\cdots+\frac{4}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{4\times 5}{4}=\frac{5}{2}.$$

$$\vdots$$

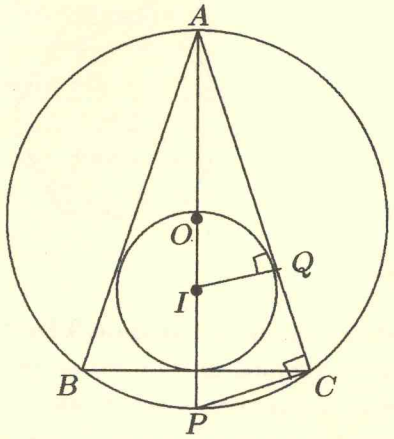
Con denominador 1000:

$$\frac{1}{1000}+\cdots+\frac{1000}{1000}=\frac{1}{2}\times\frac{1000\times 1001}{1000}=\frac{1001}{2}.$$

Ahora sumemos los resultados parciales obtenidos (para poder usar la fórmula que nos dice cómo sumar los primeros naturales aquí debemos completar agregando el 1 que nos falta y después compensar restando el 1 que agregamos):

$$\frac{2+3+4+5+\cdots+1001}{2}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1001\times 1002}{2}-1\right)=250\,750.$$

8. Sean I el centro del círculo inscrito en $\Delta\, ABC$, O el centro de la círculo circunscrito, AP diámetro de éste, y Q el punto de tangencia del círculo inscrito con AC.



Recordemos que I es la intersección de las bisectrices, O la de las mediatrices y, por ser $AB = AC$, entonces la mediatriz y la bisectriz en A coinciden.

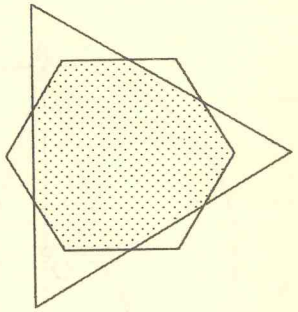
Para probar la igualdad pedida empecemos por observar que los triángulos $\Delta\, AIQ$ y $\Delta\, APC$ son semejantes por tener dos ángulos iguales (el ángulo en A es común y ambos tienen un ángulo recto, por teoremas conocidos de Geometría), y entonces $\frac{AI}{AP} = \frac{IQ}{PC}$; pero $AI = R + d$, $AP = 2R$ y $IQ = r$, de donde, sustituyendo,

$$\frac{R+d}{2R} = \frac{r}{PC}. \qquad (*)$$

Ahora veamos que $PC = IP$. Tenemos que $\angle BCP = \angle BAP$ por abarcar el mismo arco de círculo (según un teorema conocido de Geometría). Además $\angle BAP = \angle PAC$ por ser AP bisectriz del ángulo $\angle BAC$. Por otro lado, tenemos que la suma del ángulo $\angle AIC$ con $\angle CIP$ es 180° y también su suma con $\angle CAI + \angle ICA$ es 180° (esto último pues son los ángulos internos del triángulo $\Delta\, ACI$); además $\angle CAI = \angle PCB$ y $\angle ICA = \angle BCI$, así que, comparando, tenemos que $\angle CIP = \angle CAI + \angle ICA = \angle PCB + \angle BCI = \angle PCI$, de donde el triángulo PCI es isósceles con lados iguales $PI = R - d$ y PC. Regresemos ahora a la igualdad $(*)$, que habíamos obtenido arriba, sustituyendo PC por $R - d$ y despejando d:

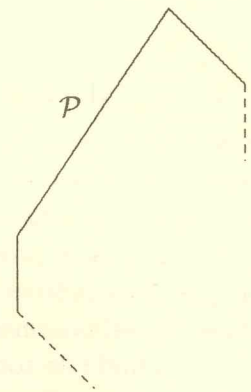
$$\begin{aligned} \frac{R+d}{2R} &= \frac{r}{R-d} \\ (R+d)(R-d) &= 2Rr \\ R^2 - d^2 &= 2Rr \\ d &= \sqrt{R(R-2r)}. \end{aligned}$$

9. Observemos la siguiente figura.



Observamos que la intersección es un polígono de 9 lados. Si hacemos intentos por obtener más lados nos convenceremos de que no es posible. Por supuesto, hacer intentos no basta para quedar plenamente convencidos porque ¿qué tal si se pueden conseguir más lados con un intento que no se nos ocurrió? Necesitamos entonces dar un argumento más general: Supongamos que tenemos un polígono que se obtiene de intersectar un triángulo con un hexágono y consideremos un lado $\mathcal{P}$ de tal polígono.

Como el polígono se obtiene de la intersección del triángulo con el hexágono entonces el lado $\mathcal{P}$ debe ser parte de un lado del triángulo o de un lado del hexágono. Supongamos que $\mathcal{P}$ es parte de un lado $\mathcal{T}$ del triángulo.



Notemos que el polígono no puede intersectar a $\mathcal{T}$ más que en el lado $\mathcal{P}$ del polígono pues el hexágono es regular (y entonces cumple la propiedad de que si dos puntos están sobre la superficie del hexágono, el segmento de recta que los une también está todo dentro de la superficie del hexágono). Entonces cada lado del hexágono no puede ayudar más que a formar un lado del polígono. El mismo razonamiento podríamos haber aplicado si $\mathcal{P}$ hubiera sido parte de un lado del hexágono, así que también tenemos que cada lado del hexágono contribuye a lo más a formar un lado del polígono. Entonces el número de lados del polígono no puede exceder $6+3=9$.

10. Consideremos la descomposición de los números en producto de primos: $1890 = 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 7$ y $1995 = 3\cdot 5\cdot 7\cdot 19$. Como 19 es un divisor de 1995, no es posible encontrar ningún número cuyo producto de cifras sea 1995. El menor número con esa propiedad para 1890 lo encontramos combinando los primos de tal manera que el producto sea un dígito; juntamos el 2 con un 3 y los dos 3's; entonces el número buscado tiene los dígitos 6, 9, 5 y 7; para que sea lo menor posible los ponemos en orden creciente: 5679.

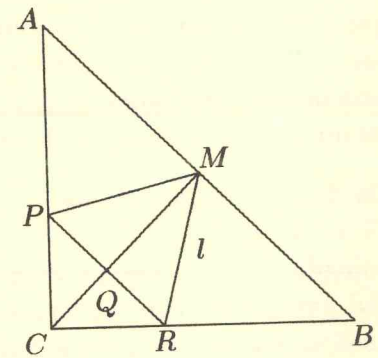
11. Al hacer la división (con el algoritmo conocido), nos damos cuenta que $\frac{R(144)}{R(4)} = 1000100010001\cdots$. Cada cuatro cifras aparecen tres 0's, excepto con las cuatro primeras. Entonces el número total de ceros es $3(144-4)=420$.

12. Podemos hacer una tabla que nos indique en qué orden se van tachando renglones y columnas:

$\rightarrow$	$\downarrow$	$\leftarrow$	$\uparrow$	|	$\rightarrow$	$\downarrow$	$\leftarrow$	$\uparrow$	|	$\cdots$	|	$\rightarrow$	$\downarrow$	$\leftarrow$	$\uparrow$
r	c	r	c	|	r	c	r	c	|	$\cdots$	|	r	c	r	c
1	92	42	1	|	2	91	41	2	|	$\cdots$	|	21	72	22	

es decir, primero se tacha el renglón 1 en el sentido $\rightarrow$, después se tacha la columna 92 en el sentido $\downarrow$, etc. Notemos que la sucesión de flechas se repite cada 4 y para obtener los números de los renglones y columnas que se van tachando, se tiene que ir sumando o restando un 1 al bloque de cuatro precedente en el orden $+, -, -, +$ (por ejemplo, el paso del primer bloque al segundo es $1+1=2$, $92-1=91$, $42-1=41$, $1+1=2$). Entonces observamos que estas sumas y restas sólo podemos hacerlas 20 veces pues con eso ya se cubre el tachado de todos los renglones, de manera que el último bloque de la tabla es el que aparece. Entonces el último número tachado es el del renglón 22 y la columna 21. Para encontrar este número, observemos que en cada renglón se escribieron 94 números así que el número buscado es $94 \times 21 + 21 = 1995$.

13. Consideremos el dibujo siguiente:



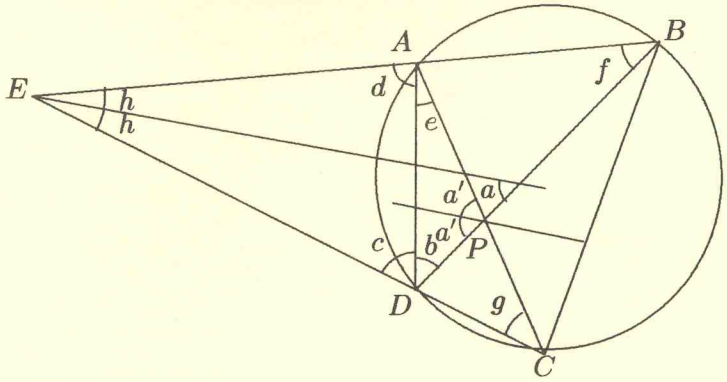
donde l es el lado del triángulo equilátero. Observemos que, por simetría, MC es bisectriz del ángulo $\angle BCA$, así que $\angle MCA = 45^\circ$ y $\Delta\, AMC$ y $\Delta\, RQC$ son isósceles y rectángulos. Entonces $MC = 1$ y $RC = \frac{l}{2}$, de donde $MR = 1 - \frac{l}{2}$. Por otro lado, por Pitágoras en $\Delta\, MRQ$, $MR = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$. Comparando los dos resultados y despejando l obtenemos $l = -1 \pm \sqrt{3}$, pero como $l > 0$, entonces $l = \sqrt{3} - 1$. El área de $\Delta\, MPQ$ es $\frac{1}{2} l \left(1 - \frac{l}{2}\right) = \sqrt{3} - \frac{3}{2}$.

14. Buscamos a y b enteros tales que $a^2-b^2 = 1995$, es decir, $(a+b)(a-b) = 1995$. La factorización de 1995 en producto de primos es $1995 = 3 \times 5 \times 7 \times 19$. Realizando todas las posibles combinaciones para escribir 1995 como producto de dos números enteros $1995 = xy$, con $x \geq y$ (considerando que $a + b \geq a - b$) tenemos

$$\begin{aligned} 1995 &= 1995 \times 1, \\ &= 665 \times 3, \\ &= 399 \times 5, \\ &= 285 \times 7, \\ &= 105 \times 19 \\ &= 133 \times 15, \\ &= 95 \times 21 \text{ y} \\ &= 57 \times 35. \end{aligned}$$

En cada caso tenemos que resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas; por ejemplo en el primero tenemos $a + b = 1995$, de donde, sumando las dos ecuaciones tenemos $2a = 1996$ y de aquí que $a = 998$ y, por tanto, $b = 997$. De la misma manera resolvemos el sistema en cada caso y obtenemos todas las posibilidades para las parejas (a, b) que son: $(998, 997)$, $(334, 331)$, $(202, 197)$, $(146, 139)$, $(62, 43)$, $(74, 59)$, $(58, 37)$ y $(46, 11)$.

15. Para empezar observemos la figura siguiente



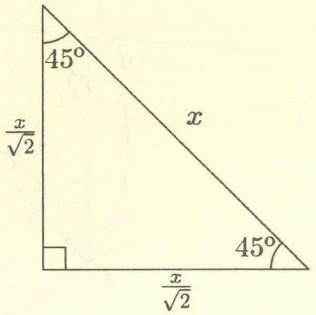
en la que las letras a', a, b, c, d, e, f, g y h denotan los ángulos señalados (el ángulo a es el que forma la bisectriz del ángulo $\angle AED$ con la recta BD. Para probar que las dos bisectrices son paralelas, bastará que probemos que los ángulos a y a' son iguales.

Notemos que $2h+c+d=180^{\circ}$ y que $a+h+c+b=180^{\circ}$ (las dos igualdades se dan porque estamos sumando ángulos interiores en triángulos). De aquí obtenemos

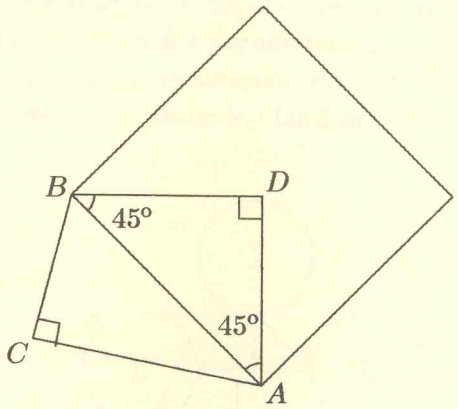
$$\begin{aligned} h &= 90^{\circ} - \frac{c+d}{2}, \\ a' &= 90^{\circ} - \frac{b+e}{2} \text{ y} \\ a &= 180^{\circ} - (h+c+b) \\ &= 180^{\circ} - (90^{\circ} - \frac{c+d}{2} + c + b) \\ &= 90^{\circ} - b + \frac{d-c}{2}. \end{aligned}$$

Entonces, si queremos probar que $a=a'$, tenemos que ser capaces de probar que $90^{\circ} - \frac{b+e}{2} = 90^{\circ} - b + \frac{d-c}{2}$, es decir, tenemos que comprobar que $\frac{b-e}{2} = \frac{d-c}{2}$ o, lo que es lo mismo, $b+c=d+e$. Esto ya está fácil pues tomando los ángulos internos de los triángulos $\Delta\, EDB$ y $\Delta\, EAC$ tenemos que $2h+b+c+f=180^{\circ}=2h+d+e+g$. Cancelando $2h$ obtenemos que $b+c+f=d+e+g$. Ahora notemos que $f=g$ porque abarcan el mismo arco de la circunferencia (según nos dice un teorema conocido de Geometría). Cancelándolas concluimos que $b+c=d+e$, que era lo que nos faltaba comprobar, y así las dos bisectrices son paralelas.

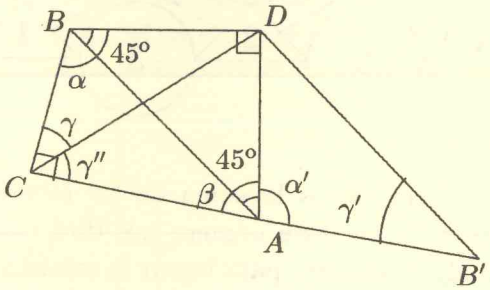
16. Primero notemos que $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. La clave para resolver este problema está en recordar que este número aparece cuando calculamos hipotenusas de triángulos rectángulos isósceles. Observemos la siguiente figura:



Si forzamos a la hipotenusa para que valga x entonces, por el teorema de Pitágoras, los catetos miden $\frac{x}{\sqrt{2}}$. Por tanto, si fuera posible construir un triángulo rectángulo isósceles cuyo cateto midiera CD y cuya hipotenusa midiera $AC + BD$, habríamos terminado. Probemos pues que esto sí es posible. La figura original del problema es la siguiente:



Una idea para construir el triángulo que mencionábamos arriba es alargar el cateto AC del triángulo ACB del problema hasta que mida $AC + CB$, como en el dibujo



Observemos ahora que los triángulos $\Delta\, AB'D$ y $\Delta\, BCD$ son congruentes pues

(a) $\alpha' = \alpha$ puesto que en el cuadrilátero $ACBD$ hay dos ángulos rectos y $\alpha + \beta = 180^\circ = \alpha' + \beta$,

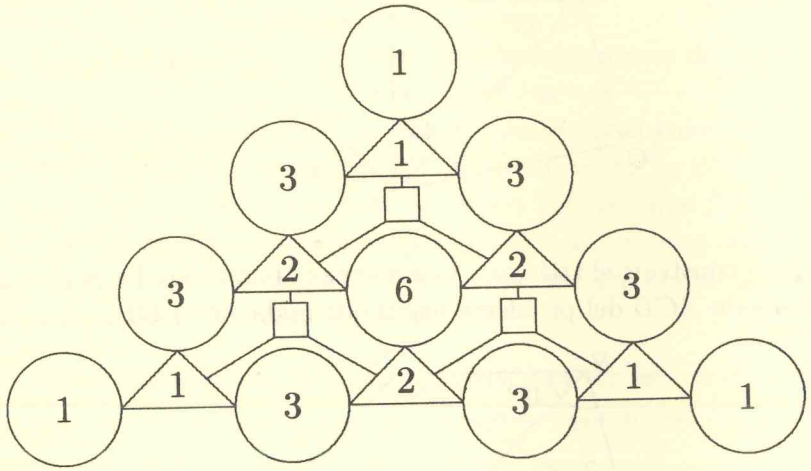
(b) $B'A = BC$ por construcción y

(c) $AD = BD$ pues ambos son lados del triángulo isósceles $\Delta\, ADB$.

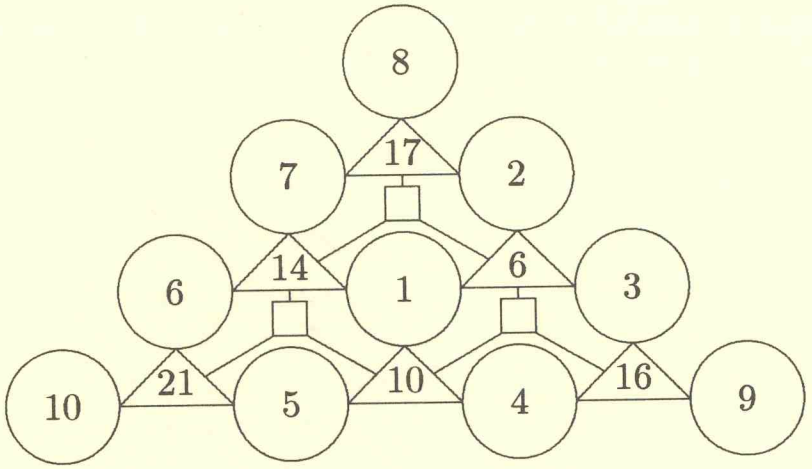
Estas tres afirmaciones son suficientes para asegurar la congruencia de los triángulos mencionados arriba. En particular, los ángulos γ y γ' son iguales. Ahora vamos a ver que $\gamma = 45^\circ$. Para esto notemos que a causa de los dos ángulos rectos opuestos que tiene, el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico (según un teorema conocido de Geometría).

Como el triángulo ADB es isósceles, el arco comprendido entre A y D es del mismo tamaño que el arco comprendido entre B y D. Entonces los ángulos γ'' y γ tienen que ser iguales y, entonces ambos miden 45°. Por tanto $\gamma'' = \gamma' = 45°$. Esto implica que el ángulo $\angle B'DC$ es recto. De esta manera, $\Delta\, CDB'$ es un triángulo rectángulo e isósceles. Como decíamos arriba, usando el teorema de Pitágoras tenemos que $CD = \frac{CB'}{\sqrt{2}} = \frac{AC+BC}{\sqrt{2}}$.

17. Para encontrar la mínima m, en lugar de escribir los números del 1 al 10 en los círculos, veamos cuántas veces contribuye cada círculo a la suma total. Para ello, en cada triángulo escribamos, como se muestra en la figura, el número de veces que ese triángulo contribuye a la suma final (es igual al número de líneas que lo unen con cuadrados).



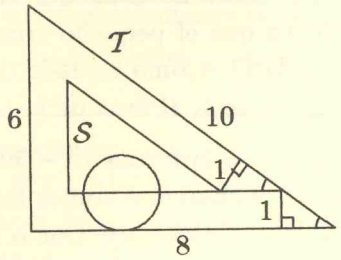
Después, en cada círculo escribamos la suma de los números que se escribieron en los triángulos adyacentes a él (este número nos dirá cuántas veces ese círculo contribuye a la suma final). Entonces, para lograr la mínima m, bastará colocar en los círculos que más contribuyen a la suma los números más chicos y en los que menos contribuyen, los más grandes: Colocamos el 1 en el círculo central, los números del 2 al 7 en los círculos que contribuyen 3 veces y en los extremos ponemos el 8, el 9 y el 10:



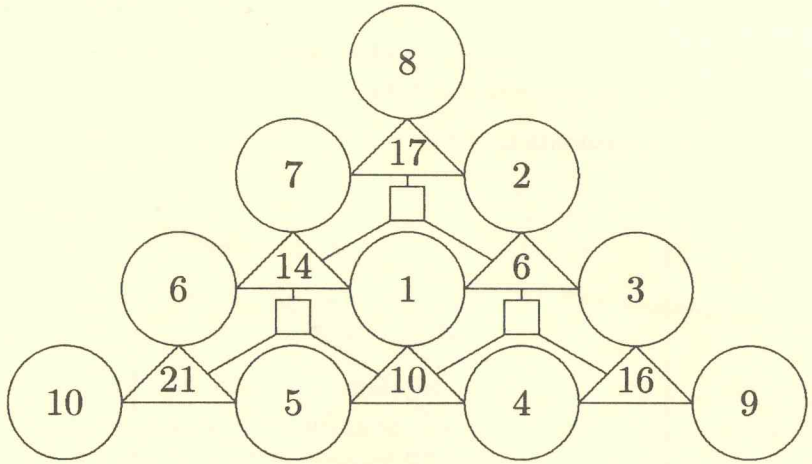
Entonces la suma final (y por tanto la m mínima buscada) es

$$6 \times 1 + 3 \times (2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) + 1 \times (8 + 9 + 10) = 114.$$

18. Lo que tenemos que calcular es el perímetro del triángulo $\mathcal{S}$ de la figura. Notemos que las líneas que definen a $\mathcal{S}$ son paralelas a las del triángulo original $\mathcal{T}$, de manera que los triángulos son semejantes; entonces, como conocemos las longitudes de los lados de $\mathcal{T}$, para conocer los de los lados de $\mathcal{S}$, bastará con conocer la de un lado. Calculemos entonces la del cateto mayor. Un truco útil para nuestro propósito es fijarnos en los triangulitos de la derecha de la figura.



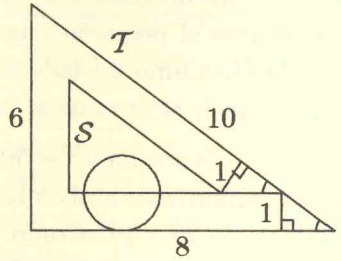
Observemos que los dos triangulitos son semejantes pues son triángulos rectángulos y los ángulos marcados son iguales por ser ángulos correspondientes entre paralelas. Además ambos tienen un cateto de longitud igual a 1, así que son congruentes. Otra observación útil es que los triangulitos son semejantes a $\mathcal{T}$. Como tienen un cateto que mide 1 y el cateto respectivo en $\mathcal{T}$ mide 6, entonces la razón de semejanza es de $\frac{1}{6}$ y de aquí que la hipotenusa de los triangulitos mide $\frac{10}{6}$ y el otro cateto mide $\frac{8}{6}$. Ahora ya podemos calcular la longitud del cateto de $\mathcal{S}$ que buscábamos.



Entonces la suma final (y por tanto la m mínima buscada) es

$$6 \times 1 + 3 \times (2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) + 1 \times (8 + 9 + 10) = 114.$$

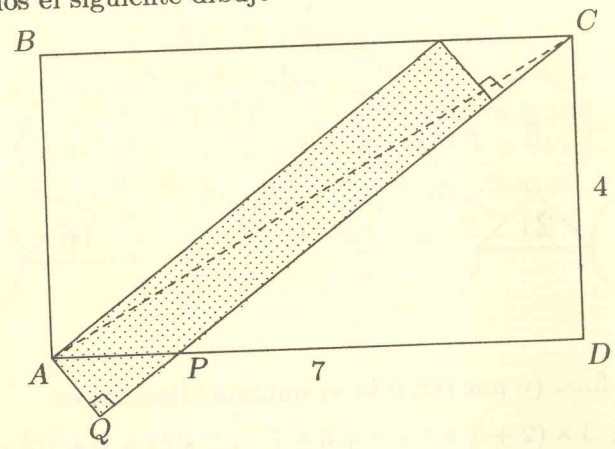
18. Lo que tenemos que calcular es el perímetro del triángulo $\mathcal{S}$ de la figura. Notemos que las líneas que definen a $\mathcal{S}$ son paralelas a las del triángulo original $\mathcal{T}$, de manera que los triángulos son semejantes; entonces, como conocemos las longitudes de los lados de $\mathcal{T}$, para conocer los de los lados de $\mathcal{S}$, bastará con conocer la de un lado. Calculemos entonces la del cateto mayor. Un truco útil para nuestro propósito es fijarnos en los triangulitos de la derecha de la figura.



Observemos que los dos triangulitos son semejantes pues son triángulos rectángulos y los ángulos marcados son iguales por ser ángulos correspondientes entre paralelas. Además ambos tienen un cateto de longitud igual a 1, así que son congruentes. Otra observación útil es que los triangulitos son semejantes a $\mathcal{T}$. Como tienen un cateto que mide 1 y el cateto respectivo en $\mathcal{T}$ mide 6, entonces la razón de semejanza es de $\frac{1}{6}$ y de aquí que la hipotenusa de los triangulitos mide $\frac{10}{6}$ y el otro cateto mide $\frac{8}{6}$. Ahora ya podemos calcular la longitud del cateto de $\mathcal{S}$ que buscábamos.

Dicha longitud es igual a $8 - \left(1 + \frac{10}{6} + \frac{8}{6}\right) = 4$. Esto nos dice que la razón de semejanza de $\mathcal{S}$ con $\mathcal{T}$ es de $\frac{1}{2}$ así que el otro cateto de $\mathcal{S}$ mide 3 y la hipotenusa mide 5. El perímetro de $\mathcal{S}$ es $4 + 5 + 3 = 12$.

19. Observemos el siguiente dibujo



Por el teorema de Pitágoras, la diagonal del rectángulo original mide $\sqrt{65}$. El triangulito $\Delta\, APQ$ es semejante al triángulo $\Delta\, CAD$. Además la razón de semejanza es igual a $\frac{1}{4}$, de manera que $\frac{PQ}{AD} = \frac{1}{4} = \frac{AP}{PC}$, y de aquí que $PC = 4 \cdot AP$ y $AD = 4 \cdot PQ$. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo $\Delta\, ACQ$, tenemos $QP + PC = QC = \sqrt{65 - 1} = 8$; y así $4 \cdot AP + \frac{PD}{4} = 8$; pero también tenemos que $AP + PD = AD = 7$, así que combinando estas dos ecuaciones y resolviendo tenemos $AP = \frac{5}{3}$, $PD = \frac{16}{3}$ y, entonces $PQ = \frac{4}{3}$ y $PC = \frac{20}{3}$. Ahora notemos que el área de la banda es igual al área del rectángulo sombreado ya que el pequeño triángulo de la esquina superior derecha es igual al triángulo $\Delta\, APQ$. Como un lado de la banda rectangular mide lo mismo que PC y el otro lado mide 1, el área de la banda es $\frac{20}{3}$.

20. Reescribamos la ecuación en la forma $x^2 - 50x = -25y$ y completemos el miembro izquierdo a un cuadrado sumando a ambos lados de la igualdad el número 25^2. Tenemos entonces $(x - 25)^2 = 25(25 - y)$. Como 25 es un cuadrado, para que su producto con $25 - y$ también sea cuadrado, éste último deberá ser, a su vez, un cuadrado. Las posibilidades las ponemos en una tabla:

$25-y$	y	$x=\pm 5\sqrt{25-y}+25$
0	25	25
1	24	30 o 20
4	21	35 o 15
9	16	40 o 10
16	9	45 o 5
25	0	50 o 0

Entonces las posibilidades para (x, y) son $(25, 25)$, $(30, 24)$, $(35, 21)$, $(40, 16)$, $(45, 9)$, $(50, 0)$, $(20, 24)$, $(15, 21)$, $(10, 16)$, $(5, 9)$ y $(0, 0)$.

21. Sean n el número de integrantes del primer grupo y k el número de integrantes del segundo. Entonces el número de partidos que se jugaron en el primer grupo es $\frac{n(n-1)}{2}$ y el del segundo grupo es $\frac{k(k-1)}{2}$ y tenemos que

$$\frac{n(n-1)}{2}+21=\frac{k(k-1)}{2}. \qquad (*)$$

Por otro lado, $n+k=22$, así que $k=22-n$ y, sustituyendo en $(*)$ y despejando n, tenemos que $n=10$. Llamemos g al número de partidas ganadas por Karpov y e al número de empatadas. Entonces

$$g+e=n-1=9 \text{ y}$$
$$g+.5e=6.5.$$

Restando la segunda ecuación de la primera y despejando e obtenemos $e=5$.

22. Queremos encontrar cuántas soluciones tiene la ecuación

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{222}=1995 \text{ si } 0\leq a_1, a_2, \ldots, a_{222}\leq 9.$$

Como $222\times 8=1776$ y $1995-1776=219$, debe haber por lo menos 219 $9'$s.

1er caso: Números con exactamente 219 $9'$s. En este caso la suma de los $9'$s será 1971 y nos faltarán $3(=222-219)$ dígitos cuya suma sea $24(=1995-1971)$; entonces los 3 números faltantes deberán ser $8'$s. La cantidad de números con 219 $9'$s y 3 $8'$s está dada por la elección de las tres posiciones que ocupan los $8'$s en las 222 posibles que es $\frac{222\times 221\times 220}{6}=1\,798\,940$. (Para ver esto último, observemos que el primer 8, que podemos llamar momentáneamente 8_1, tiene 222 posiciones posibles, el segundo, 8_2, tiene 221 y el tercero, 8_3, 220; sin embargo, como no hay distinción entre los tres $8'$s, o sea, no hay un primer 8, ni un segundo ni un tercero y la elección que hicimos fue en orden, cada número de 222 cifras se está contando 6 veces en el producto $222\times 221\times 220$, según las posibles revolturas de los $8'$s, es decir, si por ejemplo en dos de las $222\times 221\times 220$ elecciones que hicimos para las posiciones de los $8'$ el 8_3 y el 8_1 estuvieran intercambiados y el 8_2 en ambas ocupara la misma

posición, los números de 222 cifras que obtendríamos con las dos elecciones serían el mismo y lo mismo ocurre con todas las revolturas de los 8′ que en total son 6: $8_18_28_3$, $8_18_38_2$, $8_28_18_3$, $8_28_38_1$, $8_38_18_2$ y $8_38_28_1$.)

2º caso: Números con exactamente 220 9′s. Como arriba, en este caso nos faltarán dos números con suma 15. Entonces los números faltantes deberán ser 15 y la elección de sus posiciones es de $222 \times 221 = 49\,062$. (En este caso no dividimos entre las 2 revolturas del 8 y el 7 como se hizo en el primer caso ya que el 8 y el 7 no son intercambiables pues su revoltura produce distintos números.)

3er caso: Números con exactamente 221 9′s. En este caso sólo falta un número que debe ser 6 y el total de números de 222 cifras que tienen 221 9′s y un 6 son 222.

La cantidad total es $1\,798\,940 + 49\,062 + 222 = 1\,848\,224$.

23. Escribamos $3n + 1 = k^2$. Observemos primero que k no puede ser múltiplo de 3 pues si lo fuera, entonces, 1 sería la diferencia de dos múltiplos de 3: $1 = k^2 - 3n$, así que 1 también sería divisible entre 3, lo cual es un absurdo. Entonces tenemos dos posibilidades para k: que deje residuo 1 al dividirlo entre 3 o que deje residuo 2.

En el primer caso k es de la forma $k = 3a + 1$, con a entero, así que:

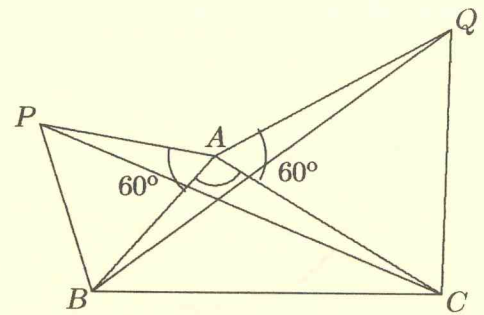
$$\begin{aligned} 3n + 1 = k^2 &= 9a^2 + 6a + 1, \\ 3n &= 9a^2 + 6a, \\ n &= 3a^2 + 2a, \\ n + 1 &= a^2 + a^2 + a^2 + 2a + 1 \quad \text{y} \\ n + 1 &= a^2 + a^2 + (a+1)^2. \end{aligned}$$

En el segundo caso $k = 3a + 2$ para algún entero a y tenemos

$$\begin{aligned} 3n + 1 = k^2 &= 9a^2 + 12a + 4, \\ 3n &= 9a^2 + 12a + 3, \\ n &= 3a^2 + 4a + 1, \\ n + 1 &= a^2 + a^2 + 2a + 1 + a^2 + 2a + 1 \quad \text{y} \\ n + 1 &= a^2 + (a+1)^2 + (a+1)^2. \end{aligned}$$

24. Probaremos que los triángulos ΔABQ y ΔAPC son iguales. Para ello observemos que su ángulo en A coincide pues

$$\angle BAQ = \angle BAC + 60^\circ = \angle PAC.$$

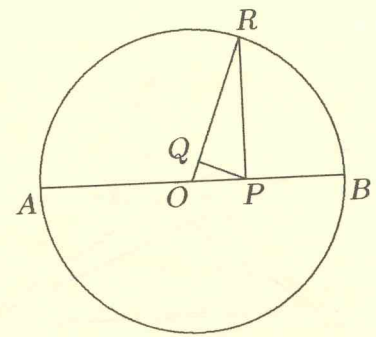


Además los lados que abarcan este ángulo son iguales en los dos triángulos: $AB = AP$ y $AQ = AC$, así que queda probada la igualdad de los triángulos y, en consecuencia el tercer lado también es igual: $PC = BQ$, como queríamos probar.

25. La igualdad buscada nos la dará la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}
&n^2(n-1)^3(n-2)^4(n-3)^5(n-4)^6\cdots 2^n \\
&\qquad = (n!)^2(n-1)^1(n-2)^2(n-3)^3(n-4)^4\cdots 2^{n-2} \\
&\qquad = (n!)^2(n-1)^1((n-2)!)^2(n-3)^1(n-4)^2\cdots 2^{n-4} \\
&\qquad = (n!)^2(n-1)^1((n-2)!)^2(n-3)^1((n-4)!)^2\cdots 2^{n-6} \\
&\qquad \vdots \\
&\qquad = (n!)^2(n-1)^1((n-2)!)^2(n-3)^1((n-4)!)^2\cdots 2 \\
&\qquad = (n!)^2((n-2)!)^2((n-4)!)^2\cdots(3!)^2(n-1)(n-3)(n-5)\cdots 2 \\
&\qquad = (n!(n-2)!(n-4)!\cdots 3!)^2(n-1)(n-3)(n-5)\cdots 2 \\
&\qquad = (n!(n-2)!(n-4)!\cdots 3!)^2\left[\frac{(n-1)}{2}\frac{(n-3)}{2}\frac{(n-5)}{2}\cdots\frac{2}{2}\right]\cdot 2^{\frac{n-1}{2}} \\
&\qquad = (n!(n-2)!(n-4)!\cdots 3!)^2\left(\frac{n-1}{2}\right)!\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}.
\end{aligned}$$

26. Tenemos que la igualdad buscada es equivalente a $RQ\left(\frac{a+b}{ab}\right) = 2$, pero $a+b = 2r$, así que la última igualdad es equivalente a $RQ\cdot r = ab$; sustituyendo r por OR tenemos otra igualdad equivalente que es $OR\cdot RQ = ab$. Ahora sustituyamos en esta última a por $r+OP$ y b por $r-OP$ para obtener la igualdad $OR\cdot RQ = (r+OP)(r-OP)$, equivalente a las anteriores. Pero $(r+OP)(r-OP) = r^2-OP^2 = OR^2 - OP^2 = PR^2$. Entonces hemos reducido nuestro problema a probar que $OR\cdot RQ = PR^2$. Otra forma de escribir esta última ecuación es $\frac{RQ}{PR} = \frac{PR}{OR}$, la cual es obviamente cierta pues los triángulos $\Delta\, RQP$ y $\Delta\, RPO$ son semejantes.



27. Por ser múltiplo de 5, el número debe terminar en 0 o 5, pero como no debe de tener 0's, el número termina en 5. Ahora hay que buscar tres números cuya suma sea 4 (pues la suma de todas las cifras del número es 9); la única posibilidad es $1, 1, 2$ y, como el número debe ser mayor que 1995, debe ser 2115.

28. Llamemos n al número de cubitos del primer nivel. Entonces $n + 2n + 3n = 48$, de donde $6n = 48$ y así $2n = 16$ es el número de cubitos en el segundo nivel.

29. Podemos contar las fichas como sigue: las que tienen al número 8 son ocho; las que tienen al 7 pero no al 8 son siete; las que tienen al 6 pero no al 8 ni al 7 son seis y así sucesivamente hasta contar la $\boxed{1}\boxed{1}$. Entonces son $8+7+5+\cdots+1 = 36$.

30. Son 12 vértices pues en cada una de las 12 aristas del cubo quedará un vértice. (De otra manera: La respuesta es $\frac{8\times 3}{2}$ pues cada uno de los ocho vértices del cubo original se sustituye por tres vértices, lo que nos daría un total de 8×3 vértices pero en esta cuenta cada vértice se habría contado dos veces por provenir de dos esquinas distintas.)

31. Tenemos que

$$\begin{aligned}\left(10^2 + 10^3 + \cdots + 10^{10}\right)^{1995} &= \left[10^2\left(1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^8\right)\right]^{1995} \\ &= 10^{3990}\left(1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^8\right)^{1995}\end{aligned}$$

Entonces son 3990 ceros.

32. Llamemos d al número de días en cada semana. Entonces $d^3 = 1331$, d donde $d = 11$.

33. En cada una de las 6 filas horizontales hay 4 segmentos de longitud 2, así que en total hay 24 segmentos horizontales. Análogamente hay 24 verticales, así que el total es de 48.

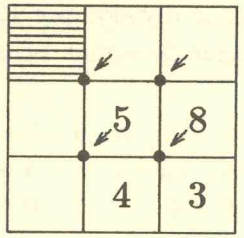
34. La mitad del recorrido son 60 km. Como Ana viaja a 80 km por hora y 60 es igual a $\frac{3}{4}$ de 80, Ana tarda 45 minutos en recorrer los 60 kilómetros. Claramente Beto tarda 1 hora en recorrerlos, así que para que se hayan encontrado a la mitad del recorrido, Beto debe haber salido 15 minutos antes que Ana.

35. Usando Pitágoras tenemos que $AD = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$ (en el triángulo APD) y que $DC = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$ (en el triángulo PDC). Entonces $AB = 25$ y $PB = 25 - 9 = 16$. Otra vez, por Pitágoras, $BC = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$ (en el triángulo PBC). Entonces el área de PBC es $\frac{PB \times BC}{2} = \frac{16 \times 12}{2} = 96$.

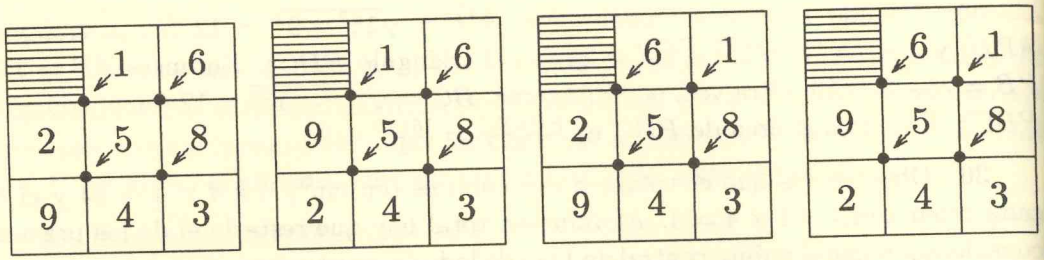
36. Observemos que el volumen del cubo es (en cm^3) $4 \times 4 \times 4 = 64$ y el de cada prisma es $1 \times 1 \times 4 = 4$. Al volumen total hay que restarle el de los prismas, considerando que el cubito central de 1 cm de lado (y, por tanto de 1 cm^3 de volumen), que es común a los tres prismas, debe restarse una sola vez o, equivalentemente, restarse 3 veces (una junto con cada prisma) y después sumarse dos veces. Entonces la respuesta es $64 - 3 \times 4 + 2 \times 1 = 54$.

37. Hacemos el cociente y obtenemos: $\frac{4}{101} = 0.039603960396\ldots$, es decir, hay un periodo de repetición de longitud 4 (se repite 0396 infinitamente). Como el residuo de la división de 1995 entre 4 es 3 ($1995 = 498 \times 4 + 3$), en el lugar 1995 aparece el tercer número del periodo 0396, o sea, el 9.

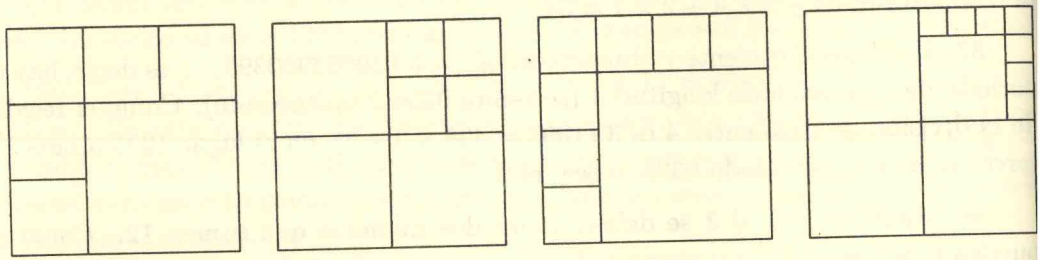
38. Junto al 5 y al 3 se deben poner dos números que sumen 12. Como no pueden repetirse entre sí y ninguno de ellos puede ser 5 o 3, la única posibilidad para esos dos números es 8 y 4. Consideremos la posibilidad que se indica en la figura siguiente (la otra posibilidad es simétrica con respecto a la diagonal determinada por 5 y 3, así que nos da el mismo resultado en la casilla sombreada):



Ahora, arriba del 5 y el 8 deberán aparecer dos números cuya suma sea $20-(5+8)=7$. Otra vez, dado que no debe haber repeticiones, la única posibilidad es 1 y 6. De la misma manera, a la izquierda del 5 y el 4 deben aparecer el 2 y el 9. Combinando éstas con las de arriba tenemos las 4 posibilidades que muestra la figura. Considerando que los 4 números de arriba a la izquierda deben sumar 20 y que no debe haber repeticiones observamos que la única posibilidad que se puede completar es la tercera y el número que la completa es el 7.



39. En la siguiente figura se ilustró una posibilidad para cada caso.



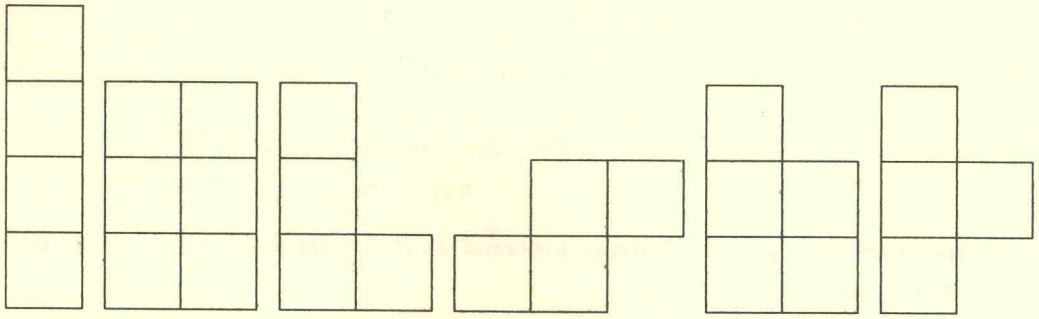
caso 6 caso 7 caso 8 caso 11

40. Podemos hacer fácilmente una lista de los números que va marcando l manecilla grande según los minutos que pasan. Para ello, observemos que a part de 13 podemos sumar residuos de la división por 12 (por ejemplo, en lugar de sum 13, podemos sumar sólo 1, en lugar de sumar 14, sumaremos sólo 2, etc.):

al sumar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
se obtiene	1	3	6	10	3	9	4	0	9	7	6	6
	7	9	0	4	9	3	10	6	3	1	0	0

A partir de aquí se repetirá lo mismo que arriba así que cada 24 minutos estará manecilla grande 4 veces en el 12. Entonces para que esté 12 veces en el 12 (que cuando la chica también llegará ahí) se necesitan $3 \times 24 = 72$ minutos.

41. El problema equivale a contar cuántas figuras de perímetro 10 se pueden formar con cuadritos de 1×1, y después multiplicar el resultado por 10 (que es el número de posiciones relativas en la figura de perímetro 10 en las que la casa de Ana puede quedar como vértice) y también por 2 (para tomar en cuenta los dos sentidos en que se puede hacer el recorrido). Las figuras mencionadas son de los siguientes tipos:



tipo 1 tipo 2 tipo 3 tipo 4 tipo 5 tipo 6

Contemos ahora cuántas posiciones tienen cada uno de estos tipos. Del tipo 1 hay 2 posiciones: vertical (como muestra el dibujo) y horizontal. Análogamente del tipo 2 hay 2, del tipo 3 hay 8, del tipo 4 hay 4, del tipo 5 hay 8 y del tipo 6 hay 4. La respuesta entonces es $20(2+2+8+4+8+4) = 560$.

42. Queremos que

$$xyz + xzy + yxz + yzx + zxy + zyx = 5xxx.$$

Pero el miembro izquierdo de esta ecuación es igual a

$$xxx + xxx + yyy + yyy + zzz + zzz,$$

de donde $2(yyy+zzz) = 3xxx$, es decir, $2\times 111(y+z) = 3\times 111x$, así que $2(y+z) = 3x$ y x debe ser par: 2, 4, 6, 8.

Si $x = 2$, entonces alguno de y o z es cero, lo cual es imposible.

Si $x = 4$, entonces $y + z = 6$, de donde $\{y, z\} = \{1, 5\}$.

Si $x = 6$, entonces $y + z = 9$, de donde $\{y, z\} = \{1, 8\}$, $\{2, 7\}$ o $\{4, 5\}$.

Si $x = 8$, entonces $y + z = 12$, es decir, $\{y, z\} = \{3, 9\}$, o $\{5, 7\}$.

Entonces las ternas son: $(4,1,5)$, $(4,5,1)$, $(6,1,8)$, $(6,8,1)$, $(6,2,7)$, $(6,7,2)$, $(6,4,5)$, $(6,5,4)$, $(8,3,9)$, $(8,9,3)$, $(8,5,7)$ y $(8,7,5)$.

43. Sea n el número de filas y m la cantidad de lugares en cada fila del salón.

(i) Cada una de las $(n-2)(m-2)$ personas que están en el interior del rectángulo saluda a 8 personas que están a su alrededor.

(ii) Cada una de las $2[(n-2)+(m-2)]$ personas que están en las orillas del rectángulo, pero no en las esquinas, saluda a 5 personas.

(iii) Las 4 personas de las esquinas saludan a 3.

Así contando los saludos dos veces y desarrollando tenemos que:

$$\begin{aligned} 8(n-2)(m-2)+10[(n-2)+(m-2)]+12 &= 2040 \\ 8nm-6n-6m &= 2036. \end{aligned}$$

Para resolver esta ecuación podemos proceder de varias maneras. Una de ellas podría ser buscando una factorización:

$$\begin{aligned} 16mn-12m-12n &= 4072 \\ 16mn-12m-12n+9 &= 4081 \\ 4n(4m-3)-3(4m-3) &= 4081 \\ (4n-3)(4m-3) &= 4081 = 7\cdot 11\cdot 53 \end{aligned}$$

como 7 y 11 no son de la forma $4s-3$, las únicas soluciones son: ($4n-3=77$ y $4m-3=53$) o bien ($4n-3=53$ y $4m-3=77$), por lo que ($n=20$ y $m=14$) o bien ($n=14$ y $m=20$). En cualquier caso el número de concursantes es de 280.

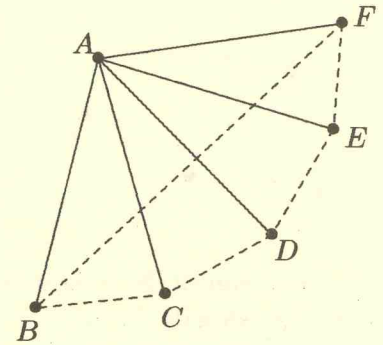
Otra forma para resolver la ecuación podría ser usando congruencias: Tenemos que $4nm-3n-3m=1018$, de donde $n(4m-3)=3m+1018$. Simplificando módulo $4m-3$ tenemos la siguiente sucesión de congruencias equivalentes:

$$\begin{aligned} 3m+1018 &\equiv 0 \ (mod\ 4m-3), \\ 12m+4072 &\equiv 0 \ (mod\ 4m-3), \\ 3(4m-3)+4081 &\equiv 0 \ (mod\ 4m-3) \ \text{ y} \\ 4081 &\equiv 0 \ (mod\ 4m-3). \end{aligned}$$

Entonces $4m-3$ es divisor de $4081=7\cdot 11\cdot 53$, y así las posibilidades para $4m-3$ son $1, 7, 11, 53, 77, 371, 583$ y 4081. Como m y n no pueden ser 1, las únicas posibilidades son $m=14$ (y $n=20$) o $m=20$ (y $n=14$). En cualquier caso, el número de alumnos es $14\cdot 20=280$.

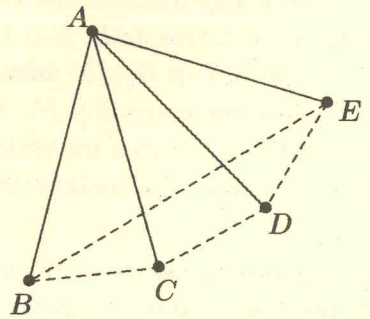
44. Llamemos A, B, C, D, E y F a los puntos. Trabajaremos por casos. Por casos:

Caso 1: De algún punto, que supondremos sin pérdida de generalidad es A, salen 5 distancias 1.



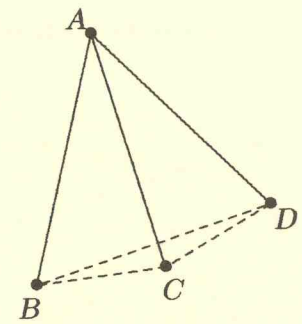
Entre B, C, D, E y F hay $\binom{5}{2} = 10$ distancias, así que alguna de éstas es unitaria pues, en caso contrario sólo habría 5 distancias unitarias ya que el total de distancias es $\binom{6}{2} = 15$. Los extremos de este segmento junto con el punto A forman el triángulo equilátero (si, por ejemplo, el segmento unitario fuera BC, entonces ABC sería el triángulo buscado).

Caso 2: De algún punto salen sólo 4 distancias 1.

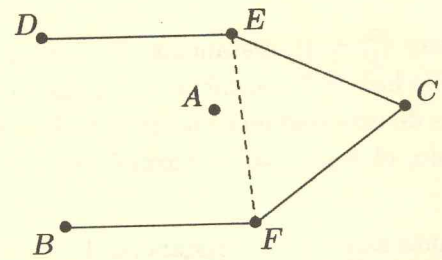


Entre B, C, D y E hay $\binom{4}{2} = 6$ distancias. Si ninguna de estas 6 distancias es unitaria, entonces las otras 4 distancias unitarias salen del punto F y van a dar a B, C, D y E, pero el único punto que puede estar a distancia 1 de B, C, D, E es A, (pues A es el centro del círculo que pasa por ellos) luego $F = A$, lo cual es una contradicción. Entonces entre las 6 distancias hay una unitaria y los extremos de este segmento junto con el punto A forman el triángulo buscado.

Caso 3: De algún punto salen sólo 3 distancias 1.



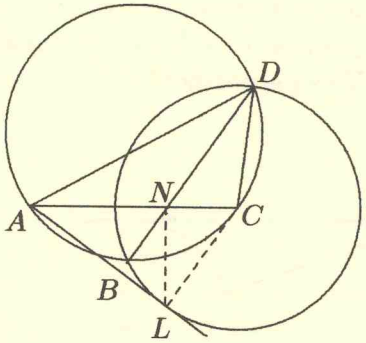
Si una de BC, CD o DB es 1, terminamos. Supongamos que ninguna es 1; entonces las restantes 5 distancias unitarias salen de E o F.



Entonces en el pentágono $BCDEF$ hay 5 distancias unitarias y BC, CD y DB no lo son. Si de E tuviera distancia 1 con tres de B, C o D entonces $E = A$, así que E a lo más tiene dos distancias 1 con B, C y D, y lo mismo ocurre con F. Como falta una distancia 1, entonces ésta debe ser entre E y F. Tenemos que de cada uno de E y F salen dos distancias unitarias que van a los vértices B, C, D, luego a alguno de estos vértices, por ejemplo C, llegan dos distancias unitarias y así el triángulo buscado es CEF.

Finalmente observemos que siempre se está en un caso de los anteriores, pues si de ningún vértice no salieran más de dos distancias unitarias, entonces a lo más habría 6 distancias 1.

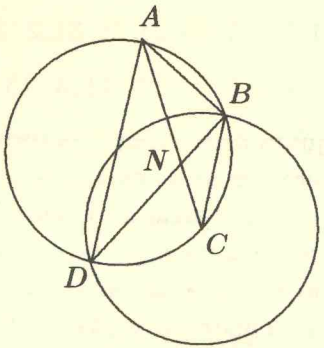
45. *Primera demostración.* Como los arcos BC y CD son iguales, los ángulos $\angle DAC$ y $\angle BDC$ son iguales y, puesto que $\angle ACD = \angle NCD$ es común para los triángulos $\Delta\, ACD$ y $\Delta\, DCN$, tenemos que estos dos triángulos son semejantes. Luego $\frac{AC}{CD} = \frac{CD}{NC}$, pero $CD = CL$, y así tenemos que $\frac{AC}{CL} = \frac{CL}{NC}$.



Esto, junto con el hecho de que el ángulo $\angle ACL$ es común para los triángulos $\Delta\, ACL$ y $\Delta\, LCN$, nos garantiza que estos triángulos son semejantes. Pero $\Delta\, ACL$ es un triángulo rectángulo, luego $\Delta\, LCN$ también es rectángulo con ángulo recto en N, por lo que LN es perpendicular a AC. También, como $CD = CM$, tenemos que $\frac{AC}{CM} = \frac{CM}{NC}$, y de manera análoga se llega a que MN es perpendicular a AC. Luego L , M y N son colineales.

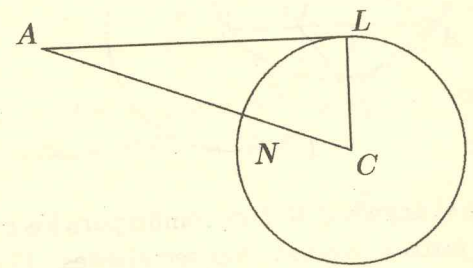
Segunda demostración. Tenemos que $\angle ADB = \angle DAC = \angle CAB = \angle DBC = \angle ACB = \frac{\pi}{7}$ ya que AB, BC y CD son lados de un heptágono regular. Luego los triángulos $\Delta\, ABC$ y $\Delta\, BNC$ son isósceles y con los ángulos iguales y, por tanto, son semejantes. Entonces $\frac{CA}{CB} = \frac{CB}{CN}$, lo que implica que

$$CN \cdot CA = CB^2. \qquad (*)$$



De aquí hay dos formas para continuar:

Primera forma. Como CL es igual a CB, la ecuación $(*)$ se reescribe como $CN \cdot CA = CL^2$, lo cual implica que $\frac{CA}{CL} = \frac{CL}{CN}$; esto, junto con el hecho de que en los triángulos ΔCNL y ΔCLA el ángulo en C es común, nos dice que los dos triángulos son semejantes (por el criterio de semejanza (LAL)). Como ΔCLA es rectángulo, también lo es el ΔCNL, y entonces LN es perpendicular a CA. Análogamente se puede llegar a ver que MN es perpendicular a CA, luego L, M y N son colineales.



Segunda forma. La ecuación $(*)$ nos garantiza que N y A son puntos inversos con respecto a la circunferencia de centro C y radio CB., y una forma de encontrar el inverso de A con respecto a tal circunferencia es trazar las tangentes desde A a la circunferencia y unir los puntos de tangencia L y M, entonces la intersección de LM con CA es el inverso, luego N se encuentra sobre la línea LM.

46. (a) Un posible conjunto B es el que consta del 1, de todos los primos del conjunto A, de todos los productos que caen en A de dos de estos primos y del único producto de tres de estos primos que pertenecen a A:

$$B = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, 2 \cdot 11,$$
$$2 \cdot 13, 2 \cdot 17, 2 \cdot 19, 3 \cdot 5, 3 \cdot 7, 3 \cdot 11, 3 \cdot 13, 5 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5\}.$$

Para convencernos que el conjunto dado cumple la propiedad observemos que dados dos elementos a y b en B diferentes de 1, en las factorizaciones de a y b aparecen únicamente primos elevados a la potencia 1, y, como $a \neq b$, entonces en uno de ellos aparece un primo p que no aparece en el otro y así su producto ab, el primo p aparece a la potencia 1, lo cual muestra que ab no es un cuadrado perfecto. Nótese también que, $1 \cdot a = a$ no es un cuadrado perfecto. Por tanto ningún producto de dos elementos de B es un cuadrado perfecto.

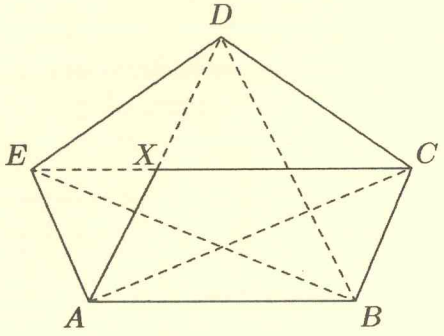
(b) Observemos que un conjunto con las características pedidas deberá tener

lo más un elemento de cada uno de los siguientes conjuntos (pues en cada uno de ellos el producto de cualesquiera dos elementos es un cuadrado):

$$\begin{aligned}
\{1,4,9,16,25,36\} &\text{ es decir, los cuadrados,}\\
\{2,8,18,32\} &\text{ es decir, los de la forma } 2x^2,\\
\{3,12,27\} &\text{ es decir, los de la forma } 3x^2,\\
\{5,20\} &\text{ es decir, los de la forma } 5x^2,\\
\{6,24\} &\text{ es decir, los de la forma } 6x^2,\\
\{7,28\} &\text{ es decir, los de la forma } 7x^2 \text{ y}\\
\{10,40\} &\text{ es decir, los de la forma } 10x^2.
\end{aligned}$$

Entonces, para formar un conjunto B con las condiciones pedidas, habrá que empezar por eliminar todos menos tal vez uno de los elementos de cada uno de esos conjuntos y el conjunto buscado tendrá como máximo $40-5-3-2-1-1-1-1=26$. elementos. Por tanto no puede existir un conjunto con 27 elementos que cumpla lo que se pide en el inciso (a).

47. Si las áreas de los triángulos $\Delta\, ABC$ y $\Delta\, BCD$ son iguales, como tienen la misma base BC, entonces las alturas son iguales y así los vértices A y D se encuentran sobre una línea paralela a BC, es decir $AD \,||\, BC$. Por la misma razón, como las áreas de los triángulos $\Delta\, EAB$ y $\Delta\, ABC$ son iguales se tiene que $AB \,||\, CE$; lo anterior implica que $ABCX$ es un paralelogramo, donde X es la intersección de AD y CE. En el paralelogramo $ABCX$, es claro que las áreas de los triángulos $\Delta\, ABC$ y $\Delta\, ACX$ son iguales.



También observemos que el área del $\Delta\, AXE$ es estrictamente menor que el área del $\Delta\, DEA$ (la base AX es estrictamente menor que la base AD y ambos tienen la misma altura sobre tales bases). Finalmente se tiene que el área del $\Delta\, ACE$ es mayor que el área del triángulo $\Delta\, ACX$ (la base AE del $\Delta\, ACE$ es mayor que la base AX del $\Delta\, ACX$ y ambos tienen la misma altura sobre esta base).

Si $(XYZ\ldots)$ denota el área de la figura $XYZ\ldots$ tenemos:

$$\begin{aligned}(ABCDE) &= (ABC + (ACX) + (CDE) + (EAX) \\ &= 3(ABC) + (EAX) < 4(ABC)\end{aligned}$$

por tanto

$$\frac{1}{4}(ABCDE) < (ABC)$$

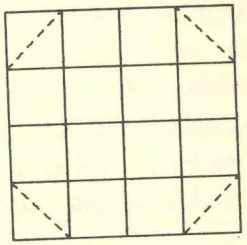
y también

$$(ABCDE) = (ABC) + (CDE) + (EAC) > 3(ABC)$$

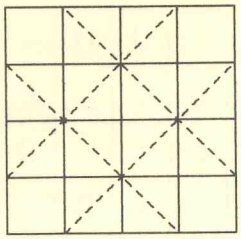
y de aquí que

$$(ABC) < \frac{1}{3}(ABCDE)$$

48. Consideremos un arreglo arbitrario de 0's y 1's. Veremos en qué cuadros se pueden lograr 0's sin afectar el resto de los cuadros. Como hay diagonales que pasan sólo por cada esquina, en las esquinas siempre se pueden lograr 0's sin afectar lo demás.

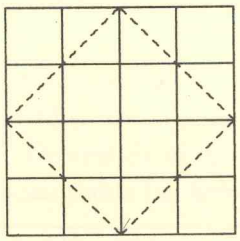


También, como hay diagonales que pasan sólo por uno de los cuadros centrales, en los cuadros centrales siempre se pueden lograr 0′s.



0			0
	0	0	
	0	0	
0			0

A partir de aquí trabajaremos sólo en los cuadros centrales de las columnas y renglones exteriores mediante operaciones en esas columnas y renglones y en las diagonales de longitud dos; de esta manera el centro se mantendrá sin cambio y las esquinas, como dijimos arriba, siempre pueden volver a hacerse 0′s sin cambiar lo demás.



Si en uno de los renglones o columnas de la orilla hay dos 1′s centrales, éstos podemos convertirlos en 0′s y lo mismo ocurre si hay dos 1′s contiguos en una diagonal de longitud dos.

	1	1	

		1	
			1

Por otro lado, si en una diagonal de longitud dos hay un 0 y un 1, éstos podemos intercambiarlos. Por estas observaciones, podemos "bajar" todos los 1′s que haya

en el arreglo hasta el renglón inferior. Aquí tenemos dos casos, que nos queden dos 1′s, en cuyo caso podemos convertirlos en 0′s, y que nos quede un solo 1.

	0	0	
0			0
0			0
	1	1	

	0	0	
0			0
0			0
	1	0	

Finalmente observemos que cualquiera de las operaciones mantiene la paridad del número de 1′s en los cuadros centrales de las columnas y renglones exteriores; es decir, si había un número par de 1′s en estas posiciones, por más operaciones que se apliquen, el número de 1′s se mantendrá par y también se mantendrá impar si en un principio era impar. Entonces tenemos que una posición se puede llevar a puros 0′s si y sólo si el número de unos en los cuadros centrales de las orillas es par.

A continuación presentaremos (sin soluciones) los exámenes de la X Olimpiada Iberoamericana, de la XXXVI Olimpiada Internacional y de la VII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico, todos celebrados en 1995.

X OLIMPIADA IBEROAMERICANA

1. Determine los posibles valores de las sumas de los digitos de todos los cuadrados perfectos.

2. Sea n un entero mayor que 1. Determine los numeros reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mayores o iguales que 1 y $x_{n+1} > 0$ que verifiquen:

$$x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{3}} + \ldots + x_n^{\frac{1}{n+1}} = n \cdot x_{n+1}^{\frac{1}{2}}$$

y tales que el promedio de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es x_{n+1}.

3. Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ dos rectas ortogonales que no estén en el mismo plano. Sea AB su perpendicular comun donde A pertenece a $\mathcal{R}$ y B a $\mathcal{S}$ (el plano que contiene a B y a $\mathcal{R}$ es perpendicular a $\mathcal{S}$). Determine el lugar geométrico de los puntos T sobre la esfera de diámetro AB de tal manera que T sea el punto de tangencia en la esfera de segmentos MN, con M en la recta $\mathcal{R}$ y N en la recta $\mathcal{S}$.

4. En un tablero de $m \times m$ casillas se colocan fichas. Cada ficha colocada en el tablero "domina" a todas las casillas de la fila, la columna y la diagonal a la que pertenece (una sola diagonal). Determine el menor número de fichas que deben colocarse para que queden dominadas todas las fichas del tablero.

5. El incírculo del triángulo ΔABC es tangente a BC, CA y AB en D, E y F, respectivamente. Suponga que dicho círculo corta de nuevo a AD en su punto medio X, es decir, $AX = XD$. Las rectas XB y XC cortan de nuevo al incírculo en Y y Z. respectivamente. Demuestre que $EY = FZ$.

6.- Digamos que una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es *circular* si para cada $p \in \mathbb{N}$ existe $n \in \mathbb{N}$, con $n \leq p$ tal que f aplicada n veces a p, en símbolos $f^n(p)$, es igual a p. Digamos también que la función f tiene *grado de repulsión* k $(0 < k < 1)$, si para cada $p \in \mathbb{N}$, $f^i(p) \neq p$ para toda i menor o igual a la parte entera de kp. Determine el mayor grado de repulsión que puede tener una función circular.

VII OLIMPIADA DE LA CUENCA DEL PACÍFICO

1. Determine todas las sucesiones de números reales $a_1, a_2, \ldots, a_{1995}$ que satisfacen

$$2\sqrt{a_n - (n-1)} \geq a_{n+1} - (n-1), \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \ldots, 1994$$

y

$$2\sqrt{a_{1995} - 1994} \geq a_1 + 1).$$

2. Sea $a_1, a_2, \ldots, a_n$ una sucesión de enteros con valores entre 2 y 1995, primos relativos por parejas y tales que cada a_i es primo o es producto de primos distintos. Determine el menor valor posible de n que asegura que la sucesión contiene u número primo.

3. Sea $PQRS$ un cuadrilátero cíclico (es decir, P, Q, R y S están sobre un mismo círculo) tal que los segmentos PQ y RS no son paralelos. Considere el conjunto de círculos que pasan P y Q y el conjunto de círculos que pasan por R y S. Determine el lugar geométrico de los puntos de tangencia de los dos círculos en esos dos conjuntos.

4. Sea $\mathcal{C}$ un círculo de radio R y centro O, y sea S un punto fijo en el interior del círculo $\mathcal{C}$. Sean AA' y BB' dos cuerdas perpendiculares que pasan por S. Considere los rectángulos $SAMB$, $SBN'A'$, $SA'M'B'$ y $SB'NA$. Encuentre el conjunto de todos los puntos M, N', M', y N cuando A se va moviendo sobre el círculo.

5. Encuentre el mínimo entero positivo k tal que existe una función f de $\mathbb{Z}$, el conjunto de los enteros, al conjunto $\{1, 2, \ldots, k\}$ con la propiedad de que $f(x) \neq f(y)$ si $|x - y| \in \{5, 7, 12\}$.

XXXVI OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICAS

1. Sean A, B, C y D cuatro untos distintos en una línea recta, en ese orden. Los círculos con diámetros AC y BD se intersectan en X y Y. La línea XY corta a BC en Z. Sea P un punto en la línea XY distinto de Z. La línea CP intersecta al círculo con diámetro AC en C y en M, y la línea BP intersecta al círculo con diámetro BD en B y en N. Pruebe que las líneas AM, DN y XY son concurrentes.

2. Sean a, b y c números reales positivos tales que $ABC = 1$. Pruebe que

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

3. Encuentre todos los enteros $n > 3$ para los cuales hay n puntos $A_1, \ldots, A_n$ en el plano, no tres colineales, y números reales $r_1, \ldots, r_n$ tales que para $1 \leq i < j < k \leq n$, el área del triángulo $\Delta\, A_iA_jA_k$ es $r_i + r_j + r_k$.

4. Encuentre el valor máximo de x_o con el que existe una sucesión $x_o, x_1, \ldots x_{1995}$ de reales positivos con $x_o = x_{1995}$ tales que para $i = 1, \ldots, 1995$,

$$x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}.$$

5. Sea $ABCDEF$ un hexágono convexo con $AB = BC = CD$ y $DE = EF = FA$, tal que $\angle BCD = \angle EFA = \frac{\pi}{3}$. Sean G y H puntos en el interior del hexágono tales que $\angle AGB = \angle DHE = \frac{2\pi}{3}$. Pruebe que $AG + GB + GH + DH + HE \geq CF$.

6. Sea p un número primo impar. ¿Cuántos subconjuntos de $S = \{1, 2, \ldots, 2p\}$ hay tales que la suma de sus elementos es divisible por p?

LECTURAS COMPLEMENTARIAS

Comité Organizador de la Olimpiada Matemática Mexicana, Olimpiada de Matemáticas, 140 problemas, Academia de la Investigación Científica, México 1993.

Gentile, E., Aritmética Elemental, Monografía no. 25 de la Serie de Matemáticas del Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico de la OEA, Ediciones de la OEA, 1988.

Grimaldi R., Matemáticas Discreta y Combinatoria, Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, México, 1989.

Gusiev, V., Litvinenko, V., Mordkovich, A., Prácticas para Resolver Problemas de Matemáticas, (Geometría), Editorial Mir, Moscú, 1969.

Litvinenko, V., Mordkovich, A., Prácticas para Resolver Problemas de Matemáticas, (Álgebra y Trigonometría), Editorial Mir, Moscú, 1989.

Niven, I., Zuckerman, H., Introducción a la Teoría de los Números, Editorial Limusa-Wiley, México, 1972.

Shariguin, H., Problemas de Geometría, Colección Ciencia Popular, Ediotorial Mir, Moscú, 1989.

Vilenkin, N., ¿De Cuántas Formas? (Combinatoria), Editorial Mir, Moscú, 1972.

PATROCINADORES

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

CONSEJO NACIONAL DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACIONES Y ESTUDIOS AVANZADOS, I.P.N.

INSTITUTO AUTÓNOMO DE MÉXICO